

Autour des ondes périodiques

Miguel Rodrigues

Institut Camille Jordan
Université Lyon 1

Session du GdR AFHP
ICJ, Lyon, Octobre 2013

Avec [Mathew Johnson](#), [Pascal Noble](#), [Kevin Zumbrun](#).
(Et [Blake Barker](#).)

Plan.

1 Introduction

2 Quelle stabilité ?

3 Quelles hypothèses spectrales ?

4 Que résout-on ?

5 Conclusion

Modèle : les équations différentielles.

$\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ lisse.

$\mathbf{U} : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ solution de

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \text{ et } \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0.$$

Solution stationnaire, $0 = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{U}})$.

Modèle : les équations différentielles.

$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lisse.

$\mathbf{U} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution de

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \text{ et } \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0.$$

Solution stationnaire, $0 = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{U}})$.

Stabilité

$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0,$

$$d(\mathbf{U}_0, \underline{\mathbf{U}}) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (\exists! \mathbf{U} \text{ et } (\forall t \geq 0, d(\mathbf{U}(t), \underline{\mathbf{U}}) < \delta)) .$$

Stabilité asymptotique

Stabilité + $\exists \varepsilon_0 > 0,$

$$d(\mathbf{U}_0, \underline{\mathbf{U}}) < \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\exists! \mathbf{U} \text{ et } d(\mathbf{U}(t), \underline{\mathbf{U}}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \right) .$$

Du spectral au non linéaire.

Stabilité spectrale

$$\sigma(d\mathbf{F}(\underline{\mathbf{U}})) \subset \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\}.$$

Théorème

La **stabilité spectrale** implique la **stabilité asymptotique**.
Et le retour est exponentiel.

Du spectral au non linéaire.

Stabilité spectrale

$$\sigma(d\mathbf{F}(\underline{\mathbf{U}})) \subset \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\}.$$

Théorème

La **stabilité spectrale** implique la **stabilité asymptotique**.
Et le retour est exponentiel.

Objectif du jour :

- $\mathbf{U} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ solution de

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x, \dots) \text{ et } \mathbf{U}(0, \cdot) = \mathbf{U}_0(\cdot).$$

Systeme quasi-linéaire *parabolique* d'équations aux dérivées partielles.

- $\underline{\mathbf{U}}(\cdot)$ *périodique*.

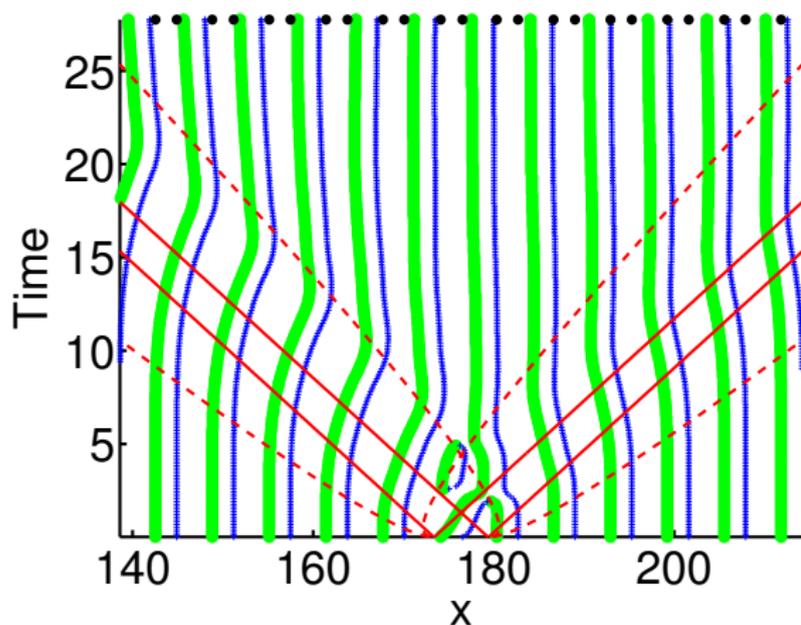
Plan.

- 1 Introduction
- 2 Quelle stabilité ?**
- 3 Quelles hypothèses spectrales ?
- 4 Que résout-on ?
- 5 Conclusion

Simulation directe : diagramme temps-espace.

Autour d'une onde stable de (KdV-KS).
Barker-Johnson-Noble-LMR-Zumbrun.

Crêtes.
Creux.
Théorie.



