# Graphes & Configurations

Marie Péronnier

# Sommaire

## Configuration

OBJET

- Ensemble fini $P$ de points ;
- Ensemble fini $L$ de lignes ;
- Relation d'appartenance : « $p \in l$ » ; $\quad p \in P, l \in L$.

AXIOMES

Type de la configuration : $(n_\alpha, l_\gamma)$,
où :

$n = |P|$ ;

$l = |L|$ ;

$\alpha =$nombre de lignes passant par chaque point ;

$\gamma =$ nombre de points par ligne.

**Remarque :** condition nécessaire à l'existence d'une configuration : $n\alpha = l\gamma$.

## Isomorphisme de configurations

Bijection entre deux configurations données telle que :

- un point est envoyé sur un point ;
- préservation de l'alignement.

## Groupe de la configuration $C$

C'est le sous-groupe de permutations des $n$ points de la configuration qui préserve l'alignement. On l'appelle aussi *groupe d'automorphismes de la configuration*, et on le notera $\mathrm{Aut}(C)$ : c'est le groupe des isomorphismes de $C$ dans lui-même.
Plus visuellement :

$$\mathrm{Aut}(C) = \{g \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(L); \;\; gC \subset C\}$$

où : $S$ est l'ensemble des sommets de $C$ ; et $L$ l'ensemble des lignes de $C$.

## Dualité

Soit $C$ une configuration. On définit son dual, $C^*$, par :

- points de $C^*$ = lignes de $C$ ;
- lignes de $C^*$ = points de $C$ ;
- dans $C^*$ : $l \in p$ si $p \in l$ dans $C$.

## Autodualité

Une configuration $C$ est *autoduale* si :
il existe $\Phi : C \xrightarrow{\sim} C^*$ isomorphisme.
On a donc :

- Un point est envoyé sur un point par $\Phi$ ;
- $\Phi$ respecte l'alignement.

# Motivations

On va réaliser la configuration, donc son groupe d'automorphismes, dans des géométries différentes, ce qui se traduira par un isomorphisme exceptionnel entre deux groupes dans la classification des groupes finis.

# Sommaire

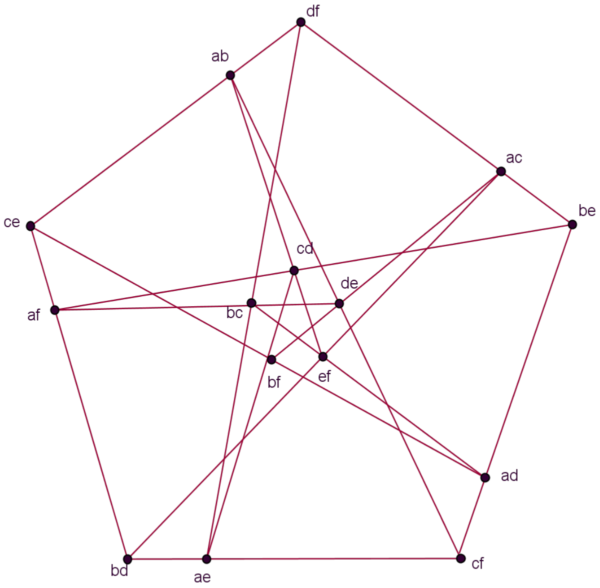
# Une première construction : approche combinatoire

## Première construction

Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$.

- Points : paires de $E$ *($\{a,b\}$)*
- Lignes : partitions de $E$ en trois paires
  *(Deux points sont alignés si l'intersection des deux paires est vide. Les lignes sont donc de la forme : $\{\{a, b\}; \{c, d\}; \{e, f\}\}$.)*
- Condition d'appartenance

# Un beau dessin...



## Proposition

Le type de cette configuration est $(15_3, 15_3)$.

- $\alpha = 3 = \gamma$ :
  $\{a, b\} \in \{\{a, b\}; \{c, d\}; \{e, f\}\}$,
  $\{\{a, b\}; \{c, e\}; \{d, f\}\}$,$\{\{a, b\}; \{c, f\}; \{d, e\}\}$.
- $n = 15 = l$ :

$$n : \quad \binom{6}{2} = 15$$

$$l : \quad \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 2 \times 3} = 15$$

$\Longrightarrow$ Coïncidence numérique : good stuff !

