

**Concours externe de l'agrégation du second degré**

**Section mathématiques**

**Programme de la session 2015**

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés  $\mathbf{K}$  en général) sont supposés commutatifs.

## 1 Algèbre linéaire

### 1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ , groupe linéaire  $GL(E)$ .
2. Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
3. Représentations linéaires d'un groupe et d'une algèbre. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

### 1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec  $\mathbf{K}^n$ . Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire  $SL(E)$ . Orientation d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.  
Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.  
Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.
4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton.  
Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

## 2 Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des

classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.

2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes  $n$ -ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Représentations d'un groupe fini sur un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.  
Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide.  
Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

### 3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau  $\mathbf{Z}$  des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.  
Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
3. Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
4. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels. Le corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels. Le corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.
5. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.  
Factorialité de  $A[X]$  quand  $A$  est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau  $\mathbf{Z}$  et de l'algèbre  $\mathbf{K}[X]$  des polynômes sur le corps  $\mathbf{K}$ . Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans  $\mathbf{Q}[X]$ , critère d'Eisenstein.
6. Congruences dans  $\mathbf{Z}$ . Nombres premiers. Étude de l'anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications.
7. Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
8. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
9. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.

## 4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans  $GL(n, \mathbf{R})$ . Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte ; produit vectoriel.
5. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
6. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans  $GL(n, \mathbf{C})$ .

## 5 Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.  
Projection sur un convexe fermé.
2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.
3. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. En dimension 2 : classification des isométries, similitudes directes et indirectes. En dimension 3 : rotations.
4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
5. Coniques et quadriques  
Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3. Classification des coniques.  
Intersection de quadriques et résultant.  
Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

## 6 Analyse à une variable réelle

1. Nombres réels  
Le corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels. Topologie de  $\mathbf{R}$ . Sous-groupes additifs de  $\mathbf{R}$ . Droite numérique achevée. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites

de Cauchy. Complétude de  $\mathbf{R}$ . Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de  $\mathbf{R}$ . Parties connexes de  $\mathbf{R}$ .

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

## 2. Fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles

### (a) Continuité

Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.

Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

### (b) Dérivabilité

Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

## 3. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives

Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.

## 4. Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

## 5. Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

## 6. Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

## 7. Convexité

Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.

## 8. Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ . Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.

## 9. Polynôme d'interpolation de Lagrange.

## 10. Méthodes d'approximation

Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.

## 11. Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$ : dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton. Estimation de l'erreur pour la méthode de Newton.

## 12. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de Simpson ; estimation de l'erreur.

## 7 Analyse à une variable complexe

### 1. Séries entières

Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.

Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.

Développement en série entière des fonctions usuelles.

### 2. Fonctions d'une variable complexe

Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.

Indice d'un chemin fermé  $\mathcal{C}^1$  par morceaux par rapport à un point.

Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

Suites et séries de fonctions holomorphes.

## 8 Calcul différentiel

### 1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de  $\mathbf{R}^n$ .

### 2. Fonctions différentiables

Applications différentiables sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Matrice jacobienne. Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ . Dérivées partielles d'ordre  $k$ . Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young.

Étude locale des applications à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . Développements limités. Recherche des extremums locaux.

Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

### 3. Équations différentielles

Équations différentielles sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , de la forme  $X' = f(t, X)$ . Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

Portrait de phase, comportement qualitatif.

Systèmes différentiels linéaires.

Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

## 9 Calcul intégral

### 1. Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction

admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.

## 2. Intégration

Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces  $L^p$ , où  $1 \leq p \leq \infty$  : inégalités de Minkowski, Hölder et Jensen. Théorème de Fubini.

Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

## 3. Analyse de Fourier

Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet et de Fejer. Théorie  $L^2$  : convergence en moyenne quadratique, formule de Parseval.

