Numéro d'ordre : 009-2010

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : mathématiques pures

Boris ADAMCZEWSKI

Soutenue le 8 avril 2010

UNE APPROCHE ARITHMÉTIQUE DES SYSTÈMES DE NUMÉRATION

Après avis des rapporteurs :

M. Christophe REUTENAUER	Professeur à l'Université du Québec à Montréal
M. Wolfgang SCHMIDT	Distinguished Professor Emeritus at University of Colorado at Boulder
M. Michel WALDSCHMIDT	Professeur à l'Université Paris 6

Devant le jury composé de :

M. Jean-Paul ALLOUCHE	Directeur de Recherche au CNRS
M. Jean BERSTEL	Professeur Émérite à l'Université Paris Est
M^{me} Valérie BERTHÉ	Directeur de Recherche au CNRS
M. Yuri BILU	Professeur à l'Université Bordeaux 1
M. Sanju VELANI	Professor at University of York
M. Michel WALDSCHMIDT	Professeur à l'Université Paris 6
M. Luca ZAMBONI	Professeur à l'Université Lyon 1

À Vadim.

Remerciements

Il faut reconnaître que, parmi les intellectuels,
on rencontre parfois, à titre exceptionnel,
des gens intelligents. On ne peut le nier.

Mikhaïl Boulgakov, *Le maître et Marguerite.*

Le Jury.

Valérie Berthé et Jean-Paul Allouche ont accompagné mes premiers pas mathématiques et, depuis, leur soutien ne s'est jamais altéré. J'ai conscience de leur devoir beaucoup. Ils ont profondément influencé ce travail, qui est en partie le leur, même si toute critique doit bien sûr être adressée au seul auteur de ce mémoire. Par leur intégrité, leur rigueur, leur curiosité et leur générosité, ils sont des exemples, que je m'efforce de suivre.

C'est avec beaucoup de plaisir que je remercie Christophe Reutenauer d'avoir accepté la tâche de rapporteur et de s'être acquitté de celle-ci avec le plus grand soin. Dès la préparation de mon mémoire de DEA, j'ai eu l'occasion de découvrir certains travaux de Wolfgang Schmidt, et, quelques années plus tard, je ne peux qu'exprimer mon admiration face à une œuvre dont il me reste tant à appréhender. Je suis honoré qu'il se soit penché sur mon travail pour rédiger un rapport. Depuis plusieurs années, j'ai eu la chance de bénéficier des encouragements de Michel Waldschmidt qui s'est toujours montré disponible pour répondre à mes questions. Je le remercie beaucoup de l'intérêt porté à mon travail et suis très heureux de le compter parmi mes rapporteurs.

Je remercie également chaleureusement Jean Berstel, Yuri Bilu, Sanju Velani et Luca Zamboni de prendre part à ce jury.

Les institutions.

La situation actuelle laisse malheureusement augurer d'un jour où le propos qui suit se verra peut-être vidé de son sens. Mais en attendant, je voudrais exprimer toute ma gratitude au Centre National de la Recherche Scientifique pour la liberté qu'il m'offre. Il infléchit les notions d'espace et de temps, rendant le rêve possible.

Je suis très reconnaissant envers l'Institut Camille Jordan des excellentes conditions de travail qui m'ont été offertes depuis plus de cinq ans.

L'Agence National de la Recherche a soutenu mes recherches ces dernières années, notamment à travers le projet DyCoNum. Je lui adresse mes remerciements. Je leur adjoins également mes craintes et un certain scepticisme ; la valorisation à court terme de quelques-uns n'est sans doute pas déraisonnable, mais ne me semble bénéfique que si des financements récurrents suffisants viennent garantir une pratique sereine à l'ensemble de la communauté.

Les collègues.

Lors de mon arrivée à l'Institut Girard Desargues, devenu aujourd'hui l'Institut Camille Jordan, j'ai reçu un accueil chaleureux de la part de tous mes collègues, notamment des membres de l'équipe de Théorie des Nombres et Combinatoire, mais également de l'ensemble du personnel administratif. L'environnement humain de ce laboratoire est particulièrement stimulant. À défaut d'avoir un mot pour chacun, je dois me contenter d'en adresser quatre à tous : je vous remercie sincèrement. Il en est quand même deux qu'il me faut nommer, Élie et Frédéric, pour m'avoir montré que derrière l'austérité d'un laboratoire de mathématiques peuvent se cacher les meilleurs des amis.

Être chercheur exige parfois isolement et introspection, certes. J'envisage toutefois la pratique mathématique avant tout comme un ouvrage collectif. Écouter, échanger, transmettre. Je remercie donc tous les collègues qui, au travers de nombreuses discussions, m'ont offert un peu de leur temps et de leur savoir, donnant sens à cette pratique ; au premier rang desquels mes collaborateurs sans qui ce mémoire n'aurait pu voir le jour : Jean-Paul Allouche, Jason Bell, Yann Bugeaud, Julien Cassaigne, David Damanik, Les Davison, Colin Faverjon, Christiane Frougny, Marion Le Gonidec, Florian Luca, Narad Rampersad, Tanguy Rivoal, Anne Siegel et Wolfgang Steiner.

La famille.

Il est un point où l'exercice des remerciements peut prendre un tour plus personnel ; à chacun sa pudeur. À ma famille et mes amis, je voudrais simplement dire merci d'être là, car le reste n'est que fiction. À mes parents, je souhaite adresser un remerciement particulier pour la tendresse avec laquelle ils suivent mon excursion mathématique. Lorsque vient le moment de fermer la porte du bureau, et de poser la craie, lorsqu'il faut s'extraire du monde des pensées pour retrouver les siens, c'est chaque fois avec le plus grand bonheur que je parcours le chemin. Pour cela, et tant de choses encore, je remercie Aurélie.

Insistons encore sur la méthode : il s'agit de s'obstiner.

Albert Camus, *Le mythe de Sisyphe.*

Préambule

Ce texte donne un aperçu des recherches que j'ai effectuées depuis mes travaux de thèse, c'est-à-dire durant la période 2004–2009. En particulier, les articles [Ad02, Ad03, Ad04a, Ad04c, Ad05, AC03, AD02], qui correspondent peu ou prou au contenu de cette dernière, ne sont pas évoqués. Je me suis efforcé de présenter de façon accessible les résultats obtenus, en les replaçant dans leur contexte et en m'attachant à mettre en avant les principales motivations qui m'ont mû au cours de ces recherches. Dans un souci de clarté et de simplification, les démonstrations sont omises ; tout au plus, il m'arrive d'en esquisser les idées principales. Le fil conducteur de mes travaux est l'utilisation de systèmes de numération et de mots infinis sous-jacents dans le but d'étudier des problèmes de nature arithmétique.