**Proposition***

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_{CR}) \simeq \mathfrak{S}_6.$$

## Preuve

- L'action naturelle de $\mathfrak{S}_6$ sur $\{1; \ldots; 6\}$ induit une action sur les paires, et donc :
  $\mathfrak{S}_6$ agit naturellement sur $\mathfrak{C}_{CR}$ ;
- $\mathfrak{S}_6 \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{C}_{CR})$ : action fidèle ;
- Argument de cardinalité.

$\diamond$

# Une deuxième construction : approche symplectique

*Groupe symplectique*

## Groupe symplectique

Soit $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q) = \{P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}_q);\ PJ_n{}^tP = J_n\}$$

*Formes alternées :*

Soit $\omega$ forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{F}_q^{2n}$.

$\mathrm{Sp}(\omega) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}_q);\ \omega(g(x), g(y)) = \omega(x, y)\}$.

**Proposition**

Si $\omega$ est non dégénérée, alors :

$$Sp(\omega) \simeq \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q).$$

**Proposition**

$$|\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)| = q^{n^2} \prod_{k=1}^{n} (q^{2k} - 1).$$

Coïncidence numérique : $|\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)| = |\mathfrak{S}_6|$ !

**But :** construire un espace de dimension 4 sur $\mathbb{F}_2$, muni d'une forme bilinéaire alternée, non dégénérée.

## Algèbre de Boole

- $E = \{1, ....n\}$ : ensemble fini à $n$ éléments, $n$ pair ;
- $\mathcal{P}(E) =: V$ : ensemble des parties de E.

**Proposition**

$(V, \Delta, \cap)$ est un anneau ; c'est l'algèbre de Boole.

- neutre pour $\Delta$ : $\emptyset$ ; symétrique de A pour $\Delta$ : $A$.
- Comme on a : $|V| = 2^n$, alors : $(V, \Delta, .)$ est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension $n$, où : $0.A = \emptyset$ ; et $1.A = A$.

  *Autre façon de le voir :* $V$ a pour base $\{i\}$, $i \in E$ ; tout élément $A$ de $V$ s'écrit :

$$A = \Delta_{i \in E}\{i\}.$$

- On introduit une forme bilinéaire sur $V$ :

$$\begin{aligned} \omega : \quad & V \times V \to \mathbb{F}_2 \\ & (A, B) \mapsto |A \cap B| \mod 2 \end{aligned}$$

$\omega$ est bien une forme bilinéaire alternée.
(en fait, symétrique, mais sur $\mathbb{F}_2$, on préfère la voir comme une forme alternée...).

- On introduit une forme bilinéaire sur $V$ :

$$\omega : \quad V \times V \to \mathbb{F}_2$$
$$(A, B) \mapsto |A \cap B| \mod 2$$

$\omega$ est bien une forme bilinéaire alternée.
(en fait, symétrique, mais sur $\mathbb{F}_2$, on préfère la voir comme une forme alternée...).

- Soit $V_0 :=$ ensemble des parties de $V$ de cardinal pair.

**Proposition**

$V_0$ est un hyperplan de $V$.
( c'est le noyau du morphisme $\Phi : A \mapsto |A| \mod 2$ : linéaire non nul)

Son cardinal est donc :

$$|V_0| = 2^{n-1}.$$

- Etude de $\omega|_{V_0 \times V_0}$ :

**Proposition**

$\mathrm{Ker}(\omega|_{V_0 \times V_0}) = < E > =: D$

- $\omega|_{V_0 \times V_0}$ passe au quotient ; la forme :

$$\overline{\omega} =: \omega_{|(V_0 \times V_0)}/D$$

est alors non dégénérée (on quotiente par le noyau...).

