

Table des matières

I. Actions et théorèmes du rang	
1. Théorème du rang	2
2. Action de $GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence . . .	3
3. Stabilisateur, quotient et orbite	5
4. Topologie des orbites (\mathbb{K} corps des réels ou des complexes) . . .	9
A. Annexe. Actions de groupes	11
B. Développement. Algorithme de Gauss	18
C. Exercices	21
II. Groupes topologiques, actions continues	
1. Groupes topologiques	26
2. Topologie et algèbre linéaire	28
3. Action continue, théorème d'homéomorphisme	31
4. Applications du théorème d'homéomorphisme	37
5. Produits semi-directs topologiques	43
A. Annexe. Normes sur les espaces de matrices	51
B. Annexe. Connexité	53
C. Annexe. Compacité locale	55
D. Annexe. Topologie sur un espace quotient	58
E. Développement. Actions classiques et leurs invariants	62
F. Exercices	65
III. Réduction des endomorphismes	
1. Action $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison	84
2. Action $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison	87
3. Action $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison	98
4. Passage de \mathbb{C} à \mathbb{R}	100
5. Invariants de similitude sur un corps quelconque	101
6. Invariants de similitude et diagrammes de Young	108
A. Annexe. Lemme des noyaux et décomposition de Dunford	110
B. Annexe. Partitions	113
C. Développement. Partitions de 6	118
D. Exercices	120

IV. Matrices échelonnées et grassmanniennes	
1. Motivation	128
2. Matrices échelonnées en lignes	130
3. Décomposition en cellules des grassmanniennes	135
A. Annexe. Opérations élémentaires sur les rangées	143
B. Exercices	144
V. Groupes conservant une forme bilinéaire	
1. Classification des formes quadratiques	149
2. Le cas hermitien	156
3. Les groupes orthogonaux et leurs actions	157
4. Formes bilinéaires antisymétriques	160
5. Lien avec la réduction	162
6. Classification des coniques	164
A. Annexe. Généralités sur les formes bilinéaires	170
B. Annexe. Théorie classique des formes quadratiques	175
C. Développement. Réciprocité quadratique	182
D. Exercices	187
VI. Décomposition polaire et applications	
1. Théorème de décomposition polaire	201
2. L'exponentielle	207
A. Décomposition polaire pour $O(p, q)$	210
B. Exercices	216
VII. Le corps des quaternions	
1. Le corps des quaternions	224
2. Interlude: l'ours mal peigné	230
3. Applications à $SO(3)$	232
4. Applications à $SO(4)$	234
5. Aparté sur la simplicité	235
A. Annexe. Engendrement de $O(n)$ et $SO(n)$, simplicité de $SO(3)$	237
B. Développement. Fibration de Hopf	240
C. Exercices	242
VIII. Combinatoire algébrique	
1. Dénombrement sur les corps finis	250
2. Décomposition en cellules et dénombrement	255
3. Applications aux isomorphismes exceptionnels de groupes finis	256
4. Développement. Un non-isomorphisme exceptionnel	262
A. Exercices	263

IX. Groupes de Lie	
1. Groupes de Lie classiques	268
2. Applications aux isomorphismes exceptionnels	272
A. Annexe. Rappels et compléments en calcul différentiel	275
B. Notion d'algèbre de Lie	283
C. Exercices	286
X. Droite projective et applications	
1. Droite projective sur un corps quelconque	292
2. Birapport dans un plan projectif réel	303
3. La sphère de Riemann	309
4. Birapport et configurations finies	315
A. Complément mnémotechnique sur la formule des six birapports	315
B. Géométrie projective dans une coquille de noix	318
C. Exercices	320
XI. Trois problèmes de géométrie	
1. L'ellipse de Steiner	330
2. Le théorème de Desargues	333
3. L'alternative de Steiner	339
A. Exercices	353
XII. Solides platoniciens et sous-groupes finis de $\text{SO}(3, \mathbb{R})$	
1. Présentation	357
2. Approche topologique	359
3. Groupes d'isométries	360
4. La <i>toy</i> dualité	368
A. Annexe. Dualité des ensembles compacts convexes de \mathbb{R}^n	370
B. Sous-groupes de Sylow d'un groupe d'isométries	372
C. Exercices	373
Bibliographie	377
Index	381