La combinatoire des mots a pour objet principal l'étude des suites finies et infinies à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable. Il s'agit par essence d'un thème qui privilégie les interactions, que ce soit avec l'algèbre (théorie des groupes), l'étude des systèmes dynamiques (dynamique symbolique), l'informatique théorique, la théorie des pavages, la géométrie discrète et bien sûr la théorie des nombres. En théorie des nombres, les mots finis ou infinis apparaissent naturellement *via* l'utilisation de systèmes de numération, c'est-à-dire dès que l'on souhaite représenter tous les éléments d'un certain ensemble (nombres entiers, nombres réels, nombres p-adiques, corps de séries de Laurent...) de façon unifiée. Les développements décimaux, binaires ou en fraction continue permettent ainsi d'associer à tout nombre réel un unique mot fini ou infini correspondant à la suite de ses chiffres. Ce sont de telles correspondances entre *mots* et *nombres* qui se trouvent à l'origine de mes travaux.

Ce mémoire comprend quatre grandes parties, subdivisées en chapitres.

Les systèmes de numération sont absents de la première partie, celle-ci étant consacrée au rappel de notions et de résultats concernant d'une part la combinatoire des mots, avec une attention particulière portée à l'étude des motifs répétitifs dans les mots infinis, et, d'autre part, l'approximation diophantienne, où l'accent est mis sur la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt. Ces résultats présentent un intérêt indépendant, mais ils sont ensuite utilisés tout au long du texte.

La seconde partie, qui occupe une place centrale dans ce mémoire, a pour objet principal l'étude des représentations des nombres algébriques et de certaines périodes transcendantes dans une base entière, ainsi que leur développement en fraction continue. Cette étude conduit *in fine* à l'analyse de propriétés diophantiennes (transcendance, mesures d'irrationalité, mesures de transcendance, indépendance algébrique) de nombres réels associés à des représentations pathologiques. Les résultats de cette partie reposent pour la plupart sur un outil diophantien puissant : le théorème du sous-espace de Schmidt.

La troisième partie fait également intervenir la numération, mais dans un esprit assez différent. Les problèmes considérés sont de nature arithmétique, comme la description de la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p(t)$, la recherche d'un analogue du théorème de Skolem–Mahler–Lech pour les corps de caractéristique non nulle, ou encore la résolution dans des corps de caractéristique non nulle d'équations diophantiennes, analogues aux équations en S-unités. Ces questions ne semblent *a priori* aucunement liées à la numération. Pourtant, l'écriture des entiers en base p, où p est la caractéristique considérée, se révèle ici être un outil particulièrement adapté qui permet en outre d'apporter, grâce à la théorie des automates finis, des réponses élégantes aux problèmes étudiés.

La quatrième et dernière partie de ce mémoire regroupe des résultats reposant sur un autre aspect important des systèmes de numération. Ceux-ci offrent en effet une grande liberté : celle de définir des nombres en choisissant leur suite de chiffres. On retrouve ici certaines idées à l'origine du succès de la dynamique symbolique, laquelle offre un moyen puissant d'exhiber des systèmes dynamiques, mesurés ou topologiques, jouissant de propriétés prescrites, parfois exceptionnelles. Cette facette des systèmes de numération est illustrée à travers diverses constructions concernant la conjecture de Littlewood, les pavages de Rauzy–Thurston et certains ensembles fractals dits automatiques.

Les théorèmes obtenus seul ou en collaboration sont numérotés, tandis que des lettres sont utilisées pour désigner les autres travaux cités. Les corps intervenant dans ce texte sont supposés commutatifs.

Table des matières

Première partie

La boîte à outils : combinatoire des mots et approximation diophantienne

Chapitre 1

Combinatoire des mots

Dans ce premier chapitre, nous rappelons quelques notions et objets classiques de la combinatoire des mots, comme les mots sturmiens, la fonction de complexité, les mots et les ensembles d'entiers automatiques, les morphismes de monoïdes libres. Pour plus de détails, nous indiquons quelques références d'ouvrages portant sur la combinatoire des mots : la série de Lothaire [Lo97, Lo02, Lo05], le livre de Pytheas Fogg [Py02] et celui d'Allouche et Shallit [AS03]. Les notions et les résultats donnés dans ce chapitre seront utilisés tout au long de ce mémoire. Nous nous concentrons sur un sujet fondamental en combinatoire des mots : l'étude de motifs répétitifs dans les mots infinis. Dans cette direction, nous introduisons une nouvelle mesure de périodicité des mots infinis à l'aide de l'*exposant diophantien*. Cet exposant, qui vient compléter d'autres exposants du même type, joue un rôle crucial dans l'étude, décrite aux chapitres 4 et 5, des propriétés diophantiennes de nombres réels définis par leur développement dans une base entière.

1.1 Notations

Étant donné un ensemble $\mathcal{A}$, fini ou éventuellement infini dénombrable, on désigne par $\mathcal{A}^*$ le monoïde libre engendré par $\mathcal{A}$; la loi sous-jacente étant la concaténation. Le mot vide, noté ε, est l'élément neutre de $\mathcal{A}^*$. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *lettres* ou *symboles* et les éléments de $\mathcal{A}^*$ sont appelés *mots finis* ou *suites finies.* Les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ sont appelés indifféremment *mots infinis* ou *suites infinies.*

Un mot fini $W = w_1 \cdots w_r$ est un *facteur* d'un mot infini $\mathbf{a} = a_0 a_1 \cdots$ s'il existe un entier i tel que $w_1 \cdots w_r = a_i a_{i+1} \cdots a_{i+r-1}$. On dit alors que l'entier i est une *occurrence* de W dans $\mathbf{a}$. La *longueur* d'un mot fini W est le nombre de lettres qui le composent ; elle est notée $|W|$. Le mot vide ε est l'unique mot de longueur 0. Pour tout entier $\ell \geq 1$, on note W^ℓ pour désigner la concaténation ℓ fois du mot W. On note également $W^\infty = WW \cdots$ le mot infini obtenu en concaténant infiniment le mot W. Plus généralement, si $x \geq 1$ est un nombre réel, on note W^x pour désigner le mot $W^{\lfloor x \rfloor} W'$, où W' est le préfixe de W de longueur $\lceil (x - \lfloor x \rfloor)|W| \rceil$. Ici, $\lfloor y \rfloor$ et $\lceil y \rceil$

désignent respectivement la partie entière et la partie entière supérieure du nombre réel y. Un mot infini $\mathbf{a}$ est dit *ultimement périodique* s'il existe deux mots finis U et V tels que $\mathbf{a} = UV^\infty$. Lorsque U peut être choisi vide, $\mathbf{a}$ est dit *purement périodique*. Nous dirons aussi que $\mathbf{a}$ est *apériodique* s'il n'est pas ultimement périodique.

