Corrigé du fascicule d'exercices pour l'UE Maths 2B

Printemps 2024

A. Frabetti <frabetti@math.univ-lyon1.fr>

N. Jacquemot <nadege.jacquemot@univ-lyon1.fr>

Table des matières

TD 1 – CHAMPS SCALAIRES ET CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 – Champs scalaires, surfaces de niveau

Considerons le champ scalaire de $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x, y, z) = -\frac{K}{x^2 + y^2},$$

où $K > 0$ est une constante.

a) Exprimer ϕ en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et en coordonnées sphériques (r, θ, φ).

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, trouver les surfaces de niveau a de ϕ en séparant les cas $a \geqslant 0$ et $a < 0$, et dessiner celles de niveau $a = -1$ et $a = -2$. [*Utiliser l'expression de ϕ en coordonnées cylindriques.*]

c) Dessiner le graphe du champ ϕ comme fonction de la seule variable ρ.

Corrigé

a) En coordonnées cylindriques on a $x^2 + y^2 = \rho^2$, et en coordonnées sphériques on a $\rho = r \sin\theta$, donc

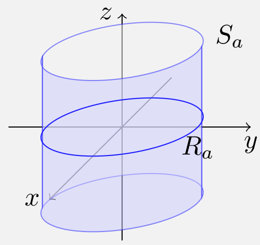
$$\phi(x, y, z) = -\frac{K}{x^2 + y^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(\rho, \varphi, z) = -\frac{K}{\rho^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{K}{r^2 \sin^2\theta}.$$

b) Pour $a \in \mathbb{R}$, la surface de niveau a de ϕ est

$$S_a(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \phi(\rho, \varphi, z) = -\frac{K}{\rho^2} = a \right\} = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho^2 = -\frac{K}{a} \right\}.$$

Puisque $\rho^2 \geqslant 0$ pour tous les points de l'espace, et puisque $K > 0$, l'égalité $\rho^2 = -\frac{K}{a}$ ne peut se vérifier que si $a < 0$. Par conséquent, la surface $S_a(\phi)$ est non vide si et seulement si $a < 0$, et dans ce cas on a $-\dfrac{K}{a} > 0$ et donc

$$S_a(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{-K/a} \right\}.$$



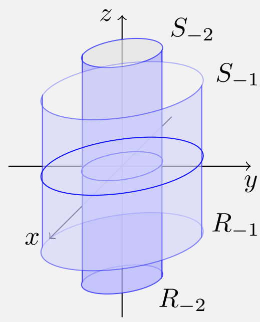
Cette surface est un cylindre d'axe la droite Oz, de rayon $R_a = \sqrt{-K/a}$ et de hauteur infinie.

En particulier, on a

$$S_{-1}(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{K} \right\}$$

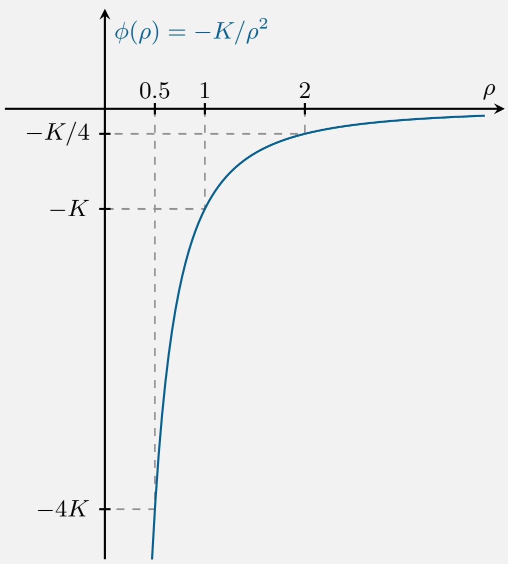
et

$$S_{-2}(\phi) = \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho = \sqrt{K/2} \right\},$$



et puisque $\sqrt{K/2} < \sqrt{K}$, le cylindre $S_{-2}(\phi)$ est plus proche à l'axe Oz du cylindre $S_{-1}(\phi)$.

c) Le champ ϕ a une valeur constante a sur chaque surface de niveau S_a. Pour representer ϕ comme fonction, on utilise le rayon ρ pour déterminer les surfaces $(\rho = R_a)$ et on dessine le graphe de ϕ comme fonction de ρ :



