

# Table des matières

<b>I. Grassmanniennes et matrices échelonnées</b>	
1. Compléments sur le déterminant . . . . .	2
2. Plongement de Plücker de la grassmannienne . . . . .	7
3. Décomposition de Bruhat . . . . .	20
4. Caractérisation algébrique des cellules de Schubert . . . . .	31
5. BN-paire et algèbre de Hecke . . . . .	35
A. Ordre de Bruhat . . . . .	45
B. Présentation de Coxeter du groupe symétrique . . . . .	55
C. Exercices . . . . .	61
<b>II. Réduction des endomorphismes</b>	
1. Semi-simplicité . . . . .	78
2. Commutant . . . . .	82
3. Désingularisation de Springer du cône nilpotent . . . . .	88
A. Plaidoyer pour les modules . . . . .	92
B. Exercices . . . . .	102
<b>III. Problèmes d'algèbre linéaire</b>	
1. Problèmes des $N$ sous-espaces . . . . .	113
2. Le théorème de Jordan-Kronecker . . . . .	124
3. Problèmes de type sauvage . . . . .	132
4. Carquois : introduction . . . . .	134
5. Suites exactes et extensions . . . . .	139
6. Espace des représentations . . . . .	142
7. Lemme de Ringel et théorème de Gabriel . . . . .	150
8. Retour au problème des $N$ sous-espaces... et au-delà . . . . .	157
A. Algèbre de chemins et représentations . . . . .	165
B. Diagrammes de Dynkin finis et affines . . . . .	176
C. Théorème du rang constant . . . . .	180
D. Polynômes et topologie . . . . .	183
E. Exercices . . . . .	186

**IV. Combinatoire algébrique**

1. Formule du binôme quantique . . . . .	195
2. Ordre des groupes orthogonaux sur un corps fini . . . . .	201
3. Sous-espaces isotropes . . . . .	206
4. Cardinal du cône nilpotent sur un corps fini . . . . .	213
A. Exercices . . . . .	216

**V. Graphes et configurations**

1. Configurations : exemples et définition . . . . .	228
2. Configurations et conique nilpotente . . . . .	232
3. Cas particulier : configuration de Desargues . . . . .	241
4. Chaînes de Clifford . . . . .	245
5. Coloriages . . . . .	250
A. Tangentes à une conique . . . . .	269
B. Conjugaison sur un corps fini . . . . .	272
C. Petits arbres ternaires . . . . .	282
D. Exercices . . . . .	283

**VI. *Encores* sur les groupes de Lie classiques et isomorphismes exceptionnels**

1. Études du groupe symplectique . . . . .	292
2. Correspondances de Klein . . . . .	303
3. Grassmanniennes de signature donnée . . . . .	312
A. Faisceaux et sous-groupes à un paramètre . . . . .	326
B. Exercices . . . . .	327

**VII. Droite projective et birapport**

1. Birapport et théorie de Galois . . . . .	335
2. Plan hyperbolique . . . . .	344
3. Un arbre pour les triplets pythagoriciens . . . . .	360
4. Birapport et configurations finies . . . . .	368
A. Trajectoires orthogonales . . . . .	375
B. Exercices . . . . .	376

**VIII. *Encores* sur les coniques**

1. Structure de groupe sur une conique . . . . .	383
2. Coniques et théorie des invariants . . . . .	394
A. Polynômes sur, polynômes en... . . . .	403
B. Exercices . . . . .	406

<b>IX. Sous-groupes finis de <math>SO(3)</math> et solides platoniciens</b>	
1. Rappels . . . . .	410
2. Sous-groupes finis de $SO(3)$ : signature . . . . .	414
3. Existence et unicité des sous-groupes de signature donnée . . . . .	418
A. Exercices . . . . .	427
<b>X. Sous-groupes finis de <math>SO_3(\mathbb{R})</math> et théorie des représentations</b>	
1. Tétraèdre régulier et cube . . . . .	430
2. L'icosaèdre et son groupe de symétrie . . . . .	433
A. Représentations et caractères . . . . .	443
B. Caractères . . . . .	453
C. « La somme des carrés » . . . . .	465
D. Algèbre de groupe . . . . .	472
E. Représentations sur un sous-corps . . . . .	475
F. Exercices . . . . .	483
<b>XI. Correspondance de McKay : caractères des sous-groupes finis de <math>SU_2(\mathbb{C})</math></b>	
1. Relèvement de $SO_3(\mathbb{R})$ à $SU_2(\mathbb{C})$ . . . . .	508
2. Graphe de McKay . . . . .	512
3. Groupes cycliques . . . . .	514
4. Groupes binaires diédraux . . . . .	515
5. Groupe binaire tétraédral . . . . .	520
6. Groupe binaire octaédral . . . . .	522
7. Groupe binaire icosaédral . . . . .	525
8. Versant géométrique de la correspondance . . . . .	529
9. Une ubiquité remarquable . . . . .	533
10. Apologie de John McKay . . . . .	537
A. Produits tensoriels . . . . .	540
B. Éclatements . . . . .	543
C. Exercices . . . . .	547
<b>XII. Épilogue : réalisation projective de <math>\mathfrak{A}_6</math> et autres isomorphismes exceptionnels</b>	
1. Méthode naturelle . . . . .	560
2. Méthode géométrique . . . . .	562
3. La lettre de Galois . . . . .	564
<b>Bibliographie</b>	<b>571</b>
<b>Index</b>	<b>579</b>