L'ensemble $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ est muni de la topologie produit des topologies discrètes sur chaque copie de $\mathcal{A}$. Cette topologie est induite par la distance d définie par

$$d(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = \frac{1}{2^{\inf \{i \in \mathbb{N},\, w_i \neq w'_i\}}},$$

où $\mathbf{w} = w_0 w_1 \cdots$ et $\mathbf{w}' = w'_0 w'_1 \cdots$ sont deux mots infinis définis sur $\mathcal{A}$, avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$. On construit souvent des mots infinis comme « limite de mots finis ». Pour cela, il faut donner un sens à la notion de limite. On peut procéder de la façon suivante. On ajoute un symbole, noté $*$, à l'ensemble $\mathcal{A}$ sur lequel les mots finis sont définis, et on pose $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{*\}$. Étant donné un mot fini $W = w_1 w_2 \ldots w_r \in \mathcal{A}^*$, on lui associe le mot infini $W' = w_1 w_2 \cdots w_r * * * \cdots$ appartenant à $\mathcal{A}'^\mathbb{N}$. On dit alors qu'une suite de mots finis $(W_n)_{n \geq 0}$ appartenant à $\mathcal{A}^*$ converge vers un mot infini si la suite $(W'_n)_{n \geq 0}$ converge dans $\mathcal{A}'^\mathbb{N}$ vers un élément de $\mathcal{A}^\mathbb{N}$. Ce procédé permet de définir une topologie naturelle sur l'ensemble $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^\mathbb{N}$.

Posons par exemple $W_0 = 0$ et $W_1 = 1$, puis pour tout entier $n \geq 1$, $W_{n+1} = W_n W_{n-1}$. Cette suite de mots finis converge vers un mot infini

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100100101001001 \cdots,$$

appelé mot de Fibonacci.

1.2 Répétitions dans les mots infinis

Il est facile de vérifier que tout mot infini défini sur un alphabet binaire contient une infinité d'occurrences de *carrés*, c'est-à-dire d'occurrences d'un mot fini, non vide, répété deux fois consécutivement. En 1912, Thue [Thue12] montra que l'on peut construire un mot infini binaire qui évite tout motif plus répétitif, dans le sens qu'un tel mot ne contient aucun *chevauchement*. Rappelons qu'un chevauchement est un mot de la forme $aWaWa$, où a est une lettre et W un mot fini. Le mot binaire construit par Thue fut redécouvert maintes fois, en particulier par Morse [Mo21] dans son étude des géodésiques récurrentes sur des surfaces de courbure négative. On l'appelle le plus souvent le mot de Thue–Morse et nous utiliserons cette dénomination dans la suite. Une des définitions possibles du mot de Thue–Morse $\mathbf{t} = t_0 t_1 \cdots$ est la suivante : $t_n = 1$ si la somme des chiffres binaires de l'entier n est impaire et $t_n = 0$ si cette somme est paire. Le mot $\mathbf{t}$ a de nombreuses propriétés intéressantes, illustrées par le survol [AS99]. Suite aux travaux précurseurs de Thue, l'étude des répétitions dans les mots infinis est devenue un thème central de la combinatoire des mots.

1.2.1 L'exposant critique et l'exposant critique initial

Afin d'étudier les répétitions qui peuvent apparaître dans les mots infinis, plusieurs exposants utiles ont été introduits. Nous rappelons la définition de deux d'entre eux : l'*exposant critique* et l'*exposant critique initial*.

L'exposant critique[1] d'un mot infini $\mathbf{a}$, noté $\mathrm{Ind}^*(\mathbf{a})$, est défini comme le supremum des nombres réels $\rho \geq 1$ pour lesquels il existe des mots V arbitrairement longs tels que le mot V^ρ soit un facteur de $\mathbf{a}$. L'exposant critique initial de $\mathbf{a}$, généralement noté $\mathrm{Ice}(\mathbf{a})$, est défini comme le supremum des nombres réels $\rho \geq 1$ pour lesquels il existe des mots V arbitrairement longs tels que le mot V^ρ soit un préfixe de $\mathbf{a}$. Ce dernier est introduit formellement dans [BHZ06]. Ces deux exposants sont très naturels et ont bien sûr leur propre intérêt, mais ils sont également étudiés en raison de leurs liens avec des problèmes de physique mathématique et de théorie des nombres.

On peut montrer que l'exposant critique du mot de Fibonacci $\mathbf{f}$ est égal à $(5 + \sqrt{5})/2$, tandis que son exposant critique initial vaut $(3 + \sqrt{5})/2$ (voir par exemple [BHZ06]).

1.2.2 L'exposant diophantien

Nous introduisons maintenant un nouvel exposant, l'*exposant diophantien*, qui vient compléter les exposants précédents. L'exposant diophantien est particulièrement intéressant car il joue un rôle essentiel dans l'étude, décrite à travers les chapitres 4 et 5, des propriétés diophantiennes (transcendance, mesures d'irrationalité, mesures de transcendance, indépendance algébrique) de nombres réels définis *via* leur développement dans une base entière. Nous avons formellement introduit cet exposant dans [AdBu07d], mais il apparaissait déjà de façon sous-jacente dans les articles [ABL04], [AdBu07c] et surtout dans [AC06] qui laissait pleinement entrevoir sa pertinence. Plus récemment, nous l'avons utilisé dans [Ad10], [AdBu3] et [AdRi09] ; il est également l'objet principal d'un travail récent de Dubickas [Du09].