Exercice 2 – Champs de vecteurs

Trouver le domaine de définition et dessiner quelques valeurs des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x, y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x, y) = (x+1)\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$

c) $\vec{V}(x, y) = y\ \vec{\imath} + x\ \vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho\ \vec{e_\varphi}$

e) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\ \vec{e_\varphi}$

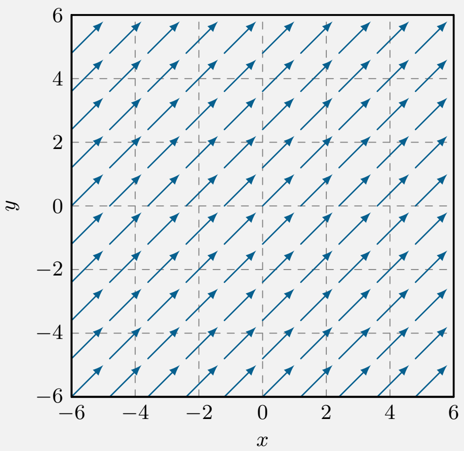
f) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{\imath} + 2\ \vec{\jmath} + \vec{k}$

g) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + \vec{k}$

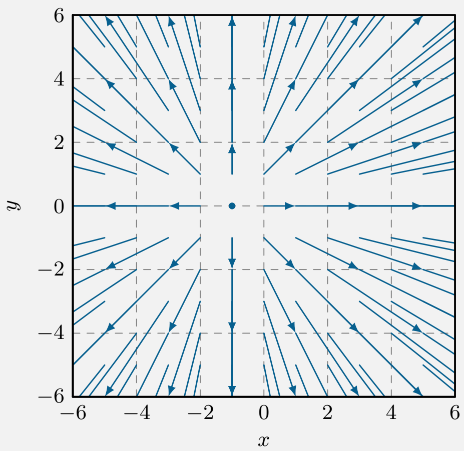
h) $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = r\ \vec{e_\theta} + r\ \vec{e_\varphi}$

Corrigé

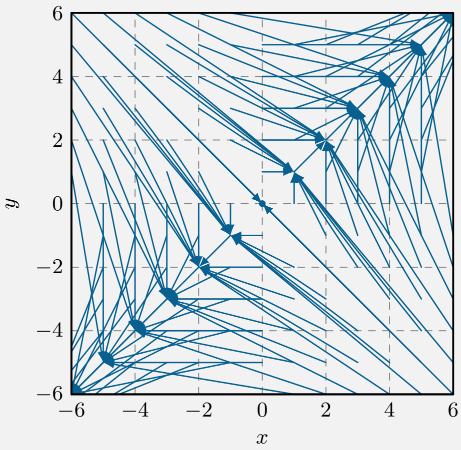
a) $\vec{V}(x, y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \quad D = \mathbb{R}^2$



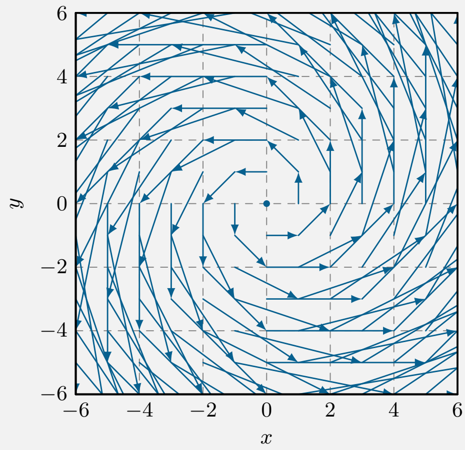
b) $\vec{V}(x, y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}, \quad D = \mathbb{R}^2$



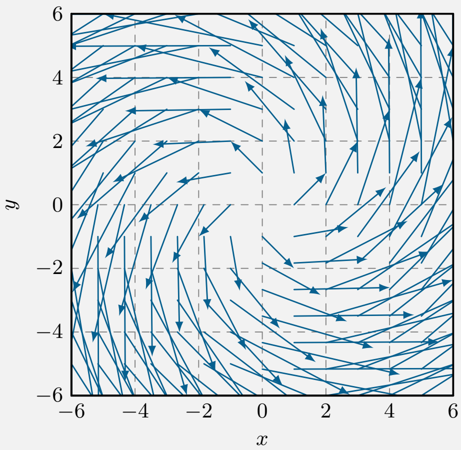
c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}, \quad D = \mathbb{R}^2$