Modulation en espace des distances.

On s'est choisi un espace \mathcal{H} donc une **norme initiale**.

Requête : autoriser la **resynchronisation**.

Modulation en espace des distances.

On s'est choisi un espace \mathcal{H} donc une **norme initiale**.

Requête : autoriser la **resynchronisation**.

Réponse : il faut mesurer selon

$$\delta_{\mathcal{H}}(u, v) = \inf_{\Psi \text{ bijectif}} \|u \circ \Psi - v\|_{\mathcal{H}} + \|\partial_x(\Psi - \text{Id}_{\mathbf{R}})\|_{\mathcal{H}}.$$

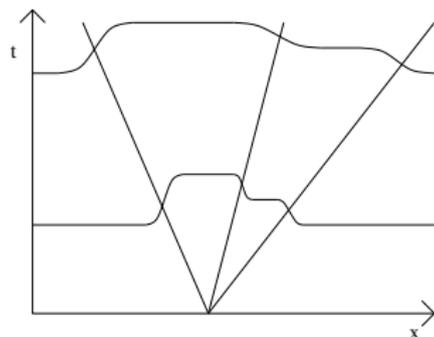
Grossièrement.

U onde de référence.

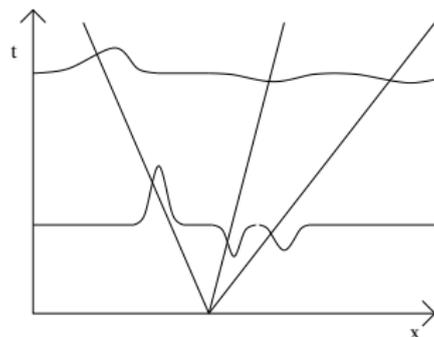
$$\|\mathbf{U}(t, \cdot) - \underline{\mathbf{U}}\|_{L^p(\mathbf{R})} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} c t^{\frac{1}{p}}$$

$$\delta_{L^p(\mathbf{R})}(\mathbf{U}(t, \cdot), \underline{\mathbf{U}}) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} c t^{-\frac{1}{2}(1-1/p)}.$$

$\Psi(t, \cdot) - \text{Id}_{\mathbf{R}}$.



$\partial_x(\Psi(t, \cdot) - \text{Id}_{\mathbf{R}})$.



Topologie de Skorokhod : $\mathcal{H} = L^\infty(\mathbf{R})$

$$\sigma(u, v) = \inf_{\substack{\Psi \text{ homéo} \\ \text{strictement croissant}}} \|u \circ \Psi - v\|_{\mathcal{H}} + \|\Psi - \text{Id}_{\mathbf{R}}\|_{\mathcal{H}}.$$

Stabilité orbitale : mesurée selon

$$\inf_{\substack{\Psi \text{ translation} \\ \text{uniforme}}} \|u \circ \Psi - v\|_{\mathcal{H}}.$$

Lié à la stabilité des solutions unimodales.

Cas modèle : systèmes paraboliques semi-linéaires de lois de conservation.

f lisse.

$t > 0$ temps, $x \in \mathbf{R}$ espace, $\mathbf{U}(x, t) \in \mathbf{R}^d$ inconnu.

$$(E) \quad \mathbf{U}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{U}))_x = \mathbf{U}_{xx}.$$

Cas modèle : systèmes paraboliques semi-linéaires de lois de conservation.

f lisse.

$t > 0$ temps, $x \in \mathbf{R}$ espace, $\mathbf{U}(x, t) \in \mathbf{R}^d$ inconnu.

$$(E) \quad \mathbf{U}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{U}))_x = \mathbf{U}_{xx}.$$

Ondes progressives. $\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}(x - ct)$ se déplaçant à la vitesse c .

Profil $\underline{\mathbf{U}}$ solution stationnaire de

$$\mathbf{U}_t - c \mathbf{U}_x + (\mathbf{f}(\mathbf{U}))_x = \mathbf{U}_{xx}.$$

Théorème

Une onde périodique **diffusivement spectralement stable** est



$$\delta_{L^1(\mathbf{R}) \cap H^K(\mathbf{R})} \quad \text{à} \quad \delta_{H^K(\mathbf{R})}$$

asymptotiquement stable pour $K \geq 3$, avec un retour algébrique en temps ;



$$\delta_{L^1(\mathbf{R}) \cap H^3(\mathbf{R})} \quad \text{à} \quad \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbf{R})}$$

(orbitalement) **stable**.

