Fonctionnelles de Littlewood-Paley et algèbres de Sobolev sur les graphes.

Joseph Feneuil

22 octobre 2013

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = \{f \in L^p(\mathbb{R}),\ f' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

$$\begin{aligned} &(fg)' = fg' + f'g \\ \Rightarrow &\|(fg)'\|_p \leq \|f\|_\infty \|g'\|_p + \|f'\|_p \|g\|_\infty \end{aligned}$$

On dit que $W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ est une algèbre pour le produit point par point.

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^p, \forall a \in [\![1, d]\!]^k : D^a f \in L^p\}$$

On peut obtenir

$$\sum_{|a|=k} \|D^a(fg)\|_p \lesssim \|g\|_\infty \left(\sum_{|a|=k} \|D^a f\|_p \right) + \|f\|_\infty \left(\sum_{|a|=k} \|D^a g\|_p \right)$$

Pour $\alpha \geq 0$ et $p \in]1, +\infty[$,

$$L^p_\alpha(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega),\ \Delta^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(\Omega)\}$$

- Ω muni d'une distance, d'une mesure, d'un Laplacien positif.
- Ω complet.
- $\Delta^{\frac{\alpha}{2}}$ défini par théorie spectrale.

Pour $\alpha \geq 0$ et $p \in]1, +\infty[$,

$$L^p_\alpha(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega),\ \Delta^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(\Omega)\}$$

Cas $\Omega = \mathbb{R}^d$:

- $\alpha = k \in \mathbb{N} \Rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^d) = L^p_k(\mathbb{R}^d)$.
- $\|\Delta^{\alpha/2}(fg)\|_p \lesssim \|f\|_\infty \|\Delta^{\alpha/2} g\|_p + \|g\|_\infty \|\Delta^{\alpha/2} f\|_p$

Pour $\alpha \geq 0$ et $p \in]1, +\infty[$,

$$L^p_\alpha(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega),\ \Delta^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(\Omega)\}$$

Cas Ω variété Riemannienne :

- $W^{k,p}(\Omega) \neq L^p_k(\Omega)$ si $k \geq 2$.
- $\|\Delta^{\alpha/2}(fg)\|_p \lesssim \|f\|_\infty \|\Delta^{\alpha/2} g\|_p + \|g\|_\infty \|\Delta^{\alpha/2} f\|_p$ si $\alpha \in]0, 1[$, p et Ω vérifient des hypothèses (doublement du volume, ...).

Définition d'un graphe

Un graphe est un ensemble de points Γ muni d'une application symétrique positive $\mu : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}_+$

Exemples :

- $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $\mu_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |x-y| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.
- $\Gamma = [\![0,4]\!]$ et $\mu_{xy} = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Définition de la distance sur Γ :

- x et y sont voisins si $x \neq y$ et $\mu_{xy} > 0$. On note $x \sim y$.
- $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \sim y \\ \text{longueur du plus court chemin reliant } x \text{ à } y. \end{cases}$
- Les boules sont définies pour $x \in \Gamma$ et $r > 0$ par $B(x,r) = \{y \in \Gamma,\ d(x,y) < r\}$.

Remarque: On suppose que Γ est connexe et que

$$E_x = \{y \in \Gamma,\ x \sim y\} \leq N.$$

Définition de la mesure sur Γ :

- Pour un point : $m(x) = \sum_{y \in \Gamma} \mu_{xy}$.
- Pour un ensemble : $m(E) = \sum_{x \in E} m(x)$.
- On utilisera la notation $V(x,r) = m(B(x,r))$.

Définition du noyau de Markov réververible associé à (Γ, μ).

$$\begin{cases} p_0(x,y) = \delta(x,y) \\ p_1(x,y) = p(x,y) = \dfrac{\mu_{xy}}{m(x)} \\ p_{l+1}(x,y) = \displaystyle\sum_{z\in\Gamma} p(x,z)p_l(z,y) \end{cases}$$

P est l'opérateur de noyau p, i.e. $Pf(x) = \sum_{x\in\Gamma} p(x,y)f(y)$.

P^l est l'opérateur de noyau p_l.

Vérifions que $\|P\|_{p\to p} \leq 1$, $1 \leq p \leq +\infty$.
Nous définissons

- un Laplacien positif par $\Delta = I - P$,
- $\nabla f(x) = \left(\frac{1}{2}\sum_{y\sim x} p(x,y)|f(x)-f(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lemme

$$\|\nabla f\|_2^2 = < \Delta f, f >$$

Hypothèse (LB)

Il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$p(x,x) \geq \epsilon \qquad \forall x \in \Gamma.$$

$(LB) \Rightarrow (-1) \notin Sp_{L^p}(P) \Rightarrow P$ est analytique.