Soient $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots$ un mot infini défini sur un alphabet $\mathcal{A}$ et $\rho \geq 1$ un nombre réel. Le mot $\mathbf{a}$ satisfait à la condition $(*)_\rho$ s'il existe deux suites de mots finis $(U_n)_{n \geq 1}$ (U_n éventuellement vide), $(V_n)_{n \geq 1}$, et une suite de nombres réels positifs $(w_n)_{n \geq 1}$ telles que :

(i) pour tout entier $n \geq 1$, le mot $U_n V_n^{w_n}$ est un préfixe de $\mathbf{a}$,

(ii) pour tout entier $n \geq 1$, $|U_n V_n^{w_n}|/|U_n V_n| \geq \rho$,

(iii) la suite $(|V_n^{w_n}|)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

L'exposant diophantien de $\mathbf{a}$, noté $\mathrm{Dio}(\mathbf{a})$, est alors défini comme le supremum des nombres réels ρ pour lesquels le mot $\mathbf{a}$ vérifie la condition $(*)_\rho$. Les mots infinis dont

[1] Cet exposant est parfois appelé exposant critique asymptotique. L'exposant critique désigne alors le supremum des nombres réels $\rho \geq 1$ pour lesquels il existe un mot non vide V tel que le mot V^ρ soit un facteur de $\mathbf{a}$.

l'exposant diophantien est strictement supérieur à 1 sont appelés *mots bégayants* ou *suites bégayantes*. Clairement, cette définition implique les inégalités suivantes :

$$1 \leq \mathrm{Ice}(\mathbf{a}) \leq \mathrm{Dio}(\mathbf{a}) \leq \mathrm{Ind}^*(\mathbf{a}) \leq +\infty\,.$$

En outre, l'exposant diophantien d'un mot ultimement périodique est infini. On peut d'autre part montrer que le mot de Fibonacci vérifie :

$$\mathrm{Dio}(\mathbf{f}) = \mathrm{Ice}(\mathbf{f}) = (3+\sqrt{5})/2\,.$$

1.3 Fonction de complexité et mots sturmiens

Une mesure naturelle de la complexité d'une suite ou d'un mot infini $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots$ défini sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ est donnée par sa *fonction de complexité*. Cette fonction associe à tout entier $n \geq 1$ l'entier $p(n, \mathbf{a})$ défini par :

$$p(n, \mathbf{a}) = \mathrm{Card}\{(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+n-1}) \mid j \geq 1\}\,.$$

Ainsi, le mot périodique $\mathbf{b} = bbb\cdots$ vérifie $p(n, \mathbf{b}) = 1$ pour tout $n \geq 1$, tandis que le mot de Champernowne

$$\mathbf{c} = 01234567891011121314\cdots$$

vérifie $p(n, \mathbf{c}) = 10^n$, pour tout $n \geq 1$. Cette notion fut introduite en 1938 par Morse et Hedlund [MH38] dans leurs travaux fondateurs sur la dynamique symbolique. Elle est intimement liée à celle d'entropie topologique d'une suite, laquelle peut être définie par

$$h(\mathbf{a}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log p(n, \mathbf{a})}{n}\,.$$

Clairement, la fonction de complexité d'un mot infini est une fonction croissante qui vérifie

$$1 \leq p(n, \mathbf{a}) \leq (\mathrm{Card}\,\mathcal{A})^n\,,$$

pour tout entier $n \geq 1$. Il est également facile de montrer que la complexité d'un mot ultimement périodique reste bornée (en fait, dan ce cas, celle-ci est constante à partir d'un certain rang). Cette propriété est en fait caractéristique des mots ultimement périodiques, comme l'ont montré Morse et Hedlund [MH38].

Théorème MH1. *Un mot infini* $\mathbf{a}$ *est ultimement périodique si, et seulement si, sa fonction de complexité est bornée. En outre, si* $\mathbf{a}$ *est apériodique, alors sa fonction de complexité est strictement croissante et*

$$p(n, \mathbf{a}) \geq n+1\,,$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Le théorème MH1 est en fait optimal. Il existe en effet des mots **a** tels que $p(n, \mathbf{a}) = n + 1$ pour tout $n \geq 1$. Ces mots sont appelés *mots sturmiens* ; ils forment l'une des classes les plus fascinantes et importantes de mots infinis. Le mot de Fibonacci **f** est sans aucun doute l'exemple le plus célèbre de mot sturmien. Une particularité des mots sturmiens est qu'ils peuvent être caractérisés à la fois de façon arithmétique, combinatoire et géométrique. Pour cette raison, ils jouissent de nombreuses propriétés intéressantes et font l'objet d'une littérature abondante. Les mots sturmiens apparaissent en particulier dans l'étude de problèmes liés à la théorie des nombres, la dynamique symbolique, la géométrie discrète, la cristallographie, la théorie des pavages, l'informatique théorique, la combinatoire des mots...

Nous rappelons ci-dessous une caractérisation arithmétique des mots sturmiens due à Morse et Hedlund [MH40].

Théorème MH2. *Un mot infini* $\mathbf{a} = a_0a_1\cdots$ *défini sur l'alphabet* $\{0, 1\}$ *est un mot sturmien si, et seulement si, il existe un nombre irrationnel* α *appartenant à* $[0, 1]$ *et un nombre réel* $x \geq 0$ *tels que soit*

$$a_n = \lfloor (n+1)\alpha + x \rfloor - \lfloor n\alpha + x \rfloor \quad \textit{pour tout entier } n,$$

soit

$$a_n = \lceil (n+1)\alpha + x \rceil - \lceil n\alpha + x \rceil \quad \textit{pour tout entier } n.$$

Le nombre irrationnel α est appelé la *pente* du mot sturmien **a**, tandis que le nombre réel x est appelé l'*intercept* de **a**.

Dans l'article [AdBu3], nous donnons une caractérisation simple des mots sturmiens dont l'exposant diophantien est fini.

Théorème 1.1 *L'exposant diophantien d'un mot sturmien est fini si, et seulement si, sa pente a une suite bornée de quotients partiels dans son développement en fraction continue.*

Dans l'article [Ad10], nous donnons également, comme conséquence du théorème 1.1 et de résultats obtenus dans [BHZ06], une minoration de l'exposant diophantien de n'importe quel mot sturmien.

Théorème 1.2 *Soit* **a** *un mot sturmien. Alors,* $\mathrm{Dio}(\mathbf{a}) > 2$.

Comme nous le verrons dans les chapitres 4 et 5, les théorèmes 1.1 et 1.2 ont d'intéressantes conséquences arithmétiques.

1.4 Mots engendrés par morphismes

Un procédé naturel pour construire des mots infinis sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ consiste à utiliser les morphismes du monoïde libre $\mathcal{A}^*$.