Quelques références.

De Björn Sandstede, Arnd Scheel, Guido Schneider et Hannes Uecker :

$d = 0$ *Journal of Differential Equations*, vol. 5, no. 252 (2012),
p.3541–3574.

Avec Mathew Johnson, Pascal Noble et Kevin Zumbrun :

$d = 0$ *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, no. 2 (2013),
p. 693-715.

$d = 0$ *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, no. 2 (2013),
p. 669-692.

$d \geq 1$ *Inventiones mathematicae*, 99 p., à paraître.

Et Eckhauss, Collet, Eckmann, Mielke, Gardner, Wayne, Wittwer, Oh,
Serre, Doelman,...

Plan.

- 1 Introduction
- 2 Quelle stabilité ?
- 3 Quelles hypothèses spectrales ?**
- 4 Que résout-on ?
- 5 Conclusion

Transformation intégrale.

Décomposition en ondes de Bloch

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} \check{g}(\xi, x) d\xi,$$

où ξ est un exposant de Floquet

$$\check{g}(\xi, x+1) = \check{g}(\xi, x),$$

$$e^{i\xi(x+1)} \check{g}(\xi, x+1) = e^{i\xi} e^{i\xi x} \check{g}(\xi, x).$$

Transformation intégrale.

Décomposition en ondes de Bloch

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} \check{g}(\xi, x) d\xi,$$

où ξ est un exposant de Floquet

$$\check{g}(\xi, x+1) = \check{g}(\xi, x),$$

$$e^{i\xi(x+1)} \check{g}(\xi, x+1) = e^{i\xi} e^{i\xi x} \check{g}(\xi, x).$$

À partir de la décomposition de Fourier

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Transformée de Floquet-Bloch

$$\check{g}(\xi, x) := \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{i2j\pi x} \hat{g}(\xi + 2j\pi).$$

Symboles de Bloch.

$\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}(\underline{k}(x - \underline{c}t))$, $\underline{\mathbf{U}}$ de période 1.

Générateur

$$L := \underline{k}^2 \partial_x^2 + \underline{k} \underline{c} \partial_x - \underline{k} \partial_x \mathbf{df}(\underline{\mathbf{U}})$$

Symboles de Bloch.

$\mathbf{U}(t, x) = \underline{\mathbf{U}}(\underline{k}(x - \underline{c}t))$, $\underline{\mathbf{U}}$ de période 1.

Générateur

$$L := \underline{k}^2 \partial_x^2 + \underline{k} \underline{c} \partial_x - \underline{k} \partial_x \mathbf{d}\mathbf{f}(\underline{\mathbf{U}})$$

de symboles de Bloch

$$L_\xi := \underline{k}^2 (\partial_x + i\xi)^2 + \underline{k} (\partial_x + i\xi)(\underline{c} - \mathbf{d}\mathbf{f}(\underline{\mathbf{U}})), \quad \xi \in [-\pi, \pi].$$

Diagonalisation de Bloch

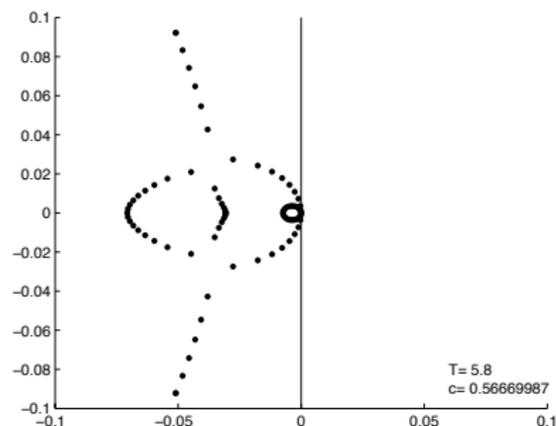
$$(Lg)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} (L_\xi \check{g}(\xi, \cdot))(x) d\xi.$$

Chaque L_ξ agit sur des fonctions de période 1.

Spectre.

