Nombres réels de complexité sous-linéaire :

mesures d'irrationalité et de transcendance

Boris Adamczewski (Lyon) & Yann Bugeaud (Strasbourg)

Abstract. *By means of a quantitative version of the Schmidt Subspace Theorem, we obtain irrationality and trancendence measures for real numbers whose expansion in an integer base has a sublinear complexity. We further give several applications of our general results to Sturmian, automatic, and morphic numbers, and to lacunary series. In particular, we extend a theorem on Sturmian numbers established by Bundschuh in 1980. We also provide a first step towards a conjecture of Becker by proving that irrational automatic real numbers are either S- or T-numbers. This improves upon a recent result of Adamczewski and Cassaigne, who established that irrational automatic real numbers cannot be Liouville numbers.*

Résumé. *Au moyen d'une version quantitative du théorème du sous-espace de Schmidt, nous obtenons des mesures d'irrationalité et de transcendance pour les nombres réels de complexité sous-linéaire. Nous donnons ensuite des applications de ces résultats généraux aux nombres sturmiens, aux nombres réels engendrés par automate fini, aux nombres morphiques, ainsi qu'aux nombres lacunaires. Nous généralisons ainsi un théorème sur les nombres sturmiens établi en 1980 par Bundschuh. Nous faisons également un premier pas en direction d'une conjecture de Becker en démontrant que tout nombre automatique irrationnel est soit un S-nombre, soit un T-nombre, ce qui améliore un résultat récent d'Adamczewski et Cassaigne, qui établirent qu'un nombre automatique irrationnel ne peut pas être un nombre de Liouville.*

2000 *Mathematics Subject Classification : 11J82*

1. Introduction

Une façon classique de mesurer la complexité d'une suite $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1}$ prenant ses valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{A}$ consiste à étudier la fonction $n \mapsto p(n, \mathbf{a})$ définie par

$$p(n, \mathbf{a}) = \mathrm{Card}\{(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+n-1}) : j \geq 1\}.$$

Cette notion de complexité est issue de l'étude des systèmes dynamiques symboliques [33] et fait l'objet de nombreux travaux dans ce domaine et en combinatoire des mots. La fonction $p(\cdot, \mathbf{a})$ est appelée fonction de complexité de la suite $\mathbf{a}$. Clairement, il s'agit d'une fonction croissante qui vérifie

$$1 \leq p(n, \mathbf{a}) \leq (\mathrm{Card}\,\mathcal{A})^n, \quad (n \geq 1).$$

On considère dans ce contexte qu'une suite est d'autant plus simple que sa fonction de complexité a un ordre de grandeur petit. Cette idée intuitive est en partie justifiée par le résultat fondamental suivant, démontré par Hedlund et Morse [33] en 1938 : une suite est ultimement périodique si, et seulement si, sa fonction de complexité est bornée.

Cette notion s'avère également pertinente en théorie des nombres. Elle induit une hiérarchie naturelle des nombres réels en considérant la complexité de leur représentation dans une base entière. Étant donné un entier $b \geq 2$, tout nombre réel non nul ξ s'écrit de manière unique

$$\xi = \pm \sum_{k \geq -k_0} \frac{a_k}{b^k},$$

où $k_0 \geq 0$, $a_{-k_0} \neq 0$ si $k_0 > 0$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ et $a_k \neq b-1$ pour une infinité d'indices k. Cette écriture s'appelle *le développement de ξ en base b*. On définit alors la complexité du nombre réel ξ relativement à la base b par

$$p(n, \xi, b) = p(n, \mathbf{a}),$$

où $\mathbf{a} := (a_k)_{k\geq 1}$. Étant donnée une fonction réelle f croissante à valeurs entières positives, on définit la classe de complexité $\mathcal{C}(f)$ par

$$\mathcal{C}(f) := \{\xi \in \mathbf{R} : \text{il existe une base } b \geq 2 \text{ telle que } p(n, \xi, b) = O(f(n))\}.$$

Notons que la classification des nombres réels ainsi obtenue est très différente des classifications classiques issues des travaux de Turing, exprimées en termes de calculabilité en temps ou en espace. En effet, dans ces dernières, les classes étudiées sont formées de nombres calculables au sens de Turing. Ici, dès que la fonction f croît au moins linéairement, l'ensemble $\mathcal{C}(f)$ est non dénombrable et contient ainsi des nombres non calculables.

On distingue deux principaux champs d'investigation. Une première direction consiste à étudier la complexité de constantes classiques comme $\sqrt{2}, \pi, e$ ou $\zeta(3)$. Il est généralement attendu que le développement de chacun de ces nombres soit de complexité maximale quelle que soit la base entière choisie, néanmoins un tel résultat semble hors d'atteinte pour le moment. D'autre part, on peut se demander quelles sont les propriétés dont jouissent les nombres réels ayant un ordre de complexité prescrit.

Dans la suite, nous nous intéressons aux propriétés diophantiennes des nombres réels appartenant à la classe

$$\mathcal{CL} := \{\xi \in \mathbf{R} : \text{il existe une base } b \geq 2 \text{ telle que } p(n, \xi, b) = O(n)\}\,.$$

Nous dirons qu'un élément de la classe $\mathcal{CL}$ est un *nombre réel de complexité sous-linéaire*. Ces nombres se situent donc au bas de la hiérarchie considérée. Un aspect remarquable des nombres de complexité sous-linéaire est qu'ils peuvent souvent être décrits par des procédés algorithmiques, dynamiques ou arithmétiques simples, comme l'illustrent les parties 3, 4, 5 et 6 ci-après. Aussi trouve-t-on dans la littérature de nombreux travaux ayant pour objet l'étude de familles particulières de nombres réels appartenant à la classe $\mathcal{CL}$ (voir par exemple [6, 9, 10, 16, 20, 24, 25, 26, 29, 37, 38, 40] pour une liste non exhaustive). En revanche, il a longtemps semblé difficile de traiter tous ces nombres de façon globale. Dans un travail précédent [2], nous avons développé une nouvelle approche permettant d'obtenir le premier résultat de ce type, le théorème AB ci-dessous. Celle-ci est fondée sur un résultat combinatoire de transcendance [5], dont la démonstration repose sur une version p-adique du théorème du sous-espace de W. M. Schmidt.

Théorème AB. *Tout nombre réel de complexité sous-linéaire est ou bien rationnel, ou bien transcendant.*

Évidemmment, le théorème de Hedlund et Morse cité précédemment implique que tous les nombres rationnels sont des nombres de complexité sous-linéaire. Il est donc impossible d'échapper à l'alternative « rationnel ou transcendant » présente dans le Théorème AB. Cela n'est pas réellement gênant puisque nous disposons d'un critère de ratonalité combinatoire efficace pour les nombres définis par leur développement dans une base entière : un nombre est rationnel si, et seulement si, son développement dans toute base entière est ultimement périodique. Nous pouvons ainsi distinguer aisément, parmi les nombres réels de complexité sous-linéaire, les nombres trancendants des nombres rationnels.

L'objet de cet article est de préciser le Théorème AB en obtenant des mesures d'irrationalité et de transcendance, ainsi que des résultats d'indépendance algébrique, pour les éléments de la classe $\mathcal{CL}$. Dans cette direction, nous démontrons deux résultats principaux, les théorèmes 1.1 et 2.1. Des applications de ces deux résultats sont ensuite données dans les parties 3, 4, 5 et 6.

Avant d'énoncer le théorème 1.1, nous rappelons la classification des nombres réels définie par Mahler [28] en 1932. Soient $d \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel. On note $w_d(\xi)$ le supremum des nombres réels w pour lesquels les inégalités

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}$$

sont vérifiées par une infinité de polynômes $P(X)$ à coefficients entiers, de degré majoré par d. Ici, $H(P)$ désigne la hauteur naïve de $P(X)$, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Posant alors $w(\xi) = \limsup_{d\to+\infty}(w_d(\xi)/d)$, nous disons, suivant

Mahler, que ξ est un

$$\begin{gathered}A\text{-nombre, si } w(\xi)=0;\\ S\text{-nombre, si } 0<w(\xi)<\infty;\\ T\text{-nombre, si } w(\xi)=\infty \text{ et } w_d(\xi)<\infty \text{ pour tout entier } d\geq 1;\\ U\text{-nombre, si } w(\xi)=\infty \text{ et } w_d(\xi)=\infty \text{ pour un entier } d\geq 1.\end{gathered}$$

Une propriété essentielle de cette classification est que deux nombres transcendants appartenant à des classes différentes sont algébriquement indépendants. Les A-nombres sont exactement les nombres algébriques. Au sens de la mesure de Lebesgue, presque tous les nombres réels sont des S-nombres. Les nombres de Liouville, qui sont par définition les nombres ξ vérifiant $w_1(\xi)=+\infty$, sont des exemples de U-nombres, mais la confirmation de l'existence des T-nombres demeura un problème ouvert durant une quarantaine d'années, jusqu'à sa résolution par Schmidt [43, 44]. Davantage de résultats sur les fonctions w_d se trouvent dans la monographie [13].

Théorème 1.1. *Soit ξ un nombre irrationnel appartenant à la classe $\mathcal{CL}$. Alors, ou bien ξ est un nombre de Liouville, ou bien il existe une constante c, indépendante de d, telle que*

$$w_d(\xi)\leq (2d)^{c(\log 3d)(\log\log 3d)},$$

pour tout entier $d\geq 1$. Dans ce dernier cas, ξ est un S-nombre ou un T-nombre.

La démonstration du théorème 1.1 repose sur une version quantitative du théorème du sous-espace de Schmidt établie par Evertse et Schlickewei [19] et rappelée dans la partie 7. Nous montrons comment combiner l'approche de [2] avec celle récemment développée dans [4] afin de contrôler la qualité de l'approximation de tout nombre réel appartenant à la classe $\mathcal{CL}$ par des nombres algébriques de degré fixé au moins égal à deux .

Il est possible d'expliciter la constante c qui apparaît dans l'énoncé du théorème 1.1. Plus précisément, si ξ est un nombre irrationnel appartenant à la classe $\mathcal{CL}$, il existe une base $b\geq 2$ et un nombre réel κ tels que $p(n,\xi,b)\leq \kappa n$ pour tout n assez grand ; la démonstration du théorème 1.1 montre alors que

$$w_d(\xi)\leq \max\{w_1(\xi),(2d)^{10^{150}\kappa^{18}(\log 3d)(\log\log 3d)}\},$$

pour tout entier $d\geq 1$. En particulier, la majoration de $w_d(\xi)$ est indépendante de b. Cela résulte de l'utilisation, comme dans [15], d'une version quantitative du théorème du sous-espace appliquée à un système d'inégalités faisant intervenir des formes linéaires, et non à une inégalité portant sur un produit de formes linéaires.

Tout comme le Théorème AB, le théorème 1.1 présente une alternative à laquelle on ne peut espérer se soustraire. En effet, la classe $\mathcal{CL}$ contient aussi bien le nombre de Liouville

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{10^{n\,!}}$$

que le nombre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{2^n}},$$

lequel, d'après un résultat de Ku. Nishioka [37], est un S-nombre. Néanmoins, nous ignorons s'il existe des T-nombres ayant une complexité sous-linéaire.

Le théorème 1.1 nous renvoie donc au problème de distinguer, parmi les éléments de la classe $\mathcal{CL}$, les nombres de Liouville de ceux qui n'en sont pas. Pour ce faire, nous utilisons un exposant combinatoire introduit dans [3], l'*exposant diophantien*, qui s'interprète comme une mesure de la périodicité du développement de ξ en base b. Notons que des exposants similaires ont déjà été introduits en combinatoire des mots et en dynamique symbolique, comme l'exposant critique ou l'exposant critique initial (voir par exemple [12]). Nous montrons alors comment cet exposant permet d'obtenir une mesure d'irrationalité générale pour les nombres de complexité sous-linéaire (Théorème 2.1). En particulier, nous établissons qu'un élément de $\mathcal{CL}$ est un nombre de Liouville si, et seulement si, son exposant diophantien est infini (Corollaire 2.2).