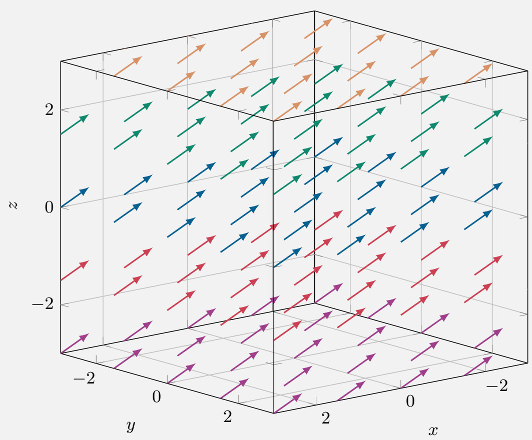
d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}\,, \quad D = \mathbb{R}^2$
($(0,0)$ est admis car $\rho\,\vec{e_\varphi} = \vec{0}$ en $(0,0)$)



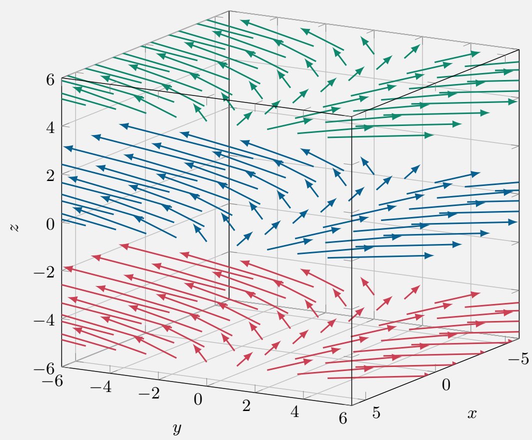
e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}\,, \quad D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
(car le vecteur $\vec{e_\rho}$ n'est pas défini en $(0,0)$)



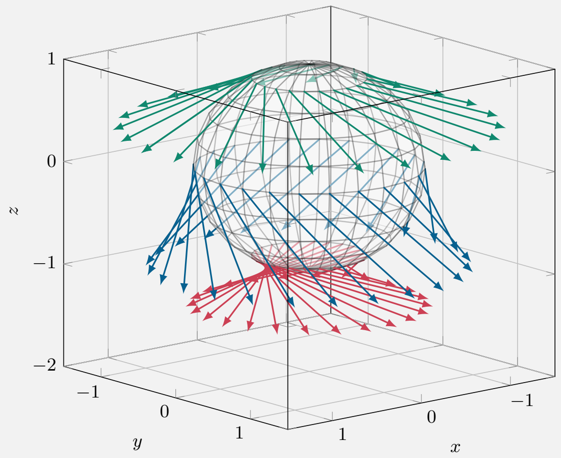
f) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}, \quad D = \mathbb{R}^3$

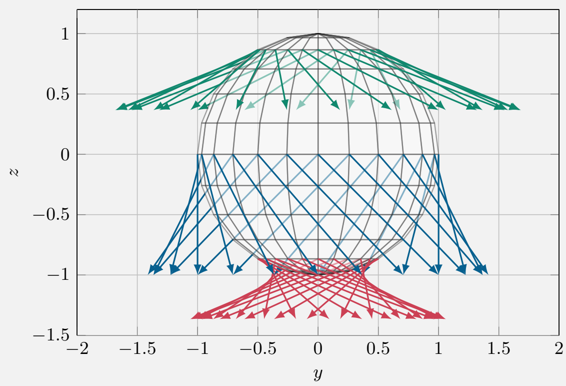


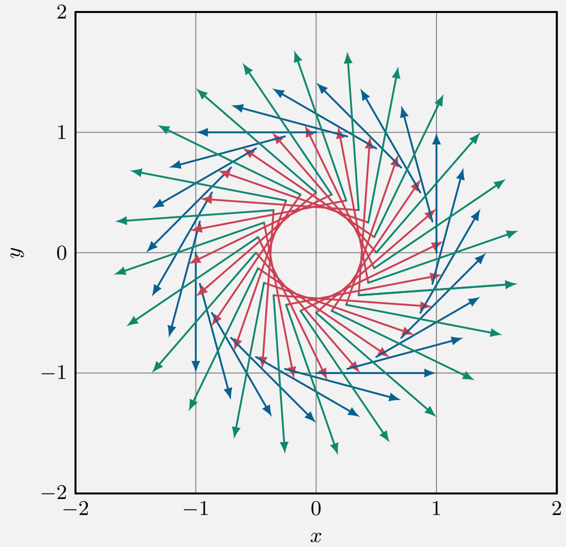
g) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \vec{k}, \quad D = \mathbb{R}^3$



h) $\overrightarrow{V}(r,\theta,\varphi) = r\,\vec{e_\theta} + r\,\vec{e_\varphi}\,, \quad D = \big\{(r,\theta,\varphi) \;\big|\; r \geqslant 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\big\}$