# 10 Probabilités

1. Définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli.
2. Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de Bayes.
3. Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire : loi discrète et loi absolument continue. Fonction de répartition et densité.
4. Exemples de variables aléatoires : variable de Bernoulli, binomiale, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.
5. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert.
6. Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.
7. Transformations exponentielles de lois : fonction caractéristique, transformée de Laplace, fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.
8. Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans  $L^p$ , presque sûrement, en loi.
9. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres, applications en statistiques.
10. Théorème de Lévy, théorème central limite, applications en statistiques.

# 11 Analyse fonctionnelle

## 1. Topologie et espaces métriques

Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.

Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

Produit fini d'espaces métriques.

Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.

Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

## 2. Espaces vectoriels normés sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ .

Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

Applications linéaires continues, norme.

Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace Banach.

Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz ; théorème d'Ascoli.

Complétude des espaces  $L^p$ , où  $1 \leq p < \infty$ .

## 3. Espaces de Hilbert

Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

Dual d'un espace de Hilbert.

Cas des espaces  $L^2$ .

Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.

Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de Hilbert.

Théorème de Lax Milgram. Espace  $H_0^1(]0, 1[)$  et application au problème de Dirichlet en dimension 1 :  $u - \frac{d}{dx}(a \frac{d}{dx} u) = f$  avec  $f \in L^2(]0, 1[)$ ,  $a \in L^\infty(]0, 1[)$  essentiellement positive et minorée par  $m > 0$ .

## 4. Espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur $\mathbf{R}^d$ .

Normes  $N_p(f)$  (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à  $p$  de  $f$  par les monômes de degré inférieur à  $p$ ).

Espace  $S'(\mathbf{R}^d)$  des distributions tempérées.

Dérivation des distributions tempérées.

Cas particulier des distributions à support compact dans  $\mathbf{R}^d$ . Solution fondamentale du Laplacien.

Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact.

Transformation de Fourier dans  $S$  et dans  $S'$ .

Transformation de Fourier sur les espaces  $L^1(\mathbf{R}^d)$  et  $L^2(\mathbf{R}^d)$ .

# 12 Géométrie différentielle

Sous-variétés de  $\mathbf{R}^n$ . Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.

Tracé de courbes usuelles.

Surfaces dans  $\mathbf{R}^3$  : position par rapport au plan tangent.

Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.

Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multiplicateurs de Lagrange.



## ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

### **A. Composition de mathématiques générales**

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

### **B. Composition d'analyse et probabilités**

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

## ÉPREUVES ORALES

Les candidats ont le choix entre quatre options :

**Option A : probabilité et statistiques**

**Option B : calcul scientifique**

**Option C : algèbre et calcul formel**

**Option D : informatique**

## Épreuves orales des options A, B, C

**1<sup>re</sup> Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie**

**2<sup>e</sup> Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités**

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres 1 à 12 et du programme complémentaire ci-dessous.

### **Programme complémentaire pour les épreuves orales options, A, B, C et D**

- Résolution de systèmes d'équations linéaires ; Normes subordonnées, notion de conditionnement, rayon spectral, décomposition  $LU$ , méthode de Jacobi. Exemple d'opérateurs aux différences finies. Lien avec l'optimisation de fonctionnelles convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs, moindres carrés. Recherche d'éléments propres : méthode de la puissance, décomposition en valeurs singulières, théorème de Gershgorin-Hadamard.
- Méthode numérique pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de Newton : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
- Intégration numérique : méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson ; estimation de l'erreur.
- Équations différentielles ordinaires. Stabilité des points critiques. Aspects numériques du problème de Cauchy : méthodes d'Euler explicite et implicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

**3<sup>e</sup> Épreuve : Épreuve de Modélisation**

L'épreuve porte sur le programme constitué des titres 1 à 12, du programme complémentaire ci-dessus, d'un programme commun aux options A, B et C (explicité ci-dessous) et sur un programme spécifique à l'option choisie.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. Ce programme comporte une partie commune aux options A, B et C et, pour chacune de ces options, une partie spécifique.