Ce critère combinatoire pour déterminer si un élément de $\mathcal{CL}$ est, ou non, un nombre de Liouville s'avère efficace dans la pratique comme l'illustrent les applications données dans les parties 3, 4, 5 et 6. Nous commençons par présenter dans la partie 3 une application des théorèmes 1.1 et 2.1 aux nombres sturmiens, qui sont liés aux valeurs des séries de Hecke–Mahler. Nous généralisons ainsi un théorème établi en 1980 par Bundschuh [16]. D'autres applications de ces résultats, concernant les nombres automatiques, les nombres morphiques et les nombres lacunaires, sont respectivement données dans les parties 4, 5 et 6. Nous faisons en particulier un premier pas en direction d'une conjecture de Becker en démontrant que tout nombre automatique irrationnel est soit un S-nombre, soit un T-nombre. Ceci améliore le résultat principal de [7] affirmant qu'un nombre automatique irrationnel ne peut pas être un nombre de Liouville.

Le reste de ce texte est organisé comme suit. La version du théorème du sous-espace quantitatif que nous utilisons, démontrée par Evertse et Schlickewei [19], est rappelée dans la partie 7. Plusieurs résultats auxiliaires font l'objet de la partie 8. Les parties 9 et 10 sont respectivement consacrées aux démonstrations des théorèmes 1.1 et 2.1. Nous complétons la démonstration du théorème 3.1 dans la partie 11. Enfin, nous ajoutons quelques remarques dans la partie 12.

Remerciements. Le premier auteur remercie l'ANR pour son soutien à travers le projet DyCoNum–JCJC06 134288.

2. Exposant diophantien et mesures d'irrationalité

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'approximation des éléments de la classe $\mathcal{CL}$ par des nombres rationnels. Nous cherchons à obtenir des mesures d'irrationalité pour ces nombres, c'est-à-dire à majorer leur *exposant d'irrationalité*. Rappelons que l'exposant d'irrationalité d'un nombre réel irrationnel ξ, noté $\mu(\xi)$, désigne le supremum des nombres réels μ pour lesquels l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < q^{-\mu}$$

possède une infinité de solutions rationnelles p/q. Pour tout nombre irrationnel ξ, on a $\mu(\xi) = w_1(\xi) + 1$ et

$$2 \leq \mu(\xi) \leq +\infty. \tag{2.1}$$

Les nombres de Liouville sont par définition les nombres réels dont l'exposant d'irrationalité est infini. Récemment, Bugeaud [14] a démontré que, pour tout nombre réel $\mu \geq 2$, il existe une infinité de nombres réels ξ appartenant à $\mathcal{CL}$ et tels que $\mu(\xi) = \mu$. Le comportement des nombres réels de complexité sous-linéaire vis-à-vis de l'approximation rationnelle est donc très variable, ce qui rend *a priori* difficile l'obtention une mesure d'irrationalité générale pour les éléments de la classe $\mathcal{CL}$.

Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons l'*exposant diophantien*, introduit dans [3]. Cet exposant s'interprète comme une mesure de la périodicité du développement d'un nombre réel dans une base entière. Nous montrons comment il permet de contrôler de façon assez satisfaisante l'approximation rationnelle des nombres réels de complexité sous-linéaire, complétant ainsi le théorème 1.1. En particulier, cet exposant permet de caractériser, parmi les éléments de la classe $\mathcal{CL}$, ceux qui sont des nombres de Liouville.

Avant de définir l'exposant diophantien d'une suite ou d'un mot infini, faisons quelques rappels de combinatoire des mots, qui nous seront également utiles dans les parties 5, 9, 10 et 11.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. On note $|W|$ la longueur d'un mot fini W sur l'alphabet $\mathcal{A}$, c'est-à-dire le nombre de lettres composant W. Pour tout entier $\ell \geq 1$, le mot W^ℓ désigne la concaténation de ℓ copies de W. Plus généralement, pour tout nombre réel $x > 0$, on note W^x le mot $W^{\lfloor x \rfloor} W'$, où W' est le préfixe de W de longueur $\lceil (x - \lfloor x \rfloor)|W| \rceil$. Ici et dans toute la suite, $\lceil y \rceil$ (resp. $\lfloor y \rfloor$) désigne le plus petit entier supérieur ou égal à y (resp. le plus grand entier inférieur ou égal à y). Le mot W^∞ est le mot infini obtenu par concaténations successives du mot W.

Soit $\mathbf{a} = (a_k)_{k \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, que l'on identifie au mot infini $a_1 a_2 \ldots$ Soit $\rho \geq 1$ un nombre réel. On dit que $\mathbf{a}$ vérifie la Condition $(*)_\rho$ s'il existe deux suites de mots finis $(U_n)_{n \geq 1}$, $(V_n)_{n \geq 1}$, et une suite de nombres réels $(w_n)_{n \geq 1}$ telles que :

(i) pour $n \geq 1$, le mot $U_n V_n^{w_n}$ est un préfixe du mot $\mathbf{a}$;

(ii) pour tout $n \geq 1$, $|U_n V_n^{w_n}|/|U_n V_n| \geq \rho$;

(iii) la suite $(|V_n^{w_n}|)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

L'*exposant diophantien* de $\mathbf{a}$, noté $\mathrm{Dio}(\mathbf{a})$ est le supremum des nombres réels ρ pour lesquels $\mathbf{a}$ vérifie la Condition $(*)_\rho$. Il est clair à partir de la définition que

$$1 \leq \mathrm{Dio}(\mathbf{a}) \leq +\infty$$

et que l'exposant diophantien d'une suite ultimement périodique est infini.

Pour tout entier $b \geq 2$, notons $\mathrm{Dio}(\xi, b)$ l'exposant diophantien du développement de ξ en base b. En tronquant ce développement puis en le complétant par périodicité, on construit ainsi de bonnes approximations rationnelles de ξ qui nous permettent aisément de minorer l'exposant d'irrationalité $\mu(\xi)$ de ξ et d'établir, lorsque ξ est irrationnel, que

$$\mu(\xi) \geq \mathrm{Dio}(\xi, b). \tag{2.2}$$

En revanche, ce raisonnement très simple n'est a priori d'aucune aide pour majorer $\mu(\xi)$, sauf, cependant, lorsque ξ est de complexité sous-linéaire, comme l'illustre le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soit $b \geq 2$ un entier. Soient $\kappa > 1$ un nombre entier et $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ telle que $p(n, \mathbf{a}) \leq \kappa n$ pour tout entier n assez grand. Si l'exposant diophantien de $\mathbf{a}$ est fini, alors le nombre réel*

$$\xi := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{b^k}$$

vérifie

$$\max\{2, \mathrm{Dio}(\xi, b)\} \leq \mu(\xi) \leq (2\kappa + 1)^3(\mathrm{Dio}(\xi, b) + 1). \tag{2.3}$$

L'inégalité de gauche de (2.3) découle de (2.1) et (2.2).

Nous déduisons du théorème 2.1 un critère combinatoire pour distinguer les nombres de Liouville dans l'ensemble des nombres de complexité sous-linéaire en base b, c'est-à-dire dans l'ensemble des nombres réels ξ tels que $p(n, \xi, b) = O(n)$.

Corollaire 2.2. *Soient $b \geq 2$ un entier et ξ un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire en base b. Alors, ξ est un nombre de Liouville si, et seulement si,* $\mathrm{Dio}(\xi, b)$ *est infini.*

Ainsi, de façon assez surprenante, la lecture « naïve » du développement d'un nombre réel de complexité sous-linéaire nous permet toujours de déterminer s'il s'agit ou non d'un nombre de Liouville.

Notons enfin que l'exposant diophantien d'un nombre réel est parfois égal à son exposant d'irrationalité [14]. En particulier, si

$$\xi := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha \rfloor}},$$

avec $\alpha > 1$ irrationnel et $b \geq 2$ entier, les résultats présentés dans [1] (voir aussi [8]) impliquent que

$$\mu(\xi) = \mathrm{Dio}(\xi, b) = 1 + \limsup_{n\to+\infty} [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1],$$

où $a_0, a_1, \ldots$ désignent les quotients partiels du développement en fraction continue du nombre α.

3. Nombres sturmiens

Les suites sturmiennes sont les suites $\mathbf{a}$ de complexité minimale parmi les suites apériodiques, c'est-à-dire celles qui vérifient $p(n, \mathbf{a}) = n + 1$ pour tout entier positif n. Depuis les travaux précurseurs de Morse et Hedlund [33, 34], elles sont l'objet de nombreuses études (voir par exemple [23] pour une introduction à ce sujet). Un nombre sturmien est un nombre réel dont le développement dans une base entière est une suite sturmienne. Notons qu'une suite sturmienne $\mathbf{a}$ ne prend que deux valeurs disctinctes puisque par définition $p(1, \mathbf{a}) = 2$. Dans la suite de cette partie nous nous limitons à l'étude des nombres sturmiens dont les chiffres sont 0 et 1, mais nos résultats s'adaptent sans peine à tous les nombres sturmiens. Il découle de l'une des nombreuses caractérisations des suites sturmiennes qu'un nombre écrit en base $b \geq 2$ avec les seuls chiffres 0 et 1 est sturmien si, et seulement si, il est de la forme

$$S_b(\alpha, \rho) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha + \rho \rfloor}}$$

ou bien

$$S'_b(\alpha, \rho) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lceil n\alpha + \rho \rceil}},$$

avec $\alpha > 1$ irrationnel et $\rho \geq 0$.

Les nombres sturmiens sont également liés aux valeurs aux points $1/b$ des séries de Hecke–Mahler

$$f(z, \alpha, \rho) = \sum_{n \geq 1} \lceil n\alpha + \rho \rceil z^n,$$

dont la transcendance aux points z algébriques a été étudiée depuis les travaux précurseurs de Mahler [27] en 1929.

Notons que les propriétés dont il est question ci-après (transcendance, mesure de transcendance, mesure d'irrationalité) sont clairement identiques pour $S_b(\alpha, \rho)$ et $S'_b(\alpha, \rho)$. Mahler [27] établit la transcendance de $S_b(\alpha, 0)$ pour α quadratique, un résultat étendu en 1977 par Loxton et van der Poorten [24] à tout nombre α irrationnel, également au moyen de la méthode de Mahler. Plus récemment, Masser [31] a obtenu des résultats d'indépendance algébrique pour les nombres $S_b(\alpha, 0)$ avec α quadratique, toujours en utilisant la méthode de Mahler. D'autre part, il est bien connu que le paramètre ρ est une source de difficultés importantes. Ainsi, il a fallu attendre 1997 pour que Ferenczi et Mauduit [20] démontrent la transcendance de tous les nombres sturmiens en utilisant une approche complètement différente fondée sur une étude combinatoire des suites sturmiennes et sur une version p-adique du théorème de Roth établie par Ridout [41].

Dans la partie 11, nous démontrons que $\mathrm{Dio}(S_b(\alpha, \rho), b)$ est fini si, et seulement si, α est un nombre dont le développement en fraction continue est à quotients partiels bornés. Ce résultat, combiné aux théorèmes 1.1 et 2.1, nous permet de généraliser un théorème établi en 1980 par Bundschuh [16] correspondant au cas particulier où $\rho = 0$ dans le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soient $b \geq 2$ un entier, $\alpha > 1$ un nombre irrationnel et $\rho > 0$ un nombre réel. Le nombre réel*

$$S_b(\alpha, \rho) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha + \rho \rfloor}}$$

est un nombre de Liouville si, et seulement si, α est nombre à quotients partiels non bornés. De plus, si α est un nombre à quotients partiels bornés, alors $S_b(\alpha, \rho)$ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Comme conséquence du théorème 3.1 et des propriétés de la classification de Mahler, nous construisons des exemples explicites de nombres réels algébriquement indépendants.

