Séries hypergéométriques et fonction zêta de Riemann

Christian Krattenthaler

La détermination de la nature arithmétique des valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est l'un des problèmes parmi les plus difficiles de la théorie des nombres. Les principaux résultats connus sont les suivants :

1. le théorème de Lindemann : π (et donc aussi les valeurs aux entiers pairs de la fonction zêta) est transcendant ;
2. le théorème d'Apéry : $\zeta(3)$ est irrationnel ;
3. le théorème de Rivoal [7] : l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par les valeurs $\zeta(3), \zeta(5)$, $\zeta(7), \zeta(9), \ldots$ a une dimension infinie ;
4. des versions quantitatives du théorème précédent, comme un théorème de Zudilin [12] affirmant qu'au moins une des valeurs $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel.

Les travaux récents (tel que [2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12]) ont mis en évidence que tous ces théorèmes peuvent être démontrés au moyen de méthodes issues du monde hypergéométrique, qui constitue donc un socle de base de ces résultats.

Plus précisément, une première approche consiste à analyser dans deux directions une série hypergéométrique bien choisie, dépendant d'un paramètre entier n : on détermine d'une part le comportement asymptotique de cette série quand n tend vers l'infini et, d'autre part, on démontre que la série peut s'écrire comme combinaison linéaire sur $\mathbb{Q}$ de 1 et $\zeta(s_1)$, $\zeta(s_2)$, …, $\zeta(s_m)$ (où $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sont des entiers positifs). On obtient ainsi des suites d'approximations simultanées des valeurs de zêta dont il s'agit d'extraire une éventuelle information diophantienne. Pour cela, une fois déterminés les comportements asymptotiques aux places finies (dénominateur commun) et infinie des coefficients rationnels des combinaisons linéaires, on applique un critère d'irrationalité ou d'indépendance linéaire pour conclure que l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1 et $\zeta(s_1)$, $\zeta(s_2)$, …, $\zeta(s_m)$ a une dimension minorée par une quantité explicite, déterminée par les comportements asymptotiques et arithmétiques des suites d'approximation.

Une seconde approche aux problèmes d'irrationnalité des valeurs aux entiers de zêta consiste en l'étude de certaines intégrales multiples (Beukers, Fischler, Rhin et Viola, Sorokin, Vasilenko, Vasilyev, Zlobin, Zudilin, etc.). Elle est elle aussi liée à l'hypergéométrie : des identités entre des séries hypergéométriques simples et multiples permettent d'expliquer la totale équivalence des approches par séries et intégrales (voir [3, 11]). En particulier, les groupes de Rhin et Viola, qui sont essentiels pour obtenir les meilleures mesures d'irrationalité connues pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, coïncident avec certains groupes des transformations des séries hypergéométriques ${}_3F_2$ et ${}_4F_3$ (voir [4, 12]), respectivement.

Il convient de distinguer les suites d'approximations obtenues au moyen de séries hypergéométriques *équilibrées* car elles sont apparemment toujours liées à une *conjecture des dénominateurs* : le « véritable » dénominateur commun des coefficients est, semble-t'il, toujours beaucoup plus petit que celui que l'on obtient par des considérations élémentaires. Dans les démonstrations récentes des conjectures des dénominateurs pour les séries « symétriques » de [2], des identités entre des séries hypergéométriques simples et multiples se sont avérées indispensables et l'on s'attend à ce que des généralisations adéquates permettent de démontrer les conjectures des dénominateurs pour les séries asymétriques de [11, 12]. En cas de succès de ce programme, on démontrera la meilleure mesure d'irrationnalité connue pour $\zeta(4)$ et, éventuellement, une amélioration du résultat (4).

L'objectif du cours sera de présenter ce domaine de recherche, au croisement de la théorie analytique des nombres et de la théorie des séries hypergéométriques. On expliquera les constructions hypergéométriques utilisées pour obtenir des résultats sur la nature arithmétique des valeurs aux entiers de la fonction zêta. On donnera ensuite une brève introduction aux résultats fondamentaux sur les séries hypergéométriques (en ne supposant aucun prérequis) et on montrera comment manipuler aisément ces séries au moyen du logiciel HYP. Puis, on appliquera ces résultats pour 1$^{\text{o}}$ clarifier les relations entre les constructions intégrales et les constructions hypergéométriques et 2$^{\text{o}}$ démontrer les conjectures des dénominateurs pour les séries symétriques. Enfin, on conclura avec des perspectives sur des recherches à venir.

Programme prévisonnel :

1ère séance : Irrationalité des valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann.

- Suites d'approximations hypergéométriques.
- Estimations asymptotiques et arithmétiques.
- Critère de Nesterenko.

2ème séance : Introduction à la théorie des séries hypergéométriques.

- La théorie classique : le lemme de Bailey, les identités fondamentales : les sommation de Gauß, Pfaff–Saalschütz, Dougall, les transformations de Whipple, les intégrales du type Barnes.
- La théorie algorithmique : les algorithmes de Gosper–Zeilberger et de Wilf–Zeilberger.
- Le calcul hypergéométrique avec HYP.

3ème séance : Intégrales et séries hypergéométriques.

- Les intégrales de Vasilyev, Zlobin et Zudilin.
- Une identité hypergéométrique d'Andrews.
- L'équivalence des intégrales et des séries hypergéométriques.

4ème séance : Les conjectures des dénominateurs.

- L'esquisse de leur démonstration pour les séries symétriques.
- Problèmes ouverts et perspectives diophantiennes.

Prérequis. Mes exposés ne supposeront que des connaissances élémentaires de la théorie des nombres. La lecture du survol [1] est conseillée mais ne sera pas nécessaire.

Bibliographie

[1] S. Fischler, Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...), *Astérisque* **294** (2004), 27–62.

[2] C. Krattenthaler & T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann*, Mem. Amer. Math. Soc, à paraître.

[3] C. Krattenthaler & T. Rivoal, An identity of Andrews, multiple integrals, and very-well-poised hypergeometric series, *Ramanujan J*, à paraître.

[4] C. Krattenthaler & T. Rivoal, How can we escape Thomae's relations ?, *J. Math. Soc. Japan*, à paraître.

[5] G. Rhin & C. Viola, On a permutation group related to $\zeta(2)$, *Acta Arith.* **77** (1996), 23–56.

[6] G. Rhin & C. Viola, The group structure for $\zeta(3)$, *Acta Arith.* **97** (2001), 269–293.

[7] T. Rivoal, *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, thèse de doctorat, Université de Caen, 2001.

[8] T. Rivoal, Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$, *Acta Arith.* **103** (2002), 157–167.

[9] T. Rivoal & W. Zudilin, Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant, *Math. Ann.* **326** (2003), 705–721.

[10] W. Zudilin, An elementary proof of Apéry's theorem, prépublication, Moscou, 2002.

[11] W. Zudilin, Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **15** (2003), 593–626.

[12] W. Zudilin, Arithmetic of linear forms involving odd zeta values, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (2004), 251–291.