Paramétrage spectral

$$\sigma(L) = \bigcup_{\xi \in [-\pi, \pi]} \sigma_{per}(L_{\xi}).$$

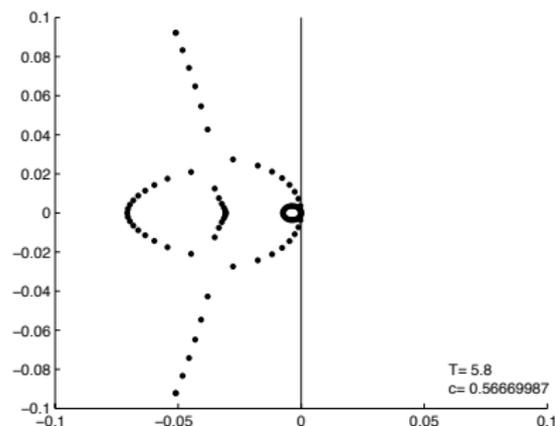


Spectre d'une onde stable
de (SV). Barker *et al.*

Spectre.

Paramétrage spectral

$$\sigma(L) = \bigcup_{\xi \in [-\pi, \pi]} \sigma_{per}(L_\xi).$$



(D1) Spectre critique réduit à $\{0\}$.

$$\sigma(L) \subset \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\} \cup \{0\}.$$

(D2) $\exists \theta > 0, \forall \xi \in [-\pi, \pi],$

$$\sigma_{per}(L_\xi) \subset \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda \leq -\theta|\xi|^2\}.$$

(D3) $\lambda = 0$ de multiplicité $d + 1$ pour L_0 (dimension minimale).

(H) Vitesses de groupe 2 à 2 \neq .

Spectre d'une onde stable
de (SV). Barker *et al.*

Plan.

- 1 Introduction
- 2 Quelle stabilité ?
- 3 Quelles hypothèses spectrales ?
- 4 Que résout-on ?**
- 5 Conclusion

Introduction de la phase.

$$\| \underbrace{\mathbf{U}_0 \circ \Psi_0 - \underline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{v}_0} \|_{L^1 \cap H^K} + \| \partial_x \underbrace{(\Psi_0 - \text{Id}_{\mathbf{R}})}_{-\psi_0} \|_{L^1 \cap H^K} < \varepsilon .$$

(\mathbf{V}, ψ) tel que

$$\mathbf{V}(t, \cdot) = \mathbf{U}(t, \cdot) \circ (\text{Id}_{\mathbf{R}} - \psi(t, \cdot)) - \underline{\mathbf{U}}.$$

Introduction de la phase.

$$\| \underbrace{\mathbf{U}_0 \circ \Psi_0 - \underline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{v}_0} \|_{L^1 \cap H^K} + \| \partial_x \underbrace{(\Psi_0 - \text{Id}_{\mathbf{R}})}_{-\psi_0} \|_{L^1 \cap H^K} < \varepsilon .$$

(\mathbf{V}, ψ) tel que

$$\mathbf{V}(t, \cdot) = \mathbf{U}(t, \cdot) \circ (\text{Id}_{\mathbf{R}} - \psi(t, \cdot)) - \underline{\mathbf{U}} .$$

Équation

$$(\partial_t - L) (\mathbf{V}(t) + \underline{\mathbf{U}}_x \psi(t)) = \mathcal{N}(t) ,$$

où $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}[\mathbf{V}(t), \psi_t(t), \psi_x(t)]$.

Introduction de la phase.

$$\| \underbrace{\mathbf{U}_0 \circ \Psi_0 - \underline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{v}_0} \|_{L^1 \cap H^K} + \| \partial_x \underbrace{(\Psi_0 - \text{Id}_{\mathbf{R}})}_{-\psi_0} \|_{L^1 \cap H^K} < \varepsilon.$$

(\mathbf{V}, ψ) tel que

$$\mathbf{V}(t, \cdot) = \mathbf{U}(t, \cdot) \circ (\text{Id}_{\mathbf{R}} - \psi(t, \cdot)) - \underline{\mathbf{U}}.$$

Équation

$$(\partial_t - L) (\mathbf{V}(t) + \underline{\mathbf{U}}_x \psi(t)) = \mathcal{N}(t),$$

où $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}[\mathbf{V}(t), \psi_t(t), \psi_x(t)]$.

Forme intégrale

$$\mathbf{V}(t) + \underline{\mathbf{U}}_x \psi(t) = S(t) (\mathbf{V}(0) + \underline{\mathbf{U}}_x h_0) + \int_0^t S(t-s) \mathcal{N}(s) ds.$$

avec $S(t) := e^{tL}$.

Évolution critique.