Corollaire 3.2. *Soient $b \geq 2$ et $b' \geq 2$ deux entiers. Soient $\alpha > 1$ un nombre réel irrationnel à quotients partiels non bornés, $\alpha' > 1$ un nombre réel irrationnel à quotients partiels bornés, ρ et ρ' deux nombres réels. Alors, les nombres réels*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha + \rho \rfloor}} \quad et \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b'^{\lfloor n\alpha' + \rho' \rfloor}}$$

sont algébriquement indépendants.

En particulier, les nombres

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{\lfloor ne + \pi \rfloor}} \text{ et } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^{\lfloor n\sqrt{2} + \zeta(3) \rfloor}}$$

sont algébriquement indépendants.

4. Nombres automatiques

Les nombres réels automatiques sont les nombres réels dont le développement dans une base entière peut être engendré par un automate fini. Pour une définition plus formelle, nous renvoyons le lecteur au chapitre 13 du livre d'Allouche et Shallit [9] qui est entièrement consacré à l'étude de ces nombres.

Un exemple emblématique de nombre automatique est le nombre binaire de Thue–Morse–Mahler

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n},$$

où $a_n = 1$ si le développement binaire de n contient un nombre impair de chiffres non nuls et $a_n = 0$ sinon.

Comme conséquence d'un résultat de Cobham [17], les nombres automatiques forment une sous-classe des nombres de complexité sous-linéaire. Le théorème AB implique en particulier qu'un nombre réel automatique est rationnel ou transcendant, confirmant une conjecture proposée par Cobham en 1968 et popularisée par les travaux de Loxton et van der Poorten [25, 26]. En 1993, Shallit conjectura qu'un nombre de Liouville ne peut être engendré par un automate fini. En fait, une conjecture plus forte fut par la suite formulée par Becker dans sa correspondance avec Shallit.

Conjecture 4.1. (Becker). *Les nombres automatiques irrationnels sont des S-nombres.*

Dans la direction de la conjecture 4.1, Nishioka [37] établit que le nombre automatique $\sum_{n\geq 1} 2^{-2^n}$ est un S-nombre. La conjecture de Shallit fut récemment démontrée par Adamczewski et Cassaigne [7], qui prouvèrent (voir leur Lemma 6.1) que l'exposant diophantien d'un mot infini automatique est nécessairement fini. Comme conséquence de leurs résultats et du théorème 1.1, nous faisons un premier pas dans la direction de la conjecture de Becker.

Théorème 4.2. *Tout nombre réel irrationnel automatique est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.*

Le théorème 4.2 étend le Theorem 3.3 d'Adamczewski et Cassaigne [7], lesquels, au moyen d'un théorème de Baker [11], établirent que les nombres automatiques vérifiant une certaine hypothèse de nature combinatoire ne sont pas des U-nombres.

5. Nombres morphiques

Tout comme les automates finis, les morphismes de monoïdes libres permettent de construire facilement des mots infinis, et donc des nombres réels, aux propriétés remarquables.

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{A}$, on désigne par $\mathcal{A}^*$ le monoïde libre engendré par $\mathcal{A}$ pour la concaténation. Le mot vide ε est l'élément neutre de $\mathcal{A}^*$. Une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^*$ se prolonge de façon unique en un endomorphisme de $\mathcal{A}^*$, que nous appellerons simplement morphisme.

Un morphisme σ est dit prolongeable s'il existe un élément a de $\mathcal{A}$ tel que $\sigma(a) = aW$, où W est un mot non vide vérifiant $\sigma^k(W) \neq \varepsilon$ pour tout $k \geq 0$. Dans ce cas, la suite de mots finis $(\sigma^k(a))_{k\geq 1}$ converge dans $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ (muni de la topologie produit des topologies discrètes sur chaqe copie de $\mathcal{A}$) vers un mot infini $\mathbf{a}$. Ce mot infini est un point fixe de σ (dont l'action s'étend naturellement sur $\mathcal{A}^N$ par continuité) et nous dirons que $\mathbf{a}$ est engendré par le morphisme σ. Lorsque le mot $\mathbf{a}$ n'est pas ultimement périodique, nous dirons que $\mathbf{a}$ est un point fixe apériodique de σ. Le morphisme σ est dit primitif s'il existe un entier k tel que pour tout couple $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, la lettre b a au moins une occurrence dans le mot $\sigma^k(a)$.

Les points fixes apériodiques de morphismes primitifs font l'objet de nombreux travaux, notamment en dynamique symbolique et en théorie des pavages comme l'illustre la monographie [39]. Il est bien connu que ces mots infinis ont tous une complexité souslinéaire (voir [9]). Une autre propriété d'un tel mot $\mathbf{a}$ est qu'il existe un entier k tel que $\mathbf{a}$ ne contient aucune occurrence d'un mot de la forme W^k, où W désigne un mot fini non vide (voir [35]). Il découle de ce résultat que l'exposant diophantien d'un point fixe apériodique de morphisme primitif est toujours fini.

Les théorèmes 1.1 et 2.1 impliquent alors le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Soient $b \geq 2$ un entier, σ un morphisme primitif défini sur un alphabet $\mathcal{A}$ inclus dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$, et $\mathbf{a} = a_0a_1\ldots$ un point fixe apériodique de σ. Alors, le* *nombre réel*

$$\xi := \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{b^n}$$

est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Le morphisme de Tribonacci τ défini sur $\{0,1,2\}^*$ par $\tau(0)=01$, $\tau(1)=02$ et $\tau(2)=0$ est un morphisme primitif qui engendre le mot infini de Tribonacci $\mathbf{t}=(t_n)_{n\geq 1}$ défini par

$$\mathbf{t} = \lim_{n\to\infty} \tau^n(0) = 0102011010202010201\dots$$

Il découle du théorème 5.1 que le nombre réel

$$\xi = \sum_{n\geq 1} \frac{t_n}{3^n}$$

est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

6. Nombres lacunaires

Nous dirons qu'un nombre réel ξ est un *nombre lacunaire* si son développement dans une base entière $b\geq 2$ s'écrit

$$\xi := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{b^{u_n}},$$

où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs vérifiant

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Les nombres

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n!}},\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{\lfloor \theta^n \rfloor}},\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{F_n}},$$

où $\theta>1$ désigne un nombre réel et F_n est le n-ième nombre de Fibonacci, sont des exemples classiques de nombres lacunaires. Le fait que les nombres lacunaires sont des nombres de complexité sous-linéaire est une observation assez simple (voir par exemple [21]), et le théorème de Ridout [41] implique qu'ils sont transcendants, un résultat que les énoncés ci-dessus permettent de préciser.

Théorème 6.1. *Soit $b\geq 2$ un nombre entier. Un nombre lacunaire*

$$\xi := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{b^{u_n}} \tag{6.1}$$

est un nombre de Liouville si, et seulement si, la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée. De plus, si cette suite est bornée, alors ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Pour démontrer le théorème 6.1, il suffit de constater que

$$\mathrm{Dio}(\xi, b) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

puis d'appliquer le théorème 1.1 et le corollaire 2.2.

Notre méthode conduit à un résultat plus précis que le théorème 6.1. En effet, comme tout nombre lacunaire ξ défini par (6.1) vérifie

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{p(n,\xi,b)}{n} \leq 1 + \frac{1}{\lambda - 1}, \quad \text{où} \quad \lambda := \min\left\{2, \liminf_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}\right\},$$

le théorème 2.1 et l'inégalité (9.20) qui termine la démonstration du théorème 1.1 assurent que, pour tout entier $d \geq 1$,

$$w_d(\xi) \leq \max\left\{250\,(\lambda-1)^{-1} \limsup_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}, (2d)^{10^{156}(\lambda-1)^{-18}(\log 3d)(\log\log 3d)}\right\}. \tag{6.2}$$

Il est intéressant de noter que le membre de droite de (6.2) ne fait pas intervenir la base b dans laquelle ξ est écrit.

7. Le théorème du sous-espace quantitatif

Nous énonçons un cas très particulier d'une version quantitative du théorème du sous-espace de Schmidt. La hauteur d'un nombre algébrique α, notée $H(\alpha)$, est par définition la hauteur de son polynôme minimal.

Théorème ES. *Soit ε un nombre réel strictement positif. Soit S un ensemble fini de nombres premiers distincts et posons $\mathcal{S} = S \cup \{\infty\}$. Soit α un nombre réel algébrique de degré d et de hauteur au plus H. Considérons les formes linéaires*

$$L_{1\infty}(X,Y,Z) = X, \quad L_{2\infty}(X,Y,Z) = Y, \quad L_{3\infty}(X,Y,Z) = \alpha X - \alpha Y - Z,$$

et, pour tout nombre premier p de S,

$$L_{1p}(X,Y,Z) = X, \quad L_{2p}(X,Y,Z) = Y, \quad L_{3p}(X,Y,Z) = Z.$$

Soient e_{ip} $(p \in \mathcal{S},\ i = 1,2,3)$ des nombres réels tels que

$$e_{i\infty} \leq 1 \ \ (i = 1,2,3), \quad e_{ip} \leq 0 \ \ (p \in S,\ i = 1,2,3),$$
$$\sum_{p\in\mathcal{S}} \sum_{i=1}^{3} e_{ip} = -\varepsilon.$$

L'ensemble des solutions $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ *du système d'inégalités*

$$|L_{ip}(\mathbf{x})|_p \leq (\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\})^{e_{ip}} \quad (p \in \mathcal{S},\, i = 1, 2, 3)$$

vérifiant

$$\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} > \max\left\{2H\sqrt{d+1}, 3^{6/\varepsilon}\right\}$$

est contenu dans la réunion d'au plus

$$8^{144}(1 + \varepsilon^{-1})^7 \log(8d) \log\log(8d) \tag{7.1}$$

sous-espaces propres de $\mathbf{Q}^3$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du Theorem 5.1 de [15], lequel découle du Theorem 3.1 de Evertse et Schlickewei [19]. □

La qualité des mesures de transcendance que nous obtenons dans nos différents théorèmes dépend étroitement de la qualité de la dépendance en d dans (7.1). De ce point de vue, le théorème ES est très satisfaisant, dans la mesure où le Theorem 4 de Mueller et Schmidt [36] entraîne qu'il est optimal au facteur $(\log\log 8d)$ près.

Il est important de souligner que le cardinal de l'ensemble S n'apparaît pas dans la majoration (7.1).

8. Résultats auxiliaires

Soient $d \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel. Suivant Koksma [22], on note $w_d^*(\xi)$ le supremum des nombres réels w^* pour lesquels les inégalités

$$0 < |\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-w^*-1}$$

sont vérifiées par une infinité de nombres algébriques α de degré majoré par d. De la même manière que Mahler définit les classes A, S, T et U à l'aide des fonctions w_d, Koksma introduisit les classes A^*, S^*, T^* et U^*. Ces dernières coïncident en fait avec les classes A, S, T et U, comme l'implique le lemme suivant.

Lemme 8.1. *Soit* $d \geq 1$ *un entier. Pour tout nombre réel irrationnel* ξ *on a*

$$\frac{w_d(\xi) + 1}{2} \leq w_d^*(\xi) \leq w_d(\xi).$$

En particulier, $w_d(\xi)$ *est fini si, et seulement si,* $w_d^*(\xi)$ *est fini.*

Démonstration. L'inégalité de gauche est un résultat de Wirsing [46], tandis que celle de droite est banale. □

Nous aurons besoin de la version suivante de l'inégalité de Liouville.