## Modélisation : programme de la partie commune aux options A, B, C

À partir de la session 2015, seuls les logiciels libres seront disponibles. Le site de l'agrégation externe de mathématiques (agreg.org) et le rapport du Jury préciseront suffisamment à l'avance la liste des logiciels disponibles et la nature de leur environnement.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

- mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
- estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision
- analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites, dans le programme complémentaire pour l'oral et celles citées dans les paragraphes suivants.

### 1. Calcul numérique et symbolique

Utilisation des logiciels au programme : simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.

### 2. Probabilités discrètes : tirages uniformes ; échantillons.

### 3. Chaînes de Markov homogènes à espace d'états finis : définition, irréductibilité, apériodicité.

### 4. Validation et précision des résultats.

Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires.

Précision du schéma numérique d'Euler explicite à pas constant.

Moyenne et variance empirique.

Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calcul de volumes).

### 5. Moindres carrés linéaires (sans contraintes).

## Programme spécifique de l'option A

### 1. Utilisation de lois usuelles (voir section 10.4, loi géométrique) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages... Méthodes de simulation de variables aléatoires.

### 2. Chaînes de Markov à espace d'états finis. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème central limite admis).

Chaînes de Markov homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.

### 3. Lois de Poisson, exponentielle et Gamma, construction et propriétés du processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ .

### 4. Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence presque sûre et $L^2$ des martingales à temps discret.

### 5. Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques.

### 6. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance.

### 7. Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition et exemples.

### 8. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de Cochran. Théorème central limite dans $\mathbb{R}^n$ .

9. Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire simple ou multiple, exemples d'utilisation.
10. Tests paramétriques (test du rapport de vraisemblance). Tests d'ajustement (tests du  $\chi^2$ , tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.

### Programme spécifique de l'option B.

1. Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques. Aspects numériques du problème de Cauchy : mise en œuvre des méthodes d'Euler, utilisation de la méthode de Runge-Kutta 4.
2. Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.  
Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.  
Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de Fourier et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.  
Équations elliptiques.  
Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.
3. Optimisation et approximation  
Interpolation de Lagrange.  
Extremums des fonctions réelles de  $n$  variables réelles : multiplicateurs de Lagrange. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant.  
Méthode des moindres carrés et applications.

### Programme spécifique de l'option C.

1. Représentation et manipulation des entiers longs, flottants multiprécision, nombres complexes, polynômes, éléments de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et des corps finis. Addition, multiplication, division, extraction de racine carrée.
2. Algorithmes algébriques élémentaires.  
Exponentiation ( $n \mapsto a^n$ , pour  $n \in \mathbf{N}$ ), algorithme d'Euclide étendu.  
Test de primalité de Fermat.
3. Matrices à coefficients dans un corps.  
Méthode du pivot de Gauss, décomposition LU. Calcul du rang, du déterminant.  
Exemples de codes correcteurs linéaires : codes de répétition, codes de Hamming binaires.
4. Matrices à coefficients entiers.  
Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Application aux systèmes linéaires sur  $\mathbf{Z}$  et aux groupes abéliens de type fini.
5. Polynômes à une indéterminée.  
Évaluation (schéma de Horner), interpolation (Lagrange, différences finies).  
Localisation des racines dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  : majoration en fonction des coefficients.
6. Polynômes à plusieurs indéterminées.  
Résultants, élimination ; intersection ensembliste de courbes et de surfaces algébriques usuelles.
7. Estimation de la complexité des algorithmes précités dans le pire des cas. Aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.

## Épreuves de l'option D : informatique

### 1<sup>re</sup> Épreuve : Mathématiques

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 12 et du programme complémentaire de l'oral. Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.

### 2<sup>e</sup> Épreuve : Informatique Fondamentale

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 13 à 16 ci-après.

### 3<sup>e</sup> Épreuve : Analyse de système informatique

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 13 à 16 ci-après.