- $\overline{V_0} = V_0/_D$ est de cardinal $2^{n-2}$ ; il est donc de la bonne dimension, et muni d'une forme bilinéaire non dégénérée. *Yes !*

**Remarque :** Dans $\overline{V_0}$ : $\overline{A} \leftrightarrow \overline{A}^c$.
$(\{a, b\} = E \,\Delta\, \{a, b\} = \{c, d, e, f\} = \{a, b\}^c)$

### Proposition

$\overline{V_0}$ possède $\frac{(2^{n-2}-1)(2^{n-3}-1)}{3}$ plans, dont $\frac{(2^{n-4}-1)(2^{n-2}-1)}{3}$ plans totalement isotropes.

**Preuve**

Nombre de plans $= |\mathrm{Gr}_{2,n-2}(\mathbb{F}_q)|$...

$\diamond$

On prend $n = 6$ dans la suite.

**Proposition**

$$\mathrm{Sp}(\overline{\omega}) \simeq \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2).$$

## Deuxième construction

On prend $n = 6$ dans notre étude précédente.

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

- Points : vecteurs non nuls de $\overline{V_0} \simeq \mathbb{F}_2^4$ ;
- Lignes : plans totalement isotropes de $\overline{V_0}$ ;
- Relation d'appartenance : $p \in l \leftrightarrow$ vecteur $\in$ plan.

*Est-ce bien la configuration de Cremona-Richmond ?*

1. On regarde la forme des points et des lignes :
   - Points :

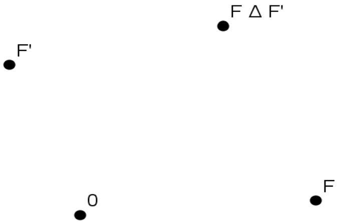

Soit $F \in V_0$ ; $F$ est donc de cardinal pair : $|F| = 2$ ou $4$.

On remarque que, si $|F| = 4$, alors $|F^c| = 2$.

Or, dans $\overline{V_0}$, $\overline{F} = \overline{F}^c$.

<u>Conclusion</u> : On peut choisir $\overline{F} = \{a, b\}$.

- Lignes :




Soit $\overline{F}, \overline{F'} \in \overline{V_0} \implies \overline{F} = \{a, b\};\ \overline{F'} = \{c, d\}$
($\overline{F}, \overline{F'}$ dans un plan totalement isotrope, donc $|\overline{F} \cap \overline{F'}| = 0$)

De plus,
$\overline{F} \Delta \overline{F'} = \overline{F} \cup \overline{F'} = \overline{\{a, b, c, d\}} = \overline{E} - \overline{\{a, b, c, d\}} = \overline{\{e, f\}}$.

<u>Conclusion</u> : $\overline{L} = \{\emptyset; \{a, b\}; \{c, d\}; \{e, f\}\}$.

2. On vérifie que le type est bien $(15_3, 15_3)$ :

• $2^4 - 1 = 15$ points ; et 15 lignes (c'est la formule donnant le nombre de plans totalement isotropes, avec $n = 6$).

• Un plan (totalement isotrope) est de dimension 2 sur $\mathbb{F}_2$ ; le nombre de points (i.e. de vecteurs non nuls) dans une ligne (i.e. un plan) est donc : $2^2 - 1 = 3$.

**Proposition***

On a :

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_{CR}) \simeq \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2).$$

Preuve : Même schéma de preuve que précédemment.

- Action de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$ sur la configuration ; *(détaillé plus tard)*
- Action fidèle ;
- Argument de cardinalité.

◇

# Aboutissement : un isomorphisme exceptionnel dans la classification des groupes simples finis

## Proposition**

On a l'isomorphisme :

$$\mathfrak{S}_6 \simeq \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2).$$

**Preuve**

1. $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$ agit sur $\mathfrak{C}_{CR}$ :

On a, pour $g \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$, et $A, B \in \overline{V_0}$ :

$$\begin{aligned} \overline{\omega}(g(A), g(B)) &= \overline{\omega}(A, B) \\ |g(A) \cap g(B)| &= |A \cap B| \\ |g(A \cap B)| &= |A \cap B| \end{aligned}$$

Ainsi :

- Pour $B = A$, $A \in \overline{V_0}$ : $|g(A)| = |A|$, donc $g(A) \in \overline{V_0}$ : $g(A)$ est un point.
- Pour $A, B \in L$ (plan totalement isotrope) : $g(A), g(B) \in g(L)$ : $g(L)$ est une ligne.
- $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$ respecte l'inclusion.