Lemme 8.2. *Soient α et β deux nombres algébriques distincts, de degré m et n, respectivement. Soit $P(X)$ un polynôme de degré n à coefficients entiers tel que $P(\alpha) \neq 0$. Il existe alors une constante $c(m,n)$, ne dépendant que de m et n, telle que*

$$|\alpha - \beta| \geq c(m,n)\, 2^{-m-n}\, H(\alpha)^{-n}\, H(\beta)^{-m},$$

et

$$|P(\alpha)| \geq c(m,n)\, H(\alpha)^{-n}\, H(P)^{-m+1}.$$

Le choix $c(m,n) = (m+1)^{-n-1}\,(n+1)^{-m-1}$ convient.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du Corollary A.2 et du Theorem A.1 de [13]. □

Rappelons que la hauteur d'un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ est le maximum des valeurs absolues de ses coefficients et que la hauteur d'un hyperplan de $\mathbf{Q}^n$ d'équation $y_1x_1 + \ldots + y_nx_n = 0$, où $y_1, \ldots, y_n$ sont des entiers non tous nuls et sans diviseur premier commun, est égale au maximum des valeurs absolues de $y_1, \ldots, y_n$.

Nous utiliserons dans la suite le résultat suivant dont la démonstration est facile.

Lemme 8.3. *Soient r et n deux entiers tels que $r < n$. Supposons qu'il existe des vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_r$ appartenant à $\mathbf{Z}^n$ et tels que $H(\mathbf{p}_1) \leq H(\mathbf{p}_2) \leq \ldots \leq H(\mathbf{p}_r)$. Alors, il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbf{Q}^n$ contenant ces points entiers et tel que*

$$H(\mathcal{H}) \leq r!\, H(\mathbf{p}_r)^r.$$

9. Démonstration du théorème 1.1

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 1.1. Notre stratégie est la suivante. Dans un premier temps, nous mettons en évidence une propriété combinatoire des suites de complexité sous-linéaire. Cela nous permet (cf. proposition 9.1) d'associer à tout nombre réel de complexité sous-linéaire une suite d'approximations rationnelles $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ possédant les trois propriétés suivantes :

(a) ces rationnels sont d'assez bonnes approximations de ξ;

(b) les dénominateurs q_n ont une forme très particulière, à savoir $q_n = b^{r_n}(b^{s_n} - 1)$, où r_n et s_n sont des entiers;

(c) la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ ne croît pas trop vite.

Les propriétés (a) et (b) sont utilisées dans [2] pour démontrer que tout nombre de complexité sous-linéaire est soit rationnel, soit transcendant. Afin d'obtenir la mesure de transcendance souhaitée, nous utilisons en plus la propriété (c) qui nous permet d'appliquer le théorème ES en suivant la méthode introduite dans [4].

9.1. Combinatoire des suites de complexité sous-linéaire

Nous montrons ici que les suites de complexité sous-linéaires contiennent des occurrences précoces de motifs répétitifs. Cette propriété combinatoire assure l'existence de la suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ mentionnée précédemment.

Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant.

Proposition 9.1. *Soit $b \geq 2$ un entier. Soit ξ un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire en base b et vérifiant $0 < \xi < 1$. Il existe alors un nombre réel $c \geq 3$, deux suites d'entiers positifs ou nuls $(r_j)_{j\geq 1}$, $(p_j)_{j\geq 1}$, et une suite strictement croissante d'entiers positifs $(s_j)_{j\geq 1}$ tels que, pour tout $j \geq 1$,*

(i) $r_j \leq cs_j$;

(ii) *si $r_j \geq 1$, alors b ne divise pas p_j* ;

(iii) $2(r_j + s_j) \leq r_{j+1} + s_{j+1} \leq c(r_j + s_j)$;

(iv)
$$\left| \xi - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j} - 1)} \right| < \frac{1}{2b^{(1+1/c)(r_j+s_j)}}.$$

Démonstration de la proposition 9.1. Soit $\mathbf{a}$ une suite de complexité sous-linéaire définie sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. Soient κ et n_0 deux entiers tels que

$$p(n, \mathbf{a}) \leq \kappa n, \quad (n \geq n_0). \tag{9.1}$$

Nous modifions légèrement les démonstrations des Theorem 1 de [2] et Theorem 3 de [3], qui, si (9.1) est remplacée par l'hypothèse plus faible

$$p(n, \mathbf{a}) \leq \kappa n, \quad \text{pour une infinité d'entiers } n, \tag{9.2}$$

assurent l'existence d'un nombre réel $c \geq 3$, de deux suites d'entiers positifs ou nuls $(r_j)_{j\geq 1}$, $(p_j)_{j\geq 1}$, et d'une suite strictement croissante d'entiers positifs $(s_j)_{j\geq 1}$ tels que, pour tout $j \geq 1$, les conditions (i) et (iv) du théorème sont vérifiées. Le point important pour la démonstration du théorème 1.1 est la majoration $r_{j+1}+s_{j+1} \leq c(r_j+s_j)$ dans la condition (iii), que l'on ne peut garantir sous l'hypothèse (9.2). Nous avons besoin d'une suite dense (en un certain sens) de bonnes approximations rationnelles de ξ.

Pour $\ell \geq 1$, notons $A(\ell)$ le préfixe de $\mathbf{a}$ de longueur ℓ. Le principe des tiroirs montre que si $\ell \geq n_0$, alors il existe (au moins) un mot W_ℓ de longueur ℓ ayant (au moins) deux occurrences dans $A((\kappa+1)\ell)$. En d'autres termes, il existe des mots (éventuellement vides) B_ℓ, D_ℓ, E_ℓ et un mot non vide C_ℓ tels que

$$A((\kappa + 1)\ell) = B_\ell W_\ell D_\ell E_\ell = B_\ell C_\ell W_\ell E_\ell.$$

Nous choisissons ces mots de sorte que, si B_ℓ n'est pas le mot vide ε, les dernières lettres de B_ℓ et de C_ℓ soient différentes.

Nous devons distinguer deux cas.

Supposons tout d'abord que $|C_\ell| \geq |W_\ell|$. Alors, il existe un mot F_ℓ tel que

$$A((\kappa + 1)\ell) = B_\ell W_\ell F_\ell W_\ell E_\ell.$$

Posons $U_\ell = B_\ell$, $V_\ell = W_\ell F_\ell$ et $w_\ell = |W_\ell F_\ell W_\ell|/|W_\ell F_\ell|$. Alors le mot $U_\ell V_\ell^{w_\ell}$ est un préfixe de $\mathbf{a}$ et $w_\ell \geq 1 + 1/\kappa$. En outre, si $U_\ell \neq \varepsilon$, les dernières lettres de U_ℓ et de V_ℓ diffèrent.

Supposons maintenant que $|C_\ell| < |W_\ell|$, c'est-à-dire que les deux occurrences de W_ℓ se chevauchent. Il existe alors un nombre rationnel $s_\ell > 1$ tel que

$$W_\ell = C_\ell^{s_\ell}.$$

Posons $U_\ell = B_\ell$, $V_\ell = C_\ell^{\lceil s_\ell/2 \rceil}$ et $w_\ell = (s_\ell + 1)/\lceil s_\ell/2 \rceil$. Alors, le mot $U_\ell V_\ell^{w_\ell}$ est un préfixe de $\mathbf{a}$ et $w_\ell \geq 3/2$. En outre, $\ell/2 \leq |V_\ell| \leq \ell$ et, si $U_\ell \neq \varepsilon$, les dernières lettres de U_ℓ et de V_ℓ diffèrent.

Posant $w = 1 + 1/\kappa$, nous avons montré que, pour tout entier $\ell \geq n_0$, il existe deux mots finis U_ℓ et V_ℓ tels que

(v) $U_\ell V_\ell^w$ est un préfixe de $\mathbf{a}$;

(vi) $|U_\ell| \leq (2\kappa + 1)|V_\ell|$;

(vii) $\ell/2 \leq |V_\ell| \leq \kappa\ell$;

(viii) si U_ℓ n'est pas le mot vide, les dernières lettres de U_ℓ et de V_ℓ diffèrent.

D'autre part, un rapide calcul montre que cette construction garantit également que

$$\frac{|U_\ell V_\ell^w|}{|U_\ell V_\ell|} \geq 1 + \frac{1}{2\kappa + 1}. \tag{9.3}$$

Cette dernière propriété ne sert pas ici, mais elle sera utilisée dans la partie 10.

Nous insistons sur le fait que les mots U_ℓ, $\ell \geq 1$, ainsi construits ne sont pas nécessairement tous différents.

Soit $\mathbf{a} = (a_k)_{k \geq 1}$ la suite de complexité sous-linéaire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ telle que

$$\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{b^k}.$$

Le raisonnement ci-dessous nous permet d'associer à la suite $\mathbf{a}$ deux suites de mots finis $(U_\ell)_{\ell \geq 1}$ et $(V_\ell)_{\ell \geq 1}$ vérifiant les propriétés (v) à (viii). Notons respectivement ρ_ℓ et σ_ℓ les longueurs de U_ℓ et de V_ℓ, pour $\ell \geq 1$. Comme

$$\frac{\ell}{2} \leq \rho_\ell + \sigma_\ell \leq (\kappa + 1)\ell,$$

il vient, pour tout entier ℓ,

$$\begin{aligned} 2(\rho_\ell + \sigma_\ell) \leq 2(\kappa + 1)\ell &\leq \rho_{4(\kappa+1)\ell} + \sigma_{4(\kappa+1)\ell} \\ &\leq 4(\kappa + 1)^2 \ell \leq 8(\kappa + 1)^2 (\rho_\ell + \sigma_\ell). \end{aligned}$$

En posant $c = 8(\kappa + 1)^2$, $r_j = \rho_{4^j(\kappa+1)^j}$ et $s_j = \sigma_{4^j(\kappa+1)^j}$, pour $j \geq 1$, on a donc

$$2(r_j + s_j) \leq r_{j+1} + s_{j+1} \leq c(r_j + s_j).$$

Comme $r_j \leq c s_j$, les conditions (i) et (iii) du théorème sont vérifiées. De plus, la suite $(s_j)_{j \geq 1}$ est bien strictement croissante.

Pour $\ell \geq n_0$, définissons l'entier p_j par l'égalité

$$\frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)} = 0.U_{4^j(\kappa+1)^j}V_{4^j(\kappa+1)^j}^{\infty}. \tag{9.4}$$

Notons que le développement du nombre rationnel $p_j/b^{r_j}(b^{s_j}-1)$ donné en (9.4) peut éventuellement correspondre à un développement impropre en base b. Cela se produit précisément lorsque $V_{4^j(\kappa+1)^j}^{\infty} = (b-1)^{\infty}$, mais n'est source d'aucune difficulté supplémentaire. Les entiers p_j et $b^{r_j}(b^{s_j}-1)$ peuvent très bien avoir des diviseurs commun, néanmoins, la condition (viii) assure que b ne divise pas p_j si $r_j \geq 1$. En effet, un calcul facile montre qu'alors p_j est égal à $v_j - u_j$ plus un multiple de b, où v_j et u_j sont, respectivement, les derniers chiffres de $V_{4^j(\kappa+1)^j}$ et de $U_{4^j(\kappa+1)^j}$. Ceci montre que la condition (ii) est vérifiée.

Il découle de (v) et de (9.4) que

$$\left|\xi - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)}\right| < \frac{1}{b^{r_j+ws_j}}. \tag{9.5}$$

Observons que (vi) entraîne

$$\begin{aligned} r_j + ws_j \geq r_j + \frac{w-1}{2}\cdot s_j + \frac{w+1}{2}\cdot s_j &\geq \left(1 + \frac{1}{2\kappa(2\kappa+1)}\right) r_j + \left(1+\frac{1}{2\kappa}\right) s_j \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2\kappa(2\kappa+1)}\right)(r_j + s_j), \end{aligned}$$

pour j assez grand. Par conséquent, on déduit de (9.5) et de la définition de c que

$$\left|\xi - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)}\right| < \frac{1}{2\,b^{(1+1/c)(r_j+s_j)}},$$

qui est exactement la condition (iv). □

9.2. Approximation algébrique des nombres de complexité sous-linéaire

Dans cette partie, nous achevons la démonstration du théorème 1.1. Étant donné un nombre réel de complexité sous-linéaire, nous utilisons la suite de rationnels $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ qui lui est associée par la proposition 9.1 afin d'appliquer le théorème ES et d'en déduire la mesure de transcendance recherchée.