$r = 1$ (sphère indiquée en gris)

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \\[2mm] \dfrac{\pi}{2} \\[2mm] \dfrac{5\,\pi}{6} \end{cases}$$

$$\varphi = 0,\ \frac{\pi}{12},\ \ldots,\ \frac{23\,\pi}{12}$$

Exercice 3 – Dessin des champs de vecteurs
Relier chaque champ vectoriel à son dessin.

a) $\vec{V}(x,y) = -y\,\vec{\imath}$

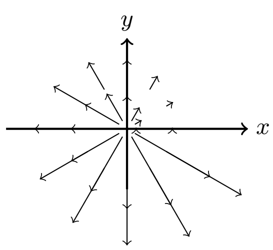
b) $\vec{V}(x,y) = -x\,\vec{\jmath}$

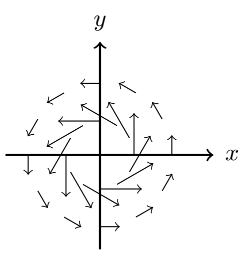
c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$

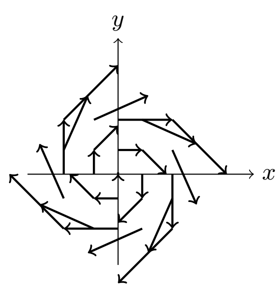
d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \varphi\,\vec{e_\rho}$

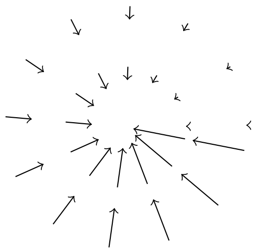
e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$

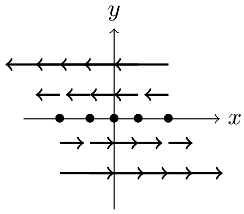
f) $\vec{V}(\rho,\varphi) = -\varphi\,\vec{e_\rho}$

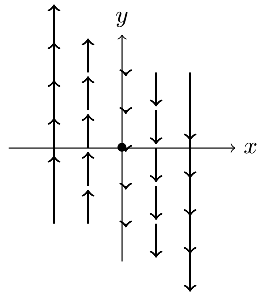
A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

F) 

Corrigé

a) Pour le champ $\vec{V}(x,y) = -y\,\vec{\imath}$, toutes les flèches sont horizontales, dirigées vers $\vec{\imath}$ quand $y < 0$ et vers $-\vec{\imath}$ quand $y > 0$: son dessin est le E).

b) Pour le champ $\vec{V}(x,y) = -x\,\vec{\jmath}$, toutes les flèches sont verticales, dirigées vers $\vec{\jmath}$ quand $x < 0$ et vers $-\vec{\jmath}$ quand $x > 0$: son dessin est le F).

c) Le champ $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$ en coordonnées polaires devient

$$\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi\,\vec{\imath} - \rho\cos\varphi\,\vec{\jmath} = \rho\big(\sin\varphi\,\vec{\imath} - \cos\varphi\,\vec{\jmath}\big) = -\rho\vec{e_\varphi}\,,$$

donc les flèches sont dirigées dans le sens de rotation horaire autour de l'origine, comme $-\vec{e_\varphi}$: son dessin est le C).

d) Pour le champ $\vec{V}(\rho,\varphi) = \varphi\,\vec{e_\rho}$, les flèches sont dirigées dans la direction radiale sortant (vers l'extérieur), comme $\vec{e_\rho}$, vu que l'angle φ est toujours positif (dans l'intervalle $[0,2\pi[$). Donc son dessin est le A).

e) Pour le champ $\vec{V}(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$, les flèches sont dirigées dans le sens de rotation antihoraire autour de l'origine, comme $\vec{e_\varphi}$: son dessin est le B).

f) Pour le champ $\vec{V}(\rho,\varphi) = -\varphi\,\vec{e_\rho}$, les flèches sont dirigées dans la direction radiale entrant (vers l'origine), comme $-\vec{e_\rho}$, donc son dessin est le D).