2. L'action est fidèle :

On a le morphisme induit par l'action :

$$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{C}_{CR})$$
$$g \mapsto [(p, l) \mapsto (g(p), g(l))]$$

Supposons que $\forall p \in \overline{V_0}, p \neq 0;\ g(p) = p$ pour $g \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$. Alors tous les points de $\mathfrak{C}_{CR}$ sont respectés. L'origine 0 l'est aussi, donc les droites vectorielles également, ce qui entraîne que $g = Id$.

3. On a égalité des cardinaux.

# Bonus : un automorphisme extérieur de $\mathfrak{S}_6$

**Troisième construction**

- Points : transpositions de $\mathfrak{S}_6$ ;
- Lignes : triple-transpositions de $\mathfrak{S}_6$ ;
- Condition d'appartenance

On retrouve bien la configuration de Cremona Richmond.

**Proposition**

Les transpositions, et les triple-transpositions, agissent par conjugaison comme automorphisme de la configuration.

**Proposition**

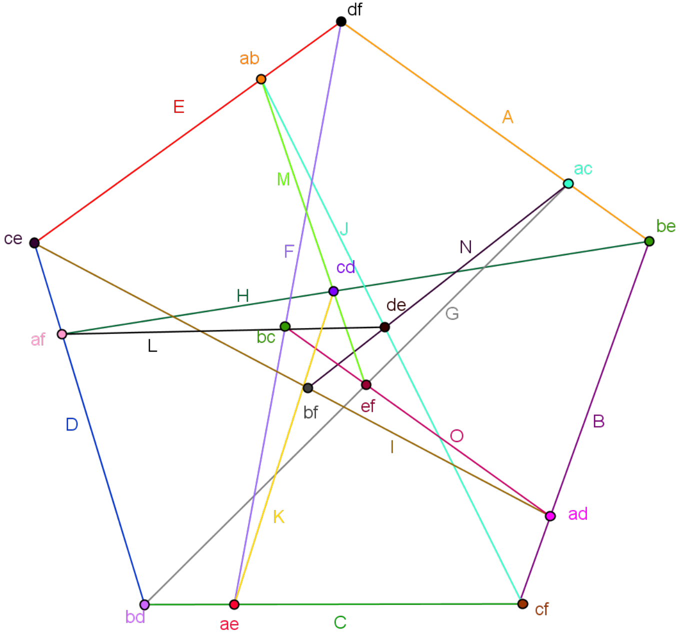
La configuration de Cremona Richmond est autoduale.

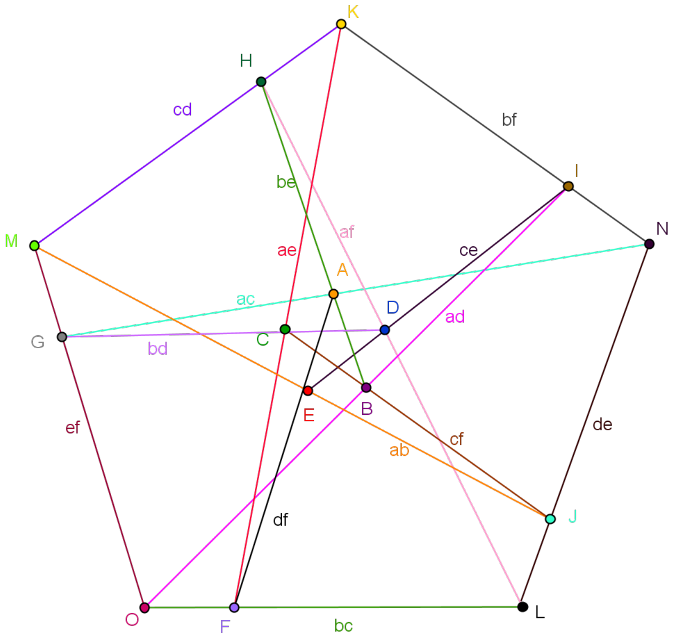
Preuve : *Construction du dual*

Principes :