On développe

$$\frac{1}{ik\xi} \sum_{j=1}^{d+1} e^{\lambda_j(\xi)t} |\phi_j(\xi, \cdot)\rangle \langle \tilde{\phi}_j(\xi, \cdot)|$$

avec

$$\phi_j(\xi) = \underline{\mathbf{u}}_x \mathbf{e}_{d+1} \cdot \beta^{(j)}(\xi) + \mathcal{O}(\xi)$$

Évolution critique.

On développe

$$\frac{1}{ik\xi} \sum_{j=1}^{d+1} e^{\lambda_j(\xi)t} |\phi_j(\xi, \cdot)\rangle \langle \tilde{\phi}_j(\xi, \cdot)|$$

avec

$$\phi_j(\xi) = \underline{\mathbf{u}}_x e_{d+1} \cdot \beta^{(j)}(\xi) + \mathcal{O}(\xi)$$

vers

$$|\underline{\mathbf{u}}_x\rangle e_{d+1} \cdot \sum_{j=1}^{d+1} \left\langle \frac{1}{ik\xi} e^{\lambda_j(\xi)t} \beta^{(j)}(\xi) \tilde{\phi}_j(\xi, \cdot) \right| + \mathcal{O}(e^{-\theta'|\xi|^2 t}).$$

Séparation

$$S(t) = \underline{\mathbf{u}}_x e_{d+1} \cdot s^p(t) + \tilde{S}(t)$$

$$\text{où } s^p(t) = \sum_{j=1}^{d+1} s_j^p(t).$$

Isolement de la phase.

$$\psi(t) = e_{d+1} \cdot s^p(t) (\mathbf{v}_0 + \underline{\mathbf{u}}_x \psi_0) + \int_0^t e_{d+1} \cdot s^p(t-s) \mathcal{N}(s) ds$$

$$\mathbf{v}(t) = \tilde{S}(t) (\mathbf{v}_0 + \underline{\mathbf{u}}_x \psi_0) + \int_0^t \tilde{S}(t-s) \mathcal{N}(s) ds$$

Isolement de la phase.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e_{d+1} \cdot s^p(t) (\mathbf{V}_0 + \underline{\mathbf{U}}_x \psi_0) + \int_0^t e_{d+1} \cdot s^p(t-s) \mathcal{N}(s) ds \\ - \chi(t) &\left[e_{d+1} \cdot s^p(t) (\mathbf{V}_0 + \underline{\mathbf{U}}_x \psi_0) - \psi_0 + \int_0^t e_{d+1} \cdot s^p(t-s) \mathcal{N}(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \tilde{S}(t) (\mathbf{V}_0 + \underline{\mathbf{U}}_x \psi_0) + \int_0^t \tilde{S}(t-s) \mathcal{N}(s) ds \\ + \chi(t) \underline{\mathbf{U}}_x &\left[e_{d+1} \cdot s^p(t) (\mathbf{V}_0 + \underline{\mathbf{U}}_x \psi_0) - \psi_0 + \int_0^t e_{d+1} \cdot s^p(t-s) \mathcal{N}(s) ds \right] \end{aligned}$$

avec χ troncature en temps grand.

Isolement de la phase.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e_{d+1} \cdot s^p(t) (\mathbf{V}_0 + \underline{\mathbf{U}}_x \psi_0) + \int_0^t e_{d+1} \cdot s^p(t-s) \mathcal{N}(s) ds \\ - \chi(t) &\left[e_{d+1} \cdot s^p(t) (\mathbf{V}_0 + \underline{\mathbf{U}}_x \psi_0) - \psi_0 + \int_0^t e_{d+1} \cdot s^p(t-s) \mathcal{N}(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \tilde{S}(t) (\mathbf{V}_0 + \underline{\mathbf{U}}_x \psi_0) + \int_0^t \tilde{S}(t-s) \mathcal{N}(s) ds \\ + \chi(t) \underline{\mathbf{U}}_x &\left[e_{d+1} \cdot s^p(t) (\mathbf{V}_0 + \underline{\mathbf{U}}_x \psi_0) - \psi_0 + \int_0^t e_{d+1} \cdot s^p(t-s) \mathcal{N}(s) ds \right] \end{aligned}$$

avec χ troncature en temps grand.

Quelles estimations ?