Hypothèse (DV)

Il existe $C > 0$ tel que

$$V(x,2r) \leq CV(x,r) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall r > 0$$

(DV) impliques l'existence de $d \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$V(x,\lambda r) \leq C\lambda^d V(x,r) \qquad \forall x \in \Gamma, \forall r > 0, \forall \lambda \geq 1$$

$(DV) \Rightarrow \{y \in \Gamma,\, x \sim y\} \leq N.$

Hypothèse (DUE)

$$p_l(x,x) \leq \frac{Cm(x)}{V(x,\sqrt{l})} \qquad \forall x \in \Gamma, \forall l \in \mathbb{N}^*.$$

$$(DV) + (DUE) \Leftrightarrow p_l(x,y) \leq \frac{Cm(y)}{V(x,\sqrt{l})} e^{-c\frac{d(x,y)^2}{l}}$$

Hypothèse (P_s)

$$\frac{1}{V(B)}\sum_{y\in B}|f(y)-f_B|^s m(y) \leq \frac{Cr^s}{V(2B)}\sum_{y\in 2B}|\nabla f(y)|^s m(y)$$

On a $(P_s) \Rightarrow (P_t)$ si $t \geq s$.

Hypothèse (GG_q)

$$\|\nabla P^l f\|_q \leq \frac{C_q}{\sqrt{l}}\|f\|_q$$

On a $(GG_\infty) \Rightarrow (GG_q)$, $q > 2$.

Remarque: Les hypothèses (DUE), (P_1) et (GG_∞) sont vraies pour tout groupe discret vérifiant (LB) et (DV).

Théorème (F. '13)

Soit (Γ, μ) un graphe vérifiant (DV), (LB), (DUE), (P_s) pour un $s \in [1,2]$ et (GG_q) pour un $q \in]2, +\infty]$. Soit $\alpha \in]0,1[$. Alors

$$\|\Delta^{\alpha/2}(fg)\|_p \leq C_{\alpha,p}\left(\|f\|_\infty \|\Delta^{\alpha/2} g\|_p + \|g\|_\infty \|\Delta^{\alpha/2} f\|_p\right)$$

dès que $p \in]s, q[$.

Théorème (F. '13)

Sous les mêmes hypothèses

$$c_{\alpha,p}\|S_\alpha f\|_p \leq \|\Delta^{\frac{\alpha}{2}} f\|_p \leq C_{\alpha,p}\|S_\alpha f\|_p$$

où $S_\alpha f(x) = \left(\sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} \left| \frac{1}{r^\alpha V(x,r)} \sum_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)| m(y) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Pour les espaces continus,

$$S_\alpha f(x) = \left(\int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{r^\alpha V(x,r)} \int_{y \in B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \right|^2 \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce cas, la preuve utilise les fonctionnelles de Littlewood-Paley suivantes ($\beta > 0$)

$$g_\beta^c f(x) = \left(\int_0^{+\infty} |(t\Delta)^\beta e^{-t\Delta} f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui vérifient pour $p \in]1, +\infty[$

$$\|g_\beta^c f\|_p \simeq \|f\|_p.$$

Ensuite,

$$\|\Delta^{\frac{\alpha}{2}} f\|_p \simeq \|g^c_{1-\frac{\alpha}{2}} \Delta^{\frac{\alpha}{2}} f\|_p$$

$$g_\beta f(x) = \left(\sum_{l \geq 1} l^{2\beta - 1} |\Delta^\beta P^{l-1} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta > 0$$

$$\tilde{g}_\beta f(x) = \left(\sum_{l \geq 1} l^{2\beta} |\nabla \Delta^\beta P^{l-1} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta > -\frac{1}{2}$$

Théorème (F. '13)

Soit (Γ, μ) vérifiant (DV), (LB), (DUE).

1. g_β est bornée de L^1 dans $L^{1,\infty}$, et de L^p dans L^p pour tout $p \in]1, +\infty[$.
2. $\tilde{g}_\beta$ est bornée de L^1 dans $L^{1,\infty}$, et de L^p dans L^p pour tout $p \in]1, 2]$. De plus, si Γ satisfait (P_2) et (GG_q), $\tilde{g}_\beta$ est borné pour tout $p \in]2, q[$.
3. Les inégalités précédentes peuvent être inversées dans l'espace dual :

$$\|f\|_p \lesssim \|g_\beta f\|_p \quad p \in]1, +\infty[\qquad , \qquad \|f\|_p \lesssim \|\tilde{g}_\beta f\|_p \quad p \in [2, +\infty[$$

$$\|f\|_p \lesssim \|\tilde{g}_\beta f\|_p \qquad \text{si } \Gamma \text{ vérifie } (P_2) \text{ et } (GG_q), \text{ et } p \in \left] \frac{1}{q'}, 2 \right[$$

Merci pour votre attention.

- N. Badr, F. Bernicot, E. Russ. Algebra properties for Sobolev spaces - Applications to semilinear PDE's on manifolds. *J. Anal. Math.*, **118** (2012), pp 509-544.
- N. Badr, E. Russ. Interpolation of Sobolev spaces, Littlewood-Paley inequalities and Riesz transforms on graphs. *Publ. Math.*, **53** (2009), pp 273-328.
- T. Coulhon, E. Russ, V. Tardivel-Nachef. Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity. *Amer. J. Math.*, **57** (2001), pp 283-342.