- Si $p = l_1 \cap l_2$ dans $\mathfrak{C}_{CR}$, alors dans $\mathfrak{C}^*_{CR}$ : $l_p =< p_{l_1}, p_{l_2} >$;
- Si $l =< p_1, p_2 >$, alors $p_l \in l_{p_1} \cap l_{p_2}$ ;
- Si $p_1 \mapsto l_1$ ; $p_2 \mapsto l_2$, alors $p_3 \mapsto l_3$.

| C | $C^*$ |
|---|---|
| cd | ce ab df |
| de | cf ae bd |
| ef | df ac be |
| bf | bd af ce |
| bc | be ad cf |
| ab | df bc ae |
| ac | ac ef bd |
| ad | be cd af |
| ae | ad bf ce |
| af | ab de cf |
| df | ad bc ef |
| be | ab cd ef |
| cf | ae bf cd |
| bd | ac de bf |
| ce | af bc de |


df
ab
E
A
ac
be
ce
M
J
N
F
cd
H
de
G
af
bc
L
bf
ef
D
O
I
B
K
ad
bd
ae
C
cf


K
H
cd
bf
I
be
af
N
M
ae
ce
A
ac
D
ad
G
C
bd
E
B
ef
de
cf
ab
J
df
O
F
bc
L

# Automorphisme extérieur

On a donc : $\exists \phi : \mathfrak{C}_{CR} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}^*_{CR}$.

- Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_6$, on construit naturellement :
  $\bullet\ \sigma_* \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_{CR}) : \{x, y\} \mapsto \{\sigma(x), \sigma(y)\}$.

  $\bullet\ \sigma^* \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^*_{CR})$ :
  $\{\{x, y\}; \{z, t\}; \{u, v\}\} \mapsto$
  $\{\{\sigma(x), \sigma(y)\}; \{\sigma(z), \sigma(t)\}; \{\sigma(u), \sigma(v)\}\}$.

# Automorphisme extérieur

- Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_6$, on définit :

$$\sigma_! := \phi^{-1} \circ \sigma^* \circ \phi$$

En particulier, pour $t = (xy)$ :

$$t_! = \phi^{-1}(t)_*$$

**Remarque :** Cela vient du fait que, pour $(ab)$ une transposition :

$$\phi(t(\,ab\,)) = \phi(t)(\phi(\,ab\,)).$$

vspace5mm
En effet :

$$\begin{aligned}
t_!(ab) = \phi^{-1}(t)_*(ab) &\Leftrightarrow \phi^{-1} \circ t^* \circ \phi(ab) = \phi^{-1}(t)_*(ab) \\
&\Leftrightarrow \phi\left(\phi^{-1} \circ t^* \circ \phi(ab)\right) = \phi\left(\phi^{-1}(t)_*(ab)\right) \\
&\Leftrightarrow t_* \circ \phi(ab) = \left(\phi \circ \phi^{-1}(t^*)\right)\left(\phi(ab)\right) \\
&\Leftrightarrow t_* \circ \phi(ab) = t_* \circ \phi(ab) : \quad \textit{Yes !}
\end{aligned}$$

# Automorphisme extérieur

- L'application $\sigma_* \mapsto \sigma_!$ est un morphisme de :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_{CR}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^*_{CR}) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathfrak{S}_6 \arrow[r] & \mathfrak{S}_6 \end{tikzcd} \;;$$

qui à $t \longmapsto \phi(t)$ ; il nous fournit un automorphisme de $\mathfrak{S}_6$ extérieur, car il envoie la classe de conjugaison des transpositions sur celle des triple-transpositions !
**Ouf ! !**

*Remarque :* En fait, $t \mapsto \phi^{-1}(t)$, mais $\phi$ est involutive, i.e. : $\phi \circ \phi = \mathrm{Id}$...

Merci de votre attention, et bonne lecture hédoniste !