1 Analyse de Bloch.

Inégalités d'Hausdorff-Young

$$\|g\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq (2\pi)^{1/p} \|\check{g}\|_{L^{p'}([- \pi, \pi], L^p([0,1]))}, \quad 2 \leq p \leq \infty.$$

Une estimation

$\psi_0(-\infty) = -\psi_0(\infty)$. Pour $t \geq 0$, $2 \leq p \leq \infty$, quand $l + m \geq 1$,

$$\left\| \partial_x^l \partial_t^m S_j^p(t)(\psi_0 \underline{\mathbf{u}}_x) \right\|_{L^p(\mathbf{R})} \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2}(1-1/p) + \frac{1}{2} - \frac{l+m}{2}} \|\partial_x \psi_0\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

2 Estimations d'énergie et estimations de résolvantes dans un cadre Hilbertien.

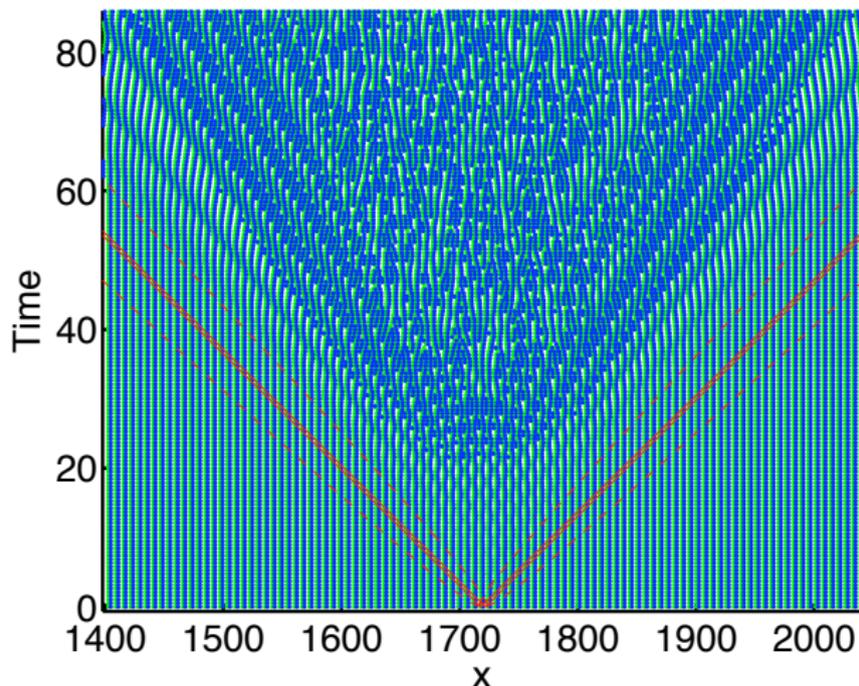
Plan.

- 1 Introduction
- 2 Quelle stabilité ?
- 3 Quelles hypothèses spectrales ?
- 4 Que résout-on ?
- 5 Conclusion**

Questions ouvertes.

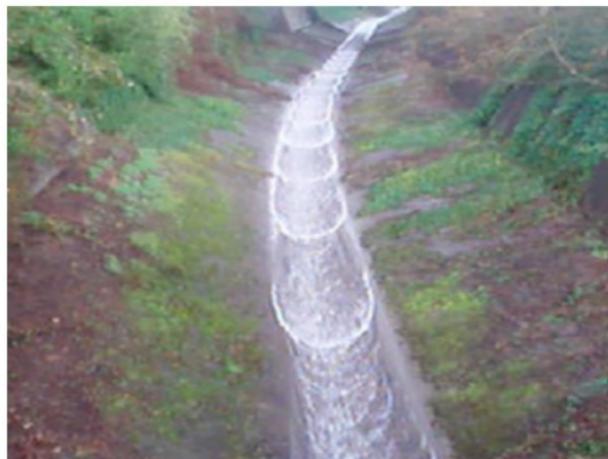
- Vérification des **hypothèses** : au cas par cas.
- **Instabilité** modulationnelle en espace.
- Ondes **multi-périodiques**.
- Autres types : **dispersif Hamiltonien** ?

Bonus 1 : instabilité diffusive.



Défaut de stabilité dissipative dans (KdV-KS).
Barker-Johnson-Noble-LMR-Zumbrun.

Bonus 2 : rouleaux en eaux peu profondes.



Canal d'évacuation.

Système de **Saint-Venant** (SV)

$$h_t + (hu)_x = 0,$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{h^2}{2F^2} \right)_x = h - |u|u + (h u_x)_x.$$

$F > 2$, instabilité primaire.