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat qui doit choisir l'un des deux. La compréhension de ces textes et leur exploitation dans cette épreuve requièrent les connaissances en informatique correspondant aux matières enseignées en L1-L2 de Maths-Info ou dans l'option informatique des classes préparatoires auxquelles s'ajoutent celles du programme.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la capacité des candidats à mettre en place un processus d'analyse d'un système informatique dans un contexte applicatif. Ce processus s'appuie sur les notions au programme.

Les langages informatiques C, Caml, Python et Java seront disponibles pour cette épreuve et sa préparation. Le rapport du Jury précisera la nature de l'environnement logiciel.

## Programme spécifique de l'option D.

L'ensemble du programme correspond à 250h de formation (cours et/ou TD et/ou TP ) de niveau Licence et première année de Master, à partir des acquis des deux premières années de Licence ou de l'option informatique des classes préparatoires. L'objectif de cette option est de s'assurer que les candidats maîtrisent les fondements essentiels et structurants de la science informatique.

Le programme n'est pas rédigé comme un plan de cours, il décrit les notions que les candidats doivent maîtriser.

Le programme n'impose aucun langage de programmation particulier. Les candidats doivent maîtriser au moins un langage et son environnement de programmation parmi CAML, Java ou C.

## 13 Algorithmique fondamentale

Cette partie insiste sur les notions de preuve et de complexité des algorithmes. Elle est relativement indépendante de tout langage de programmation, mais le candidat doit être capable de mettre en oeuvre sur machine les structures de données et les algorithmes étudiés.

1. Structures de données. Types abstraits : définition des tableaux, listes, piles, files, arbres, graphes (orientés et non orientés), ensembles, dictionnaires, file de priorité. Interface abstraite et implémentation (implémentation) concrète.
2. Schémas algorithmiques classiques : approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique. Exemples : algorithme de Dijkstra, tri-fusion, plus longue sous-séquence commune.
3. Complexité. Analyse des algorithmes : relations de comparaison  $O$ ,  $\Theta$  et  $\Omega$ . Analyse dans le pire cas. Exemple d'analyse en moyenne : recherche d'un élément dans un tableau.
4. Preuve d'algorithmes : correction, terminaison. Méthodes de base : assertions, pré-post conditions, invariants et variants de boucles, logique de Hoare, induction structurelle.
5. Algorithmes de tri et de recherche. Méthodes de tri par comparaison (tri-fusion, tri-tas, tri rapide), arbre de décision et borne inférieure du tri par comparaisons. Méthodes de recherche séquentielle et

dichotomique. Arbres binaires de recherche. Arbres équilibrés : définition, relation entre la taille et la hauteur, maintien de l'équilibre.

6. Algorithmes de graphes. Parcours de graphes : algorithmes de parcours en largeur, en profondeur, algorithme de Dijkstra. Arbres couvrants : algorithmes de Prim et de Kruskal. Fermeture transitive.

## 14 Automates et langages

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de Kleene.
3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'Ogden. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

## 15 Calculabilité, décidabilité et complexité

1. Définition des fonctions primitives récursives ; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives ; fonction d'Ackerman.
2. Définitions des machines de Turing. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet). Équivalence avec les fonctions récursives.
3. Universalité, décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de Rice. Réduction de Turing. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.
4. Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de Turing non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de Cook.

## 16 Logique et démonstration

1. Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies, formes normales, forme clausale. Théorème de complétude du calcul propositionnel.
2. Logique du premier ordre : aspects syntaxiques. Langages, termes, formules. Variables libres et variables liées, substitutions, capture de variables.
3. Réécriture : filtrage syntaxique du premier ordre, définition de l'unification syntaxique. Confluence, confluence locale, formes normales, paires critiques, lemme de Newman, algorithme de complétion de Knuth-Bendix.
4. Logique du premier ordre : systèmes formels de preuve. Calcul des séquents, déduction naturelle. Algorithme d'unification des termes. Preuves par résolution.
5. Logique du premier ordre : aspects sémantiques. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité, satisfiabilité. Théories cohérentes, théories complètes. Théories décidables, indécidables. Exemples de théories : égalité, arithmétique de Peano. Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.