Démonstration du théorème 1.1. Soit ξ un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire en base b et vérifiant $0 < \xi < 1$. La proposition 9.1 assure l'existence d'un nombre réel $c \geq 3$, de deux suites d'entiers positifs ou nuls $(r_j)_{j\geq 1}$, et $(p_j)_{j\geq 1}$, et d'une suite strictement croissante d'entiers positifs $(s_j)_{j\geq 1}$ tels que, pour tout $j \geq 1$,

(i) $r_j \leq cs_j$;

(ii) si $r_j \geq 1$, alors b ne divise pas p_j ;

(iii) $2(r_j + s_j) \le r_{j+1} + s_{j+1} \le c(r_j + s_j)$;

(iv)

$$\left| \xi - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j} - 1)} \right| < \frac{1}{2b^{(1+1/c)(r_j+s_j)}}.$$

Nous insistons sur le fait que p_j et $b^{r_j}(b^{s_j} - 1)$ ne sont pas supposés être premiers entre eux. Nous montrons dans cette partie que les conditions (i) à (iv) suffisent pour borner la qualité de l'approximation de ξ par des nombres algébriques de degré d avec $d \ge 2$.

En posant $t_j = r_j + s_j$ pour $j \ge 1$, la condition (iii) s'écrit

$$2t_j \le t_{j+1} \le ct_j, \quad (j \ge 1), \tag{9.6}$$

et la condition (i) entraîne

$$s_j \ge \frac{t_j}{c+1}, \quad (j \ge 1). \tag{9.7}$$

Comme la suite $(s_j)_{j\ge1}$ est strictement croissante, nous pouvons supposer en outre que $t_1 \ge 6$.

Soit d un entier, $d \ge 2$, et soit α un nombre algébrique réel de degré d et de hauteur strictement supérieure à 3^{12c} et à 3^d. Soit j l'entier donné par

$$b^{t_{j-1}} \le 3^d H(\alpha) < b^{t_j}. \tag{9.8}$$

Définissons le nombre réel χ par

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi}.$$

Nous allons majorer χ en fonction de d.

Soit M le plus grand nombre entier pour lequel $2b^{wc^{M-1}t_j} < H(\alpha)^\chi$, où nous avons posé $w = 1 + 1/c$. Par (9.6), pour tout entier $h = 0, \ldots, M-1$, on a $2b^{wt_{j+h}} \le 2b^{wc^{M-1}t_j}$ et donc

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_{j+h}}{b^{r_{j+h}}(b^{s_{j+h}} - 1)} \right| &\le \left| \xi - \frac{p_{j+h}}{b^{r_{j+h}}(b^{s_{j+h}} - 1)} \right| + |\xi - \alpha| \\ &\le \frac{1}{2b^{wt_{j+h}}} + H(\alpha)^{-\chi} < \frac{1}{b^{wt_{j+h}}}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

On a alors

$$|b^{t_{j+h}}\alpha - b^{r_{j+h}}\alpha - p_{j+h}| < b^{-(w-1)t_{j+h}} = b^{-t_{j+h}/c}.$$

Nous procédons comme dans la démonstration du Theorem 2.1 de [15]. Considérons les formes linéaires

$$L_{1\infty}(X,Y,Z) = X, \qquad L_{2\infty}(X,Y,Z) = Y, \qquad L_{3\infty}(X,Y,Z) = \alpha X - \alpha Y - Z,$$

et, pour tout diviseur premier p de b,

$$L_{1p}(X,Y,Z) = X, \qquad L_{2p}(X,Y,Z) = Y, \qquad L_{3p}(X,Y,Z) = Z.$$

Posons $\varepsilon = 1/c$ et, pour $h = 0, \ldots, M-1$, notons

$$\mathbf{x}_h = (b^{t_{j+h}}, b^{r_{j+h}}, p_{j+h}).$$

Posons

$$k := \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 1. \tag{9.10}$$

Pour tout $h = 0, \ldots, M-1$, il existe $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tel que

$$\frac{\ell}{k} \leq \frac{r_{j+h}}{t_{j+h}} < \frac{\ell+1}{k}.$$

Pour l'instant, nous fixons $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ et ne traitons que les $h \in \{0, \ldots, M-1\}$ pour lesquels

$$\frac{\ell}{k} \leq \frac{r_{j+h}}{t_{j+h}} < \frac{\ell+1}{k}. \tag{9.11}$$

Posons

$$e_{1\infty} = 1, \quad e_{2\infty} = \frac{\ell+1}{k}, \quad e_{3\infty} = -\varepsilon,$$

et, pour tout diviseur premier p de b,

$$e_{1p} = \frac{\log |b|_p}{\log b}, \quad e_{2p} = \frac{\log |b|_p}{\log b} \cdot \frac{\ell}{k}, \quad e_{3p} = 0,$$

où la valeur absolue p-adique est normalisée de telle sorte que $|b|_p = p^{-1}$. Comme $|\xi| < 1$, on a $\max\{b^{t_{j+h}}, b^{r_{j+h}}, p_{j+h}\} = b^{t_{j+h}}$ pour tout $h = 0, \ldots, M-1$, et le triplet $\mathbf{x}_h$ est solution du sytème d'inégalités

$$|L_{ip}(\mathbf{x})|_p \leq (\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\})^{e_{ip}} \quad (p \in \mathcal{S},\ i = 1, 2, 3), \tag{9.12}$$

où $\mathcal{S} = \{\infty\} \cup \{p : p \text{ divise } b\}$.

Dans la suite, les constantes $c_1, c_2, \ldots$ sont des constantes numériques. Le théorème ES et (9.8) assurent alors que les triplets $\mathbf{x}_h$, $0 \leq h \leq M-1$, vérifiant (9.11) sont contenus dans au plus

$$c_1 c^7 \log(8d) \log\log(8d)$$

sous-espaces rationnels propres de $\mathbf{Q}^3$. Comme l'entier ℓ apparaissant dans (9.11) ne prend que k valeurs, il découle de (9.10) que les triplets $\mathbf{x}_h$, $0 \leq h \leq M-1$, sont contenus dans au plus

$$T < c_2 c^8 \log(8d) \log\log(8d) \tag{9.13}$$

sous-espaces rationnels propres de $\mathbf{Q}^3$.

Posons

$$L = \lceil 2 \log\bigl(16d(c+1)\bigr) \rceil, \tag{9.14}$$

et supposons qu'un sous-espace rationnel propre de $\mathbf{Q}^3$ contienne L points entiers $\mathbf{x}_h$ qui sont solutions de (9.12). Cela signifie qu'il existe un triplet (x, y, z) d'entiers non tous nuls et des entiers $0 \le i_1 < \ldots < i_L < M$ vérifiant

$$xb^{r_{j+i_k}+s_{j+i_k}} + yb^{r_{j+i_k}} + zp_{j+i_k} = 0, \quad (1 \le k \le L). \tag{9.15}$$

La condition (iii) entraîne que les vecteurs $\mathbf{x}_{i_1}$ et $\mathbf{x}_{i_2}$ ne sont pas colinéaires. Le lemme 8.3 assure que l'on peut choisir x, y et z de telle sorte que

$$\max\{|x|, |y|, |z|\} \le 2b^{2t_{j+i_2}}. \tag{9.16}$$

Considérons un entier k tel que $1 \le k \le L$. Réécrivons (9.15) sous la forme

$$x + \frac{y}{b^{s_{j+i_k}}} + z\alpha + z\left(\frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}+s_{j+i_k}}} - \alpha\right) = 0,$$

et observons que d'après (9.9), (iv) et le fait que $|\xi| < 1$, il vient

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}+s_{j+i_k}}} - \alpha\right| &\le \left|\frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}+s_{j+i_k}}} - \frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}}(b^{s_{j+i_k}} - 1)}\right| + \left|\frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}}(b^{s_{j+i_k}} - 1)} - \alpha\right| \\ &\le \frac{2}{b^{s_{j+i_k}}}.\end{aligned}$$

Pour $k = L$, il découle alors de (9.15) et de (9.16) que

$$|x + z\alpha| \le \frac{3\ \max\{|x|, |y|, |z|\}}{b^{s_{j+i_L}}} \le 6b^{2t_{j+i_2}-s_{j+i_L}}. \tag{9.17}$$

Comme α est irrationnel, le lemme 8.2, (9.8) et (9.16) entraînent que

$$\begin{aligned}|x + z\alpha| &\ge 2^{-2d}\, z^{-d+1}\, H(\alpha)^{-1} \\ &\ge 2^{-2d}\, z^{-d+1}\, b^{-t_j} \ge 2^{-2d}\, (2b^{2t_{j+i_2}})^{-d+1}\, b^{-t_j}.\end{aligned} \tag{9.18}$$

Il découle de (9.6), (9.7) et (9.14) que

$$2t_{j+i_2} - s_{j+i_L} \le 2t_{j+i_2} - \frac{t_{j+i_L}}{c+1} \le 2t_{j+i_2}\left(1 - \frac{2^{L-2}}{c+1}\right) \le -4dt_{j+i_2}. \tag{9.19}$$

Par conséquent, (9.17), (9.18) et (9.19) mènent à

$$4^{-2d}b^{-3dt_{j+i_2}} \le 2^{-2d}\,(2b^{2t_{j+i_2}})^{-d+1}\, b^{-t_j} \le |x + z\alpha| \le 6b^{2t_{j+i_2}-s_{j+i_L}},$$

ce qui contredit $t_{j+i_2} \ge t_1 \ge 6$.

Ainsi, chacun des T sous-espaces introduits précédemment contient au plus L points de la suite $\{\mathbf{x}_h,\ 0 \le h \le M-1\}$. La majoration de T donnée par l'inégalité (9.13) entraîne alors que

$$M < c_3c^8(\log c)(\log 8d)^2(\log\log 8d).$$

En outre, (9.6), (9.8) et la définition de χ donnent

$$H(\alpha)^\chi \leq 2b^{wc^M t_j} \leq 2\big(3^d H(\alpha)\big)^{wc^{M+1}} \leq 2\big(H(\alpha)\big)^{2wc^{M+1}},$$

d'où

$$\chi \leq 3wc^{M+1} \leq (8d)^{c_4 c^9 (\log 8d)(\log\log 8d)}.$$

Ainsi, si ξ n'est pas un nombre de Liouville, le lemme 8.1 implique que

$$w_d(\xi) \leq \max\{w_1(\xi), (8d)^{c_5 c^9 (\log 8d)(\log\log 8d)}\},$$

pour tout entier $d \geq 1$, ce qui termine cette démonstration.

Il découle de la démonstration de la proposition 9.1 que la constante c peut-être choisie égale à $8(\kappa+1)^2$, où κ est un entier tel que $p(n, \xi, b) \leq \kappa n$ pour tout n suffisamment grand. En explicitant alors la constante numérique c_4, on obtient la majoration

$$w_d(\xi) \leq \max\{w_1(\xi), (2d)^{10^{150}\kappa^{18}(\log 3d)(\log\log 3d)}\}, \tag{9.20}$$

pour tout entier $d \geq 1$. $\square$

10. Approximation rationnelle des nombres de complexité sous-linéaire

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème 2.1, qui illustre comment l'exposant diophantien associé à un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire permet d'en contrôler l'approximation rationnelle.

Avant d'établir le théorème 2.1, nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

Lemme 10.1. *Soient $b \geq 2$ un entier, U et V deux mots finis sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ de longueur r et s, respectivement. Posons*

$$\frac{p}{q} := 0.a_1 a_2 \ldots = 0.UV^\infty.$$

Soit $\xi := 0.b_1 b_2 \ldots$ un nombre réel tel qu'il existe un entier $j \geq r+1$ vérifiant :

(i) $a_n = b_n$, *pour* $1 \leq n < j$;

(ii) $a_j \neq b_j$.