Morphismes. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles finis. Une application σ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}^*$ peut être étendue de façon unique en un homomorphisme du monoïde $\mathcal{A}^*$ vers le monoïde $\mathcal{B}^*$. On appellera simplement morphisme de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ un tel homomorphisme. Le morphisme σ est dit *k-uniforme* si $|\sigma(a)| = k$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Un morphisme 1-uniforme est appelé un *codage*. Notons qu'un morphisme σ est complètement défini par la donnée de $\sigma(a)$, pour tout $a \in \mathcal{A}$.

Mots infinis engendrés par morphismes. Un morphisme σ de $\mathcal{A}$ dans lui-même est dit prolongeable s'il existe une lettre a telle que $\sigma(a) = aW$, où W est un mot tel que $\sigma^k(W) \neq \varepsilon$ pour tout entier $k \geq 0$. Dans ce cas, la suite de mots finis $(\sigma^k(a))_{k\geq 1}$ converge vers un mot infini $\mathbf{a}$. Ce mot est clairement un point fixe de l'application σ et on dit alors que $\mathbf{a}$ est *engendré par le morphisme σ*.

On peut vérifier que le morphisme τ défini sur l'alphabet $\{0, 1\}$ par $\tau(0) = 01$ et $\tau(1) = 10$ engendre le mot de Thue–Morse

$$\mathbf{t} = \lim_{n\to\infty} \tau^n(0) = 0110100110010110100101100110100 1\cdots ,$$

tandis que le morphisme φ défini par $\varphi(0) = 01$ et $\varphi(1) = 0$ engendre le mot de Fibonacci

$$\mathbf{f} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(0) = 0100101001001010010100100101001 0\cdots .$$

1.5 Suites automatiques, morphismes de monoïdes libres et noyaux

Les automates finis constituent l'un des modèles de calcul les plus basiques. Ils forment toutefois une classe remarquable de machines de Turing particulièrement accessibles. Intuitivement, une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ est dite k-automatique si a_n est une fonction assez simple (fonction à états finis) de l'écriture de l'entier n en base k. Cela signifie qu'il existe un automate fini qui, lorsqu'on lui donne en entrée l'écriture en base k de l'entier n, produit en sortie le symbole a_n. Ces suites ont une structure très riche et jouissent de nombreuses propriétés. L'ouvrage d'Allouche et Shallit [AS03] est une excellente référence sur ce sujet.

Donnons à présent une définition plus formelle de cette notion. Soit $k \geq 2$ un entier. Notons Σ_k l'alphabet $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Par définition, un k-automate fini est un 6-uplet

$$A = (Q, \Sigma_k, \delta, q_0, \Delta, \theta) ,$$

où Q est un ensemble fini d'états, $\delta : Q \times \Sigma_k \to Q$ est la fonction de transition, $q_0 \in Q$ est l'état initial, Δ est un alphabet fini appelé alphabet de sortie et $\theta : Q \to \Delta$ est la fonction de sortie. Étant donnés un état q appartenant à Q et un mot fini $W = w_1w_2\cdots w_n$ sur l'alphabet Σ_k, on définit récursivement $\delta(q, W)$ par $\delta(q, W) = \delta(\delta(q, w_1w_2\cdots w_{n-1}), w_n)$. Soit $n \geq 0$ un entier et notons $w_rw_{r-1}\cdots w_1w_0 \in (\Sigma_k)^{r+1}$ l'écriture en base k de n, de sorte que $n = \sum_{i=0}^{r} w_ik^i$. On désigne par W_n le mot $w_0w_1 \cdots w_r$. Alors, une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ est dite *engendrée par un k-automate fini* ou plus simplement *k-automatique* s'il existe un k-automate fini A tel que $a_n = \theta(\delta(q_0, W_n))$ pour tout entier $n \geq 0$.

La suite de Thue–Morse $\mathbf{t}$ est probablement l'exemple le plus célèbre de suite automatique. Il est facile de vérifier que $\mathbf{t}$ peut être engendré par le 2-automate défini de la façon suivante :

$$A = \big(\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{0, 1\}, \theta\big),$$

où

$$\delta(q_0, 0) = \delta(q_1, 1) = q_0, \qquad \delta(q_0, 1) = \delta(q_1, 0) = q_1,$$

et $\theta(q_0) = 0$, $\theta(q_1) = 1$.

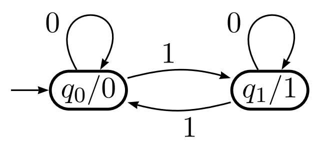

FIG. 1.1. Automate fini engendrant la suite de Thue–Morse.

Par exemple, si la donnée d'entrée de l'automate est le mot $w = 10110$, qui correspond à l'écriture binaire du nombre 22, l'automate retourne le symbole 1, ce qui signifie que $t_{22} = 1$.

1.5.1 Suites automatiques et morphismes de monoïdes libres

Nous avons déjà observé que le mot de Thue–Morse est engendré par le morphisme 2-uniforme τ défini sur le monoïde $\{0, 1\}^*$ par $\tau(0) = 01$ et $\tau(1) = 10$. Ce résultat n'est en fait pas une spécificité du mot de Thue–Morse. Les morphismes uniformes et les suites automatiques sont en effet intimement liés, comme le montre un résultat classique de Cobham [Co72].

Théorème C1. *Un mot infini est k-automatique si, et seulement si, il est l'image par un codage d'un mot engendré par un morphisme k-uniforme.*

Une conséquence notable du théorème C1 est que les automates finis sont des machines de Turing qui calculent en temps linéaire (voir chapitre 4).

Dans l'article [AdBu07c], nous utilisons cette caractérisation pour montrer que tout mot automatique est bégayant.

Théorème 1.3 *Soit* $\mathbf{a}$ *un mot automatique. Alors,* $\mathrm{Dio}(\mathbf{a}) > 1$.

Le théorème 1.3 est l'un des principaux ingrédients utilisés dans [AdBu07c] pour prouver une conjecture de Cobham, discutée au chapitre 4, concernant le développement des nombres algébriques dans une base entière.

1.5.2 Suites automatiques et noyaux

Une autre notion fondamentale dans l'étude des suites automatiques est celle de noyau. Étant donné un entier $k \geq 2$, le *k-noyau* d'une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ est défini comme l'ensemble des suites

$$\mathcal{N}_k(\mathbf{a}) = \left\{(a_{k^i n+j})_{n\geq 0} \mid i \geq 0,\, 0 \leq j < k^i\right\} .$$

Cette notion conduit à une autre caractérisation très utile des suites automatiques due à Eilenberg [Ei74].