Alors,

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{b^{j+s}}.$$

Démonstration. Posons $a_j = l$ et $b_j = m$. Supposons tout d'abord que $l > m$. On a donc $l \geq 1$ et

$$\frac{p}{q} > 0.a_1 a_2 \ldots a_{j-1} l \underbrace{00\ldots0\ldots0}_{s-1 \text{ fois}} l,$$

tandis que

$$\xi \leq 0.a_1a_2\ldots a_{j-1}(m+1) \leq 0.a_1a_2\ldots a_{j-1}l.$$

Ceci donne

$$\frac{p}{q} - \xi > \frac{1}{b^{j+s}}.$$

Supposons maintenant que $m > l$. On a alors $l \leq b-2$ et

$$p/q < 0.a_1a_2\ldots a_{j-1}l\,\underbrace{(b-1)(b-1)\ldots(b-1)}_{s-1 \text{ fois}}(l+1)$$

$$\leq 0.a_1a_2\ldots a_{j-1}l\,\underbrace{(b-1)(b-1)\ldots(b-1)}_{s \text{ fois}},$$

tandis que

$$\xi \geq 0.a_1a_2\ldots a_{j-1}m \geq 0.a_1a_2\ldots a_{j-1}(l+1).$$

Cela entraîne

$$\xi - \frac{p}{q} > \frac{1}{b^{j+s}},$$

et le lemme est démontré. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème 2.1.

Démonstration du théorème 2.1. On suppose que les paramètres b, c, $\mathbf{a}$ et ξ introduits dans l'énoncé du théorème sont désormais fixés. Soient δ un nombre strictement positif et (p,q) une paire d'entiers positifs. Nous allons montrer que, pour q suffisamment grand, on a toujours

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{M+\delta}}, \tag{10.1}$$

où $M = (2c+1)^3(\mathrm{Dio}(\mathbf{a})+1)$.

Nous allons tout d'abord introduire une suite de nombres rationnels qui approchent assez bien ξ (voir l'inégalité (10.8)) et dont les dénominateurs ne croissent pas trop rapidement (voir l'inégalité (10.7)).

Rappelons brièvement les conclusions partielles de l'étude combinatoire menée dans la partie 9.1 en réécrivant les assertions (v) à (vii). Il existe deux suites de mots finis $(U_\ell)_{\ell\geq 1}$ et $(V_\ell)_{\ell\geq 1}$, une suite de nombres réels $(w_\ell)_{\ell\geq 1}$ et une suite d'entiers $(p_\ell)_{\ell\geq 1}$ telles que, si l'on pose $r_\ell = |U_\ell|$, $s_\ell = |V_\ell|$ et $q_\ell = b^{r_\ell}(b^{s_\ell}-1)$, on a

$$b^{\ell/2} - 1 \leq q_\ell \leq b^{(c+1)\ell} - 1, \tag{10.2}$$

et

$$\frac{p_\ell}{q_\ell} := 0.U_\ell {V_\ell}^{\infty}.$$

En outre, les $|U_\ell V_\ell^{w_\ell}|$ premières lettres de ξ et p_ℓ/q_ℓ coïncident, et donc

$$\left|\xi - \frac{p_\ell}{q_\ell}\right| \le \frac{1}{b^{|U_\ell V_\ell^{w_\ell}|}}.$$

D'autre part, l'inégalité (9.3) stipule que $|U_\ell V_\ell^{w_\ell}|/|U_\ell V_\ell| \ge 1 + 1/(2c+1)$, d'où

$$\left|\xi - \frac{p_\ell}{q_\ell}\right| \le \frac{1}{\left(b^{|U_\ell V_\ell|}\right)^{1+1/(2c+1)}} = \frac{1}{\left(b^{r_\ell + s_\ell}\right)^{1+1/(2c+1)}} < \frac{1}{q_\ell^{1+1/(2c+1)}}. \tag{10.3}$$

Le pas suivant consiste à déduire du lemme 10.1 une bonne minoration de la distance de ξ à p_ℓ/q_ℓ. Posons $d = \mathrm{Dio}(\mathbf{a})$ et soit ε un nombre réel positif. Par définition de $\mathrm{Dio}(\mathbf{a})$, si $U_\ell V_\ell^s$ est un préfixe du mot $\mathbf{a}$, alors $|U_\ell V_\ell^s| < |U_\ell V_\ell|(d + \varepsilon/3)$, dès que ℓ est assez grand. Par conséquent, pour un tel ℓ, au maximum les $|U_\ell V_\ell|(d + \varepsilon/2)$ premiers chiffres de ξ et p_ℓ/q_ℓ coïncident. Par (10.3), les hypothèses du lemme 10.1 sont satisfaites pour un entier j vérifiant $(r_\ell + s_\ell)(1 + 1/(2c+1)) < j < (r_\ell + s_\ell)(d + \varepsilon/2)$. Nous obtenons donc

$$\left|\xi - \frac{p_\ell}{q_\ell}\right| \ge \frac{1}{b^{(r_\ell+s_\ell)(d+\varepsilon/2)+s_\ell}} > \frac{1}{\left(b^{r_\ell}(b^{s_\ell} - 1)\right)^{d+1+\varepsilon}} = \frac{1}{q_\ell^{d+1+\varepsilon}}, \tag{10.4}$$

pour ℓ assez grand. À présent, nous fixons un nombre $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$(2c+1)\varepsilon + (2c+1)\varepsilon^2 + (2c+1)d\varepsilon + (2c+1)^3\varepsilon < \delta/2. \tag{10.5}$$

Soit $n_1 \ge n_0$ un entier tel que (10.5) est vraie pour tout $\ell \ge n_1$.

Le fait que la suite $(q_n)_{n\ge 1}$ n'est pas nécessairement croissante poserait problème dans la suite de la démonstration. Nous commençons donc par en extraire une sous-suite convenable. Posons $\ell_1 = n_1$ et $\ell_{n+1} = \lceil (2c+1)\ell_n \rceil$ pour $n \ge 1$. Notons alors $P_n = p_{\ell_n}$ et $Q_n = q_{\ell_n}$. Il découle alors de (10.2) que

$$\begin{aligned} b^{(c+1/2)\ell_n} - 1 < b^{\ell_{n+1}/2} - 1 \le Q_{n+1} &= q_{\ell_{n+1}} \\ &\le b^{(c+1/2)\ell_{n+1}} - 1 < b^{(2c^2+2c+1/2)n_\ell + 2c+1}, \end{aligned} \tag{10.6}$$

tandis que

$$b^{\ell_n/2} - 1 \le Q_n = q_{\ell_n} \le b^{(c+1/2)\ell_n} - 1. \tag{10.7}$$

En résumé, nous avons établi l'existence d'une suite $(P_n/Q_n)_{n\ge 1}$ de rationnels et d'un entier $n_2 > n_1$ tels que

$$\frac{1}{Q_n^{d+1+\varepsilon}} < \left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^{1+1/(2c+1)}}, \quad (n \ge n_2), \tag{10.8}$$

et

$$Q_n < Q_{n+1} < Q_n^{(2c+1)^2+\varepsilon}, \quad (n \ge n_2). \tag{10.9}$$

Les inégalités (10.8) et (10.9) se déduisent immédiatement de (10.3), (10.4), (10.6) et (10.7).

Abordons maintenant la dernière étape de la démonstration. Soit p/q un rationnel avec q vérifiant

$$2q \geq Q_{n_2+1}^{1/(2c+1)}, \quad q \geq 2^{1+2M/\delta}, \quad q \geq 2^{1+(2c+1)^3+\delta/2}.$$

Supposons en outre

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(2q)^{1+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)}}\cdot \tag{10.10}$$

Observons tout d'abord que si (10.10) n'est pas vérifiée, alors (10.1) l'est. En effet, dans ce cas (10.5) implique $(2c+1)\varepsilon < \delta/2$ et l'on obtient $2+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon) < M+\delta$, puis, comme $q \geq 2^{1+(2c+1)^3+\delta/2} > 2^{1+(2c+1)^3+(2c+1)\varepsilon}$, on a

$$(2q)^{1+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)} < q^{2+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)} < q^{M+\delta},$$

et (10.1) est satisfaite par le rationnel p/q.

Comme, par hypothèse, $2q \geq Q_{n_3+1}^{1/(2c+1)}$, il découle de (10.9) qu'il existe un unique entier $n_3 > n_2$ tel que

$$Q_{n_3-1} \leq (2q)^{2c+1} < Q_{n_3} < Q_{n_3-1}^{(2c+1)^2+\varepsilon}. \tag{10.11}$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\left|\xi - \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}}\right| \geq \left|\,\left|\xi - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}} - \frac{p}{q}\right|\,\right|\cdot \tag{10.12}$$

Si p/q et P_{n_3}/Q_{n_3} sont distincts, on a la minoration triviale

$$\left|\frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qQ_{n_3}}\cdot$$

En outre,

$$Q_{n_3} \leq Q_{n_3-1}^{(2c+1)^2+\varepsilon} \leq (2q)^{(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)}$$

et l'on déduit de l'inégalité précédente que

$$\left|\frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{2}{(2q)^{1+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)}} > 2\left|\xi - \frac{p}{q}\right|\cdot$$

Alors, (10.10) et (10.12) entraînent que si $p/q \neq P_{n_3}/Q_{n_3}$,

$$\left|\xi - \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}}\right| > \frac{1}{2qQ_{n_3}}\cdot$$

Il découle de (10.11) que $2q < Q_{n_3}^{1/(2c+1)}$, d'où

$$\left|\xi - \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}}\right| > \frac{1}{Q_{n_3}^{1+1/(2c+1)}} ,$$

en contradiction avec (10.8). Par conséquent, sous l'hypothèse (10.10), on a nécessairement $p/q = P_{n_3}/Q_{n_3}$. Dans ce cas, comme $n_3 > n_2$, on déduit de (10.8) que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \left|\xi - \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}}\right| > \frac{1}{Q_{n_3}^{d+1+\varepsilon}}$$

et, comme $(2q)^{(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)} \geq Q_{n_3}$, on obtient

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{(2q)^{(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)(d+1+\varepsilon)}}.$$

Il découle alors de (10.5) et de l'hypothèse $q \geq 2^{1+2M/\delta}$ que

$$(2q)^{(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)(d+1+\varepsilon)} \leq (2q)^{M+\delta/2} \leq q^{M+\delta/2} 2^{M+\delta/2} \leq q^{M+\delta}$$

et ceci implique

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{M+\delta}}.$$

L'inégalité (10.1) est par conséquent satisfaite pour tout

$$q \geq \max\left\{\frac{Q_{n_2+1}^{1/(2c+1)}}{2}, 2^{1+2M/\delta}, 2^{1+(2c+1)^3+\delta/2}\right\},$$

ce qui termine cette démonstration. □

11. L'exposant diophantien des mots sturmiens

Comme nous l'avons déjà mentionné, les suites sturmiennes sont les suites de complexité minimale parmi les suites apériodiques; elles vérifient $p(n) = n + 1$ pour tout entier n. Dans cette partie, nous étudions l'exposant diophantien des mots sturmiens. Plus précisément, nous caractérisons les mots sturmiens dont l'exposant diophantien est fini.

Nous utilisons la caractérisation arithmétique des suites sturmiennes rappelée cidessous.

Pour $(x, \alpha) \in [0, 1[\times([0, 1] \setminus \mathbf{Q})$, on définit la suite $\mathbf{s}_{\alpha,x} = (s_{\alpha,x,n})_{n\geq 0}$ par

$$s_{\alpha,x,n} = a \text{ si } \{x + n\alpha\} \in [0, 1 - \alpha[\text{ et } s_{\alpha,x,n} = b \text{ si } \{x + n\alpha\} \in [1 - \alpha, 1[,$$

et la suite $\mathbf{s'}_{\alpha,x} = (s'_{\alpha,x,n})_{n\geq 0}$ par

$$s'_{\alpha,x,n} = a \text{ si } \{x+n\alpha\} \in]0, 1-\alpha] \text{ et } s'_{\alpha,x,n} = b \text{ si } \{x+n\alpha\} \in]1-\alpha, 1[\cup\{0\}.$$

Les deux suites $\mathbf{s}_{\alpha,x}$ et $\mathbf{s'}_{\alpha,x}$ sont des suites sturmiennes. Réciproquement, pour toute suite sturmienne $\mathbf{u}$, il existe un unique couple $(x,\alpha) \in [0,1[\times([0,1]\setminus \mathbf{Q})$ tel que $\mathbf{u} = \mathbf{s}_{\alpha,x}$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{s'}_{\alpha,x}$. Le nombre irrationnel α est l'angle de la suite sturmienne $\mathbf{u}$. Il correspond à la fréquence d'apparition de la lettre b dans la suite $\mathbf{u}$.

Le résultat suivant montre que la finitude de l'exposant diophantien d'une suite sturmienne dépend des propriétés diophantiennes de son angle.

Proposition 11.1. *Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite sturmienne d'angle α. Alors,* $\mathrm{Dio}(\mathbf{u})$ *est fini si, et seulement si, le nombre réel α est à quotients partiels bornés.*

Démonstration. Considérons une suite sturmienne $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 0}$. Il existe un couple $(x,\alpha) \in [0,1[\times([0,1]\setminus \mathbf{Q})$ tel que soit $\mathbf{u} = \mathbf{s}_{\alpha,x}$, soit $\mathbf{u} = \mathbf{s'}_{\alpha,x}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\mathbf{u} = \mathbf{s}_{\alpha,x}$ puisque les deux suites $\mathbf{s}_{\alpha,x}$ et $\mathbf{s'}_{\alpha,x}$ ont le même exposant diophantien. En effet, l'irrationalité de α implique que ces deux suites diffèrent d'au plus un terme.

Supposons dans un premier temps que α est un nombre réel à quotients partiels bornés. Nous rappelons que l'indice d'un mot infini $\mathbf{a}$, généralement noté $\mathrm{Ind}(\mathbf{a})$, est le supremum des nombres réels s pour lesquels il existe un mot fini non vide V tel que V^s ait une occurrence dans le mot $\mathbf{a}$. Cette définition implique que pour tout mot infini $\mathbf{a}$, on a $\mathrm{Dio}(\mathbf{a}) \leq \mathrm{Ind}(\mathbf{a})$. D'autre part, un résultat de Mignosi [32] stipule qu'une suite sturmienne dont l'angle est un nombre réel à quotients partiels bornés a toujours un indice fini. Il suit donc que $\mathrm{Dio}(\mathbf{u})$ est nécessairement fini si l'angle de $\mathbf{u}$ est un nombre réel à quotients partiels bornés.

Nous supposons à présent que α est un nombre réel dont la suite des quotients partiels $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée et nous allons prouver que $\mathrm{Dio}(\mathbf{u}) = +\infty$. D'après la définition de l'exposant diophantien, il suffit de montrer que pour tout entier p, il existe deux mots finis U, V, et un nombre réel $s > 0$ tels que :

(a) UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$;

(b) $\frac{|UV^s|}{|UV|} \geq p$.

Considérons à présent un entier p strictement positif. Nous allons démontrer qu'il existe toujours un tel triplet (U,V,s).

Puisque la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée, il existe un entier $k > 0$ tel que $a_{k+1} > 4p^2$. Notons p_k/q_k le k-ième convergent du nombre α. Nous supposons que k est choisi assez grand pour garantir que

$$\frac{1}{4q_k} < \min\{\alpha, 1-\alpha\} \quad \text{et} \quad q_k > p. \tag{11.1}$$

Nous supposons également que k est pair, le cas où k est impair se traitant de façon similaire. Nous rappelons que sous cette hypothèse, on a

$$0 < q_k\alpha - p_k = \{q_k\alpha\} = \|q_k\alpha\| < \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{a_{k+1}q_k} < \frac{1}{4p^2q_k}\cdot \tag{11.2}$$

Alors, pour des entiers j et r tels que $0 \leq j < q_k$ et $1 \leq r \leq p^2$, on obtient

$$\|(x + j\alpha) - (x + (j + rq_k)\alpha)\| = \|rq_k\alpha\| \leq r\|q_k\alpha\| \leq \frac{r}{q_{k+1}}$$

et donc

$$\|(x + j\alpha) - (x + (j + rq_k)\alpha)\| < \frac{1}{4q_k}\cdot \tag{11.3}$$

Nous devons alors distinguer plusieurs cas et, pour cela, nous allons introduire les notations suivantes. Étant donné un entier j tel que $0 \leq j < q_k$, nous disons que

(i) j est de type A si $u_j = a$ et s'il existe un entier r, $1 \leq r \leq p^2$, tel que $u_{j+rq_k} = b$;

(ii) j est de type B si $u_j = b$ et s'il existe un entier r, $1 \leq r \leq p^2$, tel que $u_{j+rq_k} = a$;

(iii) j est de type C s'il n'est ni de type A, ni de type B, c'est-à-dire, si $u_j = u_{j+rq_k}$ pour tout entier r, $1 \leq r \leq p^2$.

Tout entier j, $0 \leq j < q_k$, est exactement d'un seul type A, B ou C. Tout d'abord, notons que j est de type A signifie que $\{x + j\alpha\}$ est très proche de $1 - \alpha$. Plus précisément, (11.3) donne

$$1 - \alpha - \frac{1}{4q_k} < \{x + j\alpha\} < 1 - \alpha. \tag{11.4}$$

De même, si j est de type B, alors $\{x + j\alpha\}$ est très proche de 1 et (11.3) donne

$$1 - \frac{1}{4q_k} < \{x + j\alpha\} < 1. \tag{11.5}$$

Il est important pour la suite de remarquer qu'il existe au plus un entier de chacun des types A et B. En effet, dans le cas contraire, les inégalités (11.4) et (11.5) impliqueraient l'exitence de deux entiers i et j, $0 \leq i < j < q_k$, tels que

$$0 < \{(j - i)\alpha\} < \frac{1}{2q_k}\cdot$$

Cette dernière inégalité fournirait une contradiction puisque $1 \leq j - i < q_k$. En effet, nous rappelons que si q est un entier strictement positif tel que

$$\|q\alpha\| < \frac{1}{2q_k},$$

alors $q \geq q_k$. Pour les mêmes raisons, notons que si un entier j est de type A ou B, l'entier r qui lui est associé dans (i) ou (ii) est unique.

Nous devons à présent distinguer quatre cas.

(i) Premièrement, supposons que tout entier j, $0 \leq j < q_k$, est de type C. Dans ce cas, nous avons

$$u_j = u_{j+lq_k}, \tag{11.6}$$

pour tout couple (j,l) tel que $0 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p-1$. Soit V le préfixe de longueur q_k de $\mathbf{u}$. Alors, l'égalité (11.6) implique que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$, où U désigne le mot vide et $s = p$. De plus, d'après (11.1), on a

$$\frac{|UV^s|}{|UV|} = p.$$

(ii) Supposons à présent qu'il existe un entier j_0 de type A avec $0 \leq j_0 < q_k - 1$. Alors, les inégalités (11.1), (11.2) et (11.3) impliquent l'existence d'un entier r_0, $1 \leq r_0 \leq p^2$, tel que

$$\begin{aligned} 0 < 1 - \alpha - \frac{1}{4q_k} < \{x + j_0\alpha\} < \{x + (j_0 + q_k)\alpha\} \\ < \ldots < \{x + (j_0 + (r_0 - 1)q_k)\alpha\} < 1 - \alpha \end{aligned} \tag{11.7.A}$$

et

$$1 - \alpha \leq \{x + (j_0 + r_0 q_k)\alpha\} < \ldots < \{x + (j_0 + p^2 q_k)\alpha\} < 1 - \alpha + \frac{1}{4q_k} < 1. \tag{11.7.B}$$

On obtient immédiatement que

$$1 - \alpha < 1 - \frac{1}{4q_k} < \{x + (j_0 + 1)\alpha\} < \ldots < \{x + (j_0 + 1 + (r_0 - 1)q_k)\alpha\} < 1 \tag{11.8.A}$$

tandis que

$$0 \leq \{x + (j_0 + 1 + r_0 q_k)\alpha\} < \ldots < \{x + (j_0 + 1 + p^2 q_k)\alpha\} < \frac{1}{4q_k} < 1 - \alpha. \tag{11.8.B}$$

Ainsi, $j_0 + 1$ est de type B et l'entier qui lui est associé (cf. (i)) est également r_0. Puisqu'il y a au plus un entier de chacun des types A et B, tout entier j, $0 \leq j < q_k$, $j \notin \{j_0, j_0+1\}$, est de type C.

(ii.a) Si $r_0 \geq p$, d'après (11.7.A), (11.8.A) et le fait que tout $0 \leq j < q_k$, $j \notin \{j_0, j_0+1\}$, est de type C, il vient

$$u_j = u_{j+lq_k}, \tag{11.9}$$

pour tout couple (j,l) tel que $0 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p-1$. Alors, l'égalité (11.9) implique que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$, où U est le mot vide, V est le préfixe de longueur q_k de $\mathbf{u}$ et $s = p$. On conclut comme dans le cas (i).

(ii.b) Si $1 \leq r_0 < p$, d'après (11.7.B), (11.8.B) et le fait que tout $0 \leq j < q_k$, $j \notin \{j_0, j_0 + 1\}$, est de type C, il vient

$$u_{j+r_0 q_k} = u_{j+r_0 q_k + l q_k}, \tag{11.10}$$

pour tout couple (j,l) tel que $0 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p^2 - r_0$. Notons $U := u_0 u_1 \ldots u_{r_0 q_k - 1}$ le préfixe de $\mathbf{u}$ de longueur $r_0 q_k$ et posons $V := u_{r_0 q_k} u_{r_0 q_k + 1} \ldots u_{r_0 q_k + q_k - 1}$ et $s = p^2 - r_0 + 1$.

Alors, l'égalité (11.10) implique que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$. Puisque $|U| = r_0 q_k$ et $|V| = q_k$, on obtient :

$$\frac{|UV^s|}{|UV|} = \frac{(p^2+1)q_k}{(r_0+1)q_k} \geq \frac{p^2+1}{p} > p.$$

(iii) Supposons que $q_k - 1$ soit de type A. Alors, d'après les inégalités (11.1), (11.2) et (11.3), il existe un entier r_0', $1 \leq r_0' \leq p^2$, tel que

$$0 < \{x + (q_k - 1)\alpha\} < \{x + (2q_k - 1)\alpha\} < \ldots < \{x + (r_0' q_k - 1)\alpha\} < 1 - \alpha \tag{11.11.A}$$

et

$$1-\alpha \leq \{x+((r_0'+1)q_k-1)\alpha\} < \ldots < \{x+((p^2+1)q_k-1)\alpha\} < 1-\alpha+\frac{1}{4q_k} < 1. \tag{11.11.B}$$

On obtient immédiatement que

$$1 - \alpha < \{x + q_k\alpha\} < \ldots < \{x + r_0' q_k \alpha\} < 1 \tag{11.12.A}$$

tandis que

$$0 \leq \{x + (r_0'+1)q_k\alpha\} < \ldots < \{x + (p^2+1)q_k\alpha\} < \frac{1}{4q_k} < 1 - \alpha. \tag{11.12.B}$$

Donc, 0 est de type B et l'entier qui lui est associé (cf. (ii)) est $r_0' + 1$. Ainsi, tout entier j, $0 < j < q_k - 1$, est de type C.

(iii.a) Si $r_0' \geq p$, on conclut comme dans le cas (ii.a) grâce aux inégalités (11.11.A) et (11.12.A), et au fait que tout entier j, $0 < j < q_k - 1$, est de type C.