Théorème E. *Une suite est k-automatique si, et seulement si, son k-noyau est un ensemble fini.*

On peut vérifier que le 2-noyau de la suite de Thue–Morse $\mathbf{t}$ ne comporte que 2 éléments : la suite $\mathbf{t}$ elle-même et la suite obtenue à partir de $\mathbf{t}$ en échangeant les lettres 0 et 1.

Dans l'article [AC06], nous avons utilisé cette caractérisation pour obtenir un majorant de l'exposant diophantien de toute suite automatique. La majoration obtenue dépend de certains paramètres associés à l'automate sous-jacent, ce qui la rend un peu trop technique pour être donnée ici. Nous énonçons tout de même une conséquence immédiate de ce résultat.

Théorème 1.4 *L'exposant diophantien d'une suite automatique apériodique est fini.*

Les théorèmes 1.3 et 1.4 sont en particulier utilisés dans [AC06] pour confirmer une conjecture de Shallit, rappelée au chapitre 5, concernant le développement des nombres de Liouville dans une base entière.

1.6 Ensembles d'entiers reconnus par un automate fini

Un autre aspect important de l'utilisation des automates finis en théorie des nombres vient du fait qu'il peuvent être utilisés comme des machines permettant de reconnaître des ensembles d'entiers intéressants. Nous rappelons dans cette partie quelques définitions et exemples relatifs à cette notion, laquelle occupera une place centrale au chapitre 8.

Un ensemble $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ est dit *reconnu par un k-automate fini*, ou plus simplement *k-automatique*, si la suite indicatrice de l'ensemble $\mathcal{N}$, c'est-à-dire la suite définie par $a_n = 1$ si $n \in \mathcal{N}$ et $a_n = 0$ dans le cas contraire, est une suite k-automatique. En d'autres termes, cela signifie qu'il existe un k-automate fini qui, lorsqu'on lui donne en entrée l'écriture en base k de l'entier n, produit en sortie le symbole 1, synonyme d'acceptation, si n appartient à l'ensemble $\mathcal{N}$, et le symbole 0, en guise de rejet, si l'entier n n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{N}$.

1.6.1 Quelques exemples d'ensembles d'entiers automatiques

Les exemples les plus simples d'ensembles d'entiers automatiques sont les progressions arithmétiques. En outre, les progressions arithmétiques sont les seuls ensembles à être reconnus par un automate fini en toute base entière. Ce dernier résultat correspond au théorème C2 discuté au chapitre 12.

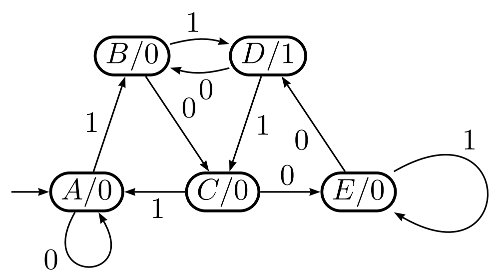

FIG. 1.2. Un 2-automate fini reconnaissant la progression arithmétique $5\mathbb{N} + 3$.

L'ensemble $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ formé des puissances de 2 est un exemple typique d'ensemble 2-automatique.

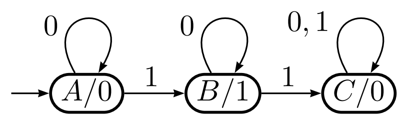

FIG. 1.3. Un 2-automate reconnaissant la suite des puissances de 2.

Dans le même esprit, l'ensemble formé des entiers qui sont la somme de deux puissances de 3 est un ensemble 3-automatique.

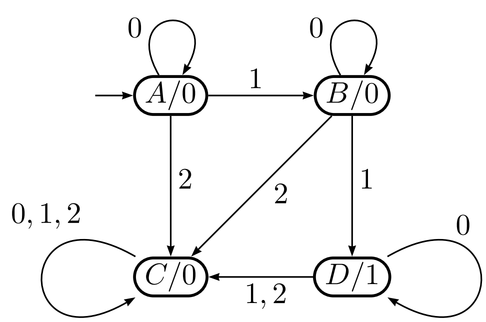

FIG. 1.4. Un 3-automate reconnaissant les entiers qui sont la somme de deux puissances de 3.

On trouve également des ensembles d'entiers automatiques plus exotiques. C'est le cas par exemple de l'ensemble composé des entiers dont le développement binaire a un nombre impair de chiffres non nuls, ne contient pas trois occurrences consécutives du chiffre 1, et contient un nombre pair d'occurrences du bloc de chiffres 00. Le fait que cet ensemble est 2-automatique découle de la stabilité de la classe des ensembles k-automatiques par un certain nombre d'opérations usuelles comme l'intersection, l'union ou le passage au complémentaire. En revanche, certains ensembles d'entiers classiques, comme l'ensemble des nombres premiers ou l'ensemble des carrés parfaits, ne sont pas automatiques (voir [Rit63, MP66]).

1.6.2 Ensembles automatiques de $\mathbb{N}^d$

Étant donné un entier $d \geq 1$, on définit un ensemble k-automatique de $\mathbb{N}^d$ de façon similaire en considérant des automates finis qui acceptent en entrée des d-uplets d'entiers écrits en base k. Une définition plus précise de cette notion se trouve par exemple dans [Sa87] ou [AdBe1]. Les ensembles d'entiers automatiques multidimensionnels jouent un rôle crucial dans la recherche, décrite au chapitre 8, d'un analogue au théorème de Skolem–Mahler–Lech en caractéristique positive, ainsi que dans l'étude d'équations diophantiennes sur des corps de caractéristique positive. Nous montrons que ces ensembles correspondent aux ensembles formés par les indices des coefficients nuls des séries formelles algébriques de plusieurs variables définies sur des corps de caractéristique positive.

Les ensembles automatiques de dimension 2 peuvent être illustrés par des images surprenantes qui reflètent leur riche structure. Plusieurs auteurs ont montré comment leur associer des ensembles compacts fractals (voir par exemple [SS89, AHPS96, AHPPS97, HPS01a, HPS01b, BH03, AS03] et le chapitre 12). Une autre façon très naturelle et plus élémentaire d'illustrer ces structures automatiques, consiste à associer à un ensemble d'entiers automatique $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N}^2$ un pavage coloré du quart de plan en procédant comme suit (voir les figures 1.5–1.8 pour quelques exemples) : le carré unité dont le coin gauche a pour coordonnées le couple d'entiers (i, j) est coloré en noir si (i, j) appartient à $\mathcal{N}$, et il est laissé blanc dans le cas contraire.