(iii.b) Si $1 \leq r_0' < p$, les inégalités (11.11.B) et (11.12.B) et le fait que tout entier j, $0 < j < q_k - 1$, est de type C, impliquent que

$$u_{j+r_0' q_k} = u_{j+r_0' q_k + l q_k}, \tag{11.13.A}$$

pour tout couple (j, l) tel que $1 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p^2 - r_0'$, et

$$u_{(r_0'+1)q_k} = u_{(r_0'+1)q_k + l q_k}, \tag{11.13.B}$$

pour $1 \leq l \leq p^2 - r_0' - 1$. Soient $U = u_0 u_1 \ldots u_{r_0' q_k}$ le préfixe de $\mathbf{u}$ de longueur $r_0' q_k + 1$, V le mot $u_{r_0' q_k + 1} u_{r_0' q_k + 2} \ldots u_{(r_0'+1)q_k}$, et $s = p^2 - r_0' + 1 - 1/q_k$. Alors, les égalités (11.13.A) et (11.13.B) impliquent que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$. Puisque $|U| = r_0' q_k + 1$ et $|V| = q_k$, il vient

$$\frac{|UV^s|}{|UV|} = \frac{(p^2+1)q_k}{(r_0'+1)q_k + 1} \geq \frac{p^2+1}{p + 1/q_k} > p\left(\frac{p + 1/p^2}{p + 1/(pq_k)}\right) > p.$$

En effet, $q_k > p$ d'après (11.1).

(iv) Puisqu'il existe au plus un entier de chacun des types A et B, il ne reste plus qu'à considérer le cas où aucun entier n'est de type A et où il existe exactement un entier de type B. Alors, les inégalités (11.2) et (11.3) assurent l'existence d'un entier j_1, $0 \le j_1 < q_k$, et d'un entier r_1, $1 \le r_1 \le p^2$, tels que

$$1 - \alpha < \{x + j_1\alpha\} < \ldots < \{x + (j_1 + (r_1 - 1)q_k)\alpha\} < 1 \tag{11.14.A}$$

tandis que

$$0 \le \{x + (j_1 + r_1 q_k)\alpha\} < \ldots < \{x + (j_1 + p^2 q_k)\alpha\} < \frac{1}{4q_k} < 1 - \alpha. \tag{11.14.B}$$

Si $j_1 > 0$, alors les inégalités (11.14.A) et (11.14.B) impliquent que $j_1 - 1$ est de type A, ce qui est contraire à notre hypothèse. Ainsi, $j_1 = 0$. De plus, si $r_1 \ge 2$, les inégalités (11.14.A) et (11.14.B) impliquent que $q_k - 1$ est de type A, ce qui est également impossible. Il suit donc que $r_1 = 1$ et $j_1 = 0$, ce qui assure que

$$u_j = u_{j+lq_k}, \tag{11.15.A}$$

pour tout couple (j, l) tel que $1 \le j < q_k$ et $1 \le l \le p^2$, et

$$u_{q_k} = u_{q_k + lq_k}, \tag{11.15.B}$$

pour $1 \le l \le p^2 - 1$. Soit $U = u_0$ le préfixe de $\mathbf{u}$ de longueur 1, notons V le mot $u_1 u_2 \ldots u_{q_k}$, et posons $s = p^2 + 1 - 1/q_k$. Alors, les égalités (11.15.A) et (11.15.B) impliquent que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$. Puisque $|U| = 1$ et $|V| = q_k$, il vient d'après (11.1)

$$\frac{|UV^s|}{|UV|} = \frac{(p^2+1)q_k}{q_k + 1} = p\left(\frac{p + 1/p}{1 + 1/q_k}\right) > p.$$

Dans tous les cas, nous avons obtenu l'existence d'un triplet (U, V, s) vérifiant les conditions (a) et (b), ce qui termine cette démonstration. □

12. Remarques finales

La méthode introduite dans cet article permet également d'établir des mesures de transcendance pour les nombres p-adiques dont le développement de Hensel a une complexité sous-linéaire (voir [2], Section 6). De même, certains de nos énoncés peuvent être généralisés pour inclure l'approximation par des éléments d'un corps de nombres fixé. Ce type de résultat plus général s'applique à l'étude des développements des nombres réels dans une base β algébrique non entière [3].

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la partie 4, la méthode de Mahler introduite dans [27] est une alternative à la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt pour prouver la transcendance de certains nombres réels. Étant donnés une suite bornée d'entiers $(a_n)_{n\geq 0}$ et un entier $b \geq 2$, elle peut être utilisée pour démontrer la transcendance du nombre réel $\sum_{n\geq 0} a_n/b^n$ lorsque la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ satisfait à une équation fonctionnelle d'un certain type. Lorsque l'on démontre la transcendance d'un nombre réel à l'aide de cette méthode, il est parfois possible de placer ce nombre dans la classification de Mahler en démontrant qu'il s'agit d'un S-nombre (voir par exemple [38]). C'est en particulier le cas pour le nombre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{2^n}},$$

dont la transcendance découle également du théorème AB ; cependant, la mesure de transcendance qui résulte alors du théorème 1.1 permet seulement de dire qu'il s'agit ou bien d'un S-nombre, ou bien d'un T-nombre. De façon plus générale, les mesures de transcendance que nous obtenons grâce au théorème 1.1, bien que suffisamment précises pour impliquer que les nombres ξ considérés ne sont pas des U-nombres, ne nous permet malheureusement pas de distinguer les S-nombres des T-nombres. Même une amélioration spectaculaire des énoncés quantitatifs présentés dans la partie 7 ne nous permettrait pas, en suivant l'approche du présent travail, de montrer que la quantité $w_d(\xi)/d$ reste bornée lorsque d tend vers l'infini. Ainsi, des idées nouvelles sont certainement nécessaires pour résoudre la conjecture 4.3. Néanmoins, la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt peut être considérée comme plus générale que celle de Mahler puisqu'aucune équation fonctionnelle n'est requise, ce qui la rend bien plus souple. Notons enfin que la difficulté de distinguer les S-nombres des T-nombres n'est pas nouvelle et ne concerne pas uniquement la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt. Ainsi, bien que l'on conjecture généralement que π est un S-nombre, on sait seulement démontrer à ce jour qu'il s'agit soit d'un S-nombre, soit d'un T-nombre [30].

Références bibliographiques

[1] B. Adamczewski and J.-P. Allouche, *Reversals and palindromes in continued fractions*, Theoret. Comput. Sci. 320 (2007), 220–238.

[2] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math. 165 (2007), 547–566.

[3] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Dynamics for β-shifts and Diophantine approximation*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 27 (2007), 1695–1710.

[4] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Mesures de transcendance et aspects quantitatifs de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt*, Proc. London Math. Soc. À paraître.

[5] B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca, *Sur la complexité des nombres algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 339 (2004), 11–14.

[6] B. Adamczewski and J. Cassaigne, *On the transcendence of real numbers with a regular expansion*, J. Number Theory 103 (2003), no. 1, 27–38.

[7] B. Adamczewski and J. Cassaigne, *Diophantine properties of real numbers generated by finite automata*, Compos. Math. 142 (2006), 1351–1372.

[8] W. W. Adams and J. L. Davison, *A remarkable class of continued fractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977), 194–198.

[9] J.-P. Allouche and J. O. Shallit, Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations, Cambridge University Press, 2003.

[10] J.-P. Allouche and L. Q. Zamboni, *Algebraic irrational binary numbers cannot be fixed points of non-trivial constant length or primitive morphisms*, J. Number Theory 69 (1998), 119–124.

[11] A. Baker, *On Mahler's classification of transcendental numbers*, Acta Math. 111 (1964), 97–120.

[12] V. Berthé, C. Holton and L. Q. Zamboni, *Initial powers of Sturmian words*, Acta Arith. 122 (2006), 315–348.

[13] Y. Bugeaud, Approximation by algebraic numbers, Cambridge Tracts in Mathematics 160, Cambridge, 2004.

[14] Y. Bugeaud, *Diophantine approximation and Cantor sets*, Math. Ann. 341 (2008), 677–684.

[15] Y. Bugeaud and J.-H. Evertse, *On two notions of complexity of algebraic numbers*, Acta Arith. 133 (2008), 221–250.

[16] P. Bundschuh, *Über eine Klasse reeller transzendenter Zahlen mit explizit angebbarer g-adischer und Kettenbruch-Entwicklung*, J. reine angew. Math. 318 (1980), 110–119.

[17] A. Cobham, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory 6 (1972), 164–192.

[18] H. Davenport and K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 160–168.

[19] J.-H. Evertse and H.P. Schlickewei, *A quantitative version of the Absolute Subspace Theorem*, J. reine angew. Math. 548 (2002), 21–128.

[20] S. Ferenczi and Ch. Mauduit, *Transcendence of numbers with a low complexity expansion*, J. Number Theory 67 (1997), 146–161.

[21] I. Gheorghiciuc, *The subword complexity of a class of infinite binary words*, Adv. in Appl. Math. 39 (2007), 237–2510.

[22] J. F. Koksma, *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen*, Monats. Math. Phys. 48 (1939), 176–1810.

[23] M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[24] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Arithmetic properties of certain functions in several variables. III.*, Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977), 15–48.

[25] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations*, J. reine angew. Math. 330 (1982), 159–172.

[26] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Arithmetic properties of automata: regular sequences*, J. reine angew. Math. 392 (1988), 57–610.

[27] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann. 101 (1929), 342–367.

[28] K. Mahler, *Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. I, II*, J. reine angew. Math. 166 (1932), 118–150.

[29] K. Mahler, *On the generating function of the integers with a missing digit*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 15 (1951), 33–40.

[30] K. Mahler, *On the approximation of* π, Indag. Math. 15 (1953), 30–42.

[31] D. W. Masser, *Algebraic independence properties of the Hecke-Mahler series*, Quart. J. Math. Oxford 50 (1999), 207–230.

[32] F. Mignosi, *Infinite words with linear subword complexity*, Theoret. Comput. Science 65 (1989), 221–242.

[33] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. 60 (1938), 815–867.

[34] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II*, Amer. J. Math. 62 (1940), 1–42.

[35] B. Mossé, *Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution*, Theoret. Comput. Sci. 99 (1992), 327–334.

[36] J. Mueller and W. M. Schmidt, *On the number of good rational approximations to algebraic numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989), 859–867.

[37] Ku. Nishioka, *Algebraic independence measures of the values of Mahler's functions*, J. reine angew. Math. 420 (1991), 203–214.

[38] Ku. Nishioka, Mahler functions and transcendence, Lecture Notes in Math. 1631, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[39] N. Pytheas Fogg, Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics, Lecture Notes in Mathematics 1794, Springer, 2002.

[40] M. Queffélec, *Approximations diophantiennes des nombres sturmiens*, J. Théor. Nombres Bordeaux 14 (2002), 613–629.

[41] D. Ridout, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 4 (1957), 125–131.

[42] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 1–20; corrigendum, 169.

[43] W. M. Schmidt, T*-numbers do exist*, Symposia Math. IV, Inst. Naz. di Alta Math., Rome 1968, pp. 3–26, Academic Press, 1970.

[44] W. M. Schmidt, *Mahler's T-numbers*, 1969 Number Theory Institute, (Proc. of Symposia in Pure Math., Vol. XX, State Univ. New York, Stony Brook, N. Y., 1969), pp. 275–286, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971.

[45] W. M. Schmidt, Diophantine approximation, Lecture Notes in Mathematics 785, Springer, 1980.

[46] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, J. reine angew. Math. 206 (1961), 67–78.

Boris Adamczewski
CNRS, Université de Lyon, Université Lyon 1
Institut Camille Jordan
Bât. Braconnier, 21 avenue Claude Bernard
69622 VILLEURBANNE Cedex (FRANCE)

`Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr`

Yann Bugeaud
Université de Strasbourg
Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex (FRANCE)

`bugeaud@math.u-strasbg.fr`