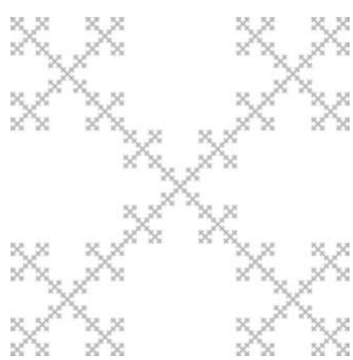

FIG. 1.5. Pavage du flocon.

La figure 1.5 correspond au pavage coloré associé à l'ensemble d'entiers 3-automatique dont les éléments sont les couples (i, j) tels que la somme des n-ièmes chiffres ternaires de i et j est toujours paire.

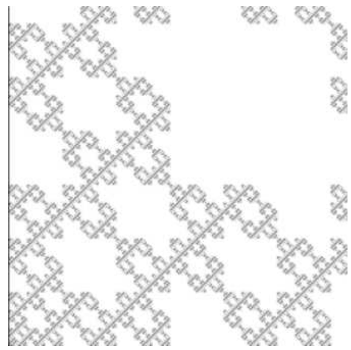

FIG. 1.6. Pavage étoilé.

La figure 1.6 représente l'ensemble d'entiers 3-automatique dont les éléments sont les couples (i, j) tels que la somme des chiffres ternaires de i et j ont la même parité, avec la condition additionnelle que les n-ièmes chiffres ternaires de i et j sont toujours différents. La figure 1.7, en apparence très différente, provient pourtant d'un ensemble 3-automatique défini de manière similaire.

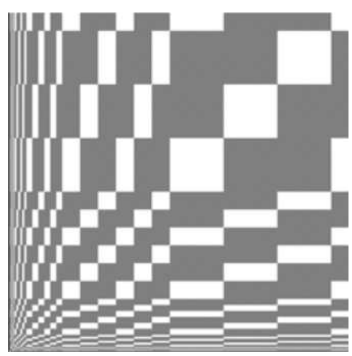

FIG. 1.7. Un autre exemple de pavage 3-automatique.

Le pavage représenté par la figure 1.8 provient également d'un ensemble d'entiers 3-automatique mais qui est plus subtil à décrire en termes arithmétiques ; il se décrit par contre simplement à l'aide d'un morphisme multidimensionnel.

Notons que les figures 1.5–1.8 correspondent à des parties finies mais très grandes des pavages qu'elles illustrent ; ces parties étant représentées à une petite échelle. Autrement dit le carré unité a une très petite aire sur les représentations graphiques que nous donnons.

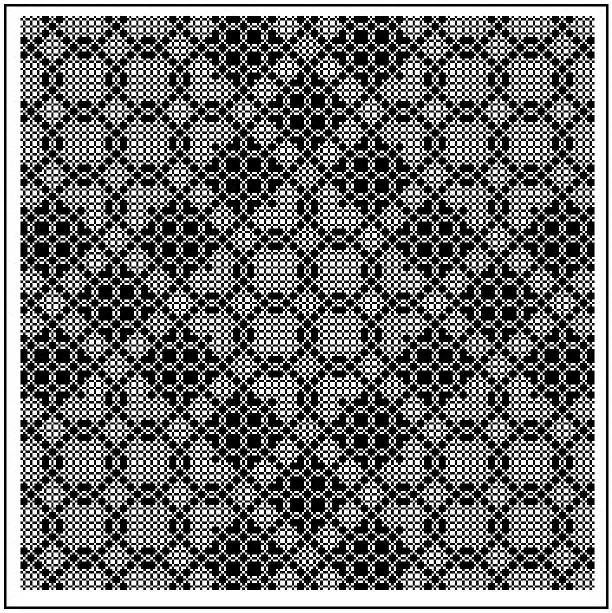

Fig. 1.8. Pavage d'Haferman.

Chapitre 2

Le théorème du sous-espace

Nous rappelons dans ce chapitre quelques énoncés diophantiens classiques issus de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt. Le résultat principal que nous présentons est le théorème du sous-espace de Schmidt (voir [W. Sch65, W. Sch70a, W. Sch72, W. Sch80]). Originellement, ce type d'énoncé est motivé par des applications importantes à la théorie des équations diophantiennes, comme les équations de Thue, les équations de « forme normique » et les équations en S-unités (voir par exemple [W. Sch90, EPSW03]). Récemment, cet outil puissant a fait l'objet d'applications nouvelles plutôt inattendues, dont certaines sont décrites dans les survols [Bi08, Wa06, Wa09], ainsi que dans les excellentes notes de cours de Zannier [Za03]. Dans cette direction, nous devons mentionner les travaux remarquables de Corvaja et Zannier, en particulier [CZ02a, CZ02b, CZ04a, CZ04b, CZ05].

Il s'agit du seul chapitre ne contenant aucune contribution personnelle. Les résultats qui y figurent sont toutefois au cœur des chapitres 3, 4, 5 et 6, ce qui leur confère une place centrale dans ce mémoire.

2.1 Les théorèmes de Roth et Ridout

En 1844, Liouville [Li1844] démontra non seulement qu'il existe des nombres transcendants, mais en outre qu'il est possible d'en donner des exemples simples comme le nombre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n!}}\,.$$

La démonstration de Liouville repose sur le résultat élémentaire suivant.

Inégalité de Liouville. *Soit ξ un nombre algébrique de degré $d \geq 2$. Alors, il existe un nombre réel c, dépendant uniquement de ξ, tel que*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}$$

pour tout nombre rationnel p/q avec $q \geq 1$.

La première amélioration substantielle de ce résultat est due à Thue [Thue09] au début du siècle dernier. Le théorème de Thue revêt une grande importance pour la théorie des équations diophantiennes car il permet de prouver pour une large classe d'équations diophantiennes, appelées depuis équations de Thue, que celles-ci n'ont qu'un nombre fini de solutions (entières). Auparavant, chaque équation diophantienne nécessitait l'introduction d'une méthode *ad hoc*, bien que souvent très astucieuse. Suite aux travaux précurseurs de Thue, plusieurs auteurs dont Siegel [Si21], Dyson [Dy47] et Gelfond [Ge60], obtinrent de nouvelles améliorations de l'inégalité de Liouville. Finalement, Roth [Rot55] démontra en 1955 le résultat suivant.

Théorème de Roth. *Soit α un nombre algébrique et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Alors, l'inégalité*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \tag{2.1}$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions rationnelles.

Le théorème de Roth est dans un certain sens optimal. En effet, il découle du théorème de Dirichlet ou de la théorie des fractions continues, que pour tout nombre irrationnel α l'inégalité (2.1) possède une infinité de solutions rationnelles si l'on choisit $\varepsilon = 0$. Bien que rien ne soit connu dans cette direction, on s'attend toutefois à pouvoir remplacer, dans le théorème de Roth, le terme $q^{-\varepsilon}$ par une fonction qui décroît plus lentement avec q, comme la fonction $(\log q)^{-\kappa}$ lorsque $\kappa > 1$ (voir [Lan65, Lan95, W. Sch90]).

Le théorème de Roth a une spécificité commune à tous les résultats de ce chapitre, exception faite de l'inégalité de Liouville : il s'agit d'un résultat ineffectif. Cela signifie qu'on ne connaît pas de majorant pour les dénominateurs des solutions rationnelles de l'inégalité (2.1). En revanche les résultats issus de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt peuvent généralement être rendus quantitatifs. Dans le cas du théorème de Roth, cela signifie que l'on peut donner un majorant du nombre de solutions rationnelles de (2.1). Nous rappelons quelques résultats à ce sujet au chapitre 6.

Mahler est, semble-t-il, le premier à avoir perçu l'intérêt d'obtenir des versions « p-adiques » de ces résultats. C'est à l'un de ses étudiants, Ridout [Rid57], que l'on doit l'énoncé très utile suivant. Pour un nombre premier ℓ, notons $|\cdot|_\ell$ la valeur absolue ℓ-adique normalisée de sorte que $|\ell| = \ell^{-1}$.

Théorème de Ridout. *Soient α un nombre algébrique, $\mathcal{S}$ un ensemble fini de nombres premiers et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Alors, l'inégalité*

$$\left(\prod_{\ell\in\mathcal{S}} |p|_\ell \; |q|_\ell\right) \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions rationnelles.

Une conséquence immédiate de ce théorème est que le nombre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{2^n}}$$

est transcendant ; un résultat que l'on ne peut obtenir directement à l'aide du théorème de Roth.

2.2 Le théorème du sous-espace de Schmidt

Le théorème de Roth a été ensuite généralisé dans de nombreuses directions. La plupart des résultats obtenus relèvent du théorème suivant, établi par Schmidt (voir par exemple [W. Sch80]) et connu sous le nom de théorème du sous-espace.

Théorème du sous-espace. *Soient $m \geq 2$ un entier et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Considérons $L_1, \dots, L_m$ des formes linéaires en les variables $X_1, \dots, X_m$, à coefficients algébriques et linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors, l'ensemble des solutions entières $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ de l'inégalité*

$$\prod_{i=1}^{m} |L_i(\mathbf{x})| \leq (\max\{|x_1|, \dots, |x_m|\})^{-\varepsilon}$$

est contenu dans une union finie de sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{Q}^m$.

Notons que le théorème de Roth se déduit facilement du théorème du sous-espace. Raisonnons par l'absurde, en supposant que α est un nombre algébrique pour lequel il existe une infinité de nombres rationnels distincts $(p_n/q_n)_{n \geq 1}$ tels que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ fixé. Alors,

$$|q_n| \, |q_n\alpha - p_n| < q_n^{-\varepsilon}$$

et, si n est assez grand[1], on obtient

$$|q_n| \, |q_n\alpha - p_n| < \max\{|p_n|, |q_n|\}^{-\varepsilon/2} \,. \tag{2.2}$$

Posons $L_1(X_1, X_2) = X_1 - \alpha X_2$ et $L_2(X_1, X_2) = X_2$. Ces deux formes linéaires de deux variables sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ et leurs coefficients sont des nombres algébriques. D'après (2.2), le théorème du sous-espace implique que les points entiers (p_n, q_n) sont contenus dans une union finie de sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{Q}^2$, c'est-à-dire dans une union finie de droites vectorielles. Le principe des tiroirs assure alors l'existence d'une droite contenant une infinité de ces points. Ainsi, il existe un couple d'entiers $(x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$xp_n + yq_n = 0 \,,$$

[1] En effet, la suite de rationnels p_n/q_n converge vers α et donc $|p_n|$ se comporte asymptotiquement comme $|\alpha q_n|$.

pour une infinité d'entiers n. Si $x = 0$, il vient $y = 0$, ce qui est impossible. On a donc

$$\frac{p_n}{q_n} = -\frac{y}{x}$$

pour une infinité d'entiers n, ce qui contredit le fait que tous les nombres rationnels p_n/q_n sont distincts, et démontre le théorème de Roth.

2.3 Une version p-adique du théorème du sous-espace.

Tout comme le théorème de Ridout vient compléter le théorème de Roth, Schlickewei [Sc76, Sc77] a obtenu une version p-adique très utile du théorème du sous-espace. Nous donnons ici une version simple de ce résultat, extraite de [Sc76].

Théorème S. *Soient $m \geq 2$ un entier, $\mathcal{S}$ un ensemble fini de nombres premiers et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Soient $L_{1,\infty} \ldots, L_{m,\infty}$ des formes linéaires en les variables $X_1, \ldots, X_m$, à coefficients algébriques et linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Pour tout $\ell \in \mathcal{S}$, soient $L_{1,\ell} \ldots, L_{m,\ell}$ des formes linéaires en les variables $X_1, \ldots, X_m$, à coefficients entiers et linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors, l'ensemble des solutions entières $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ de l'inégalité*

$$\left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} \prod_{i=1}^{m} |L_{i,\ell}(\mathbf{x})|_\ell\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} |L_{i,\infty}(\mathbf{x})| \leq (\max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\})^{-\varepsilon}$$

est contenu dans une union finie de sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{Q}^m$.

Notons que, de même que le théorème du sous-espace implique facilement le théorème de Roth, le théorème de Ridout découle du résultat de Schlickewei.

2.4 Une version quantitative du théorème du sous-espace

Nous donnons ici un énoncé quantitatif relativement simple du théorème du sous-espace, c'est-à-dire un énoncé dans lequel le nombre de sous-espaces exceptionnels est majoré. Là encore, on dispose de versions plus sophistiquées [ES02], mais un peu plus techniques à énoncer. Elles incluent notamment des places finies et permettent de remplacer le corps $\mathbb{Q}$ par un corps de nombres $\mathbb{K}$ et l'anneau $\mathbb{Z}$ par l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. C'est sur de tels énoncés quantitatifs que reposent les travaux présentés dans les chapitres 3 et 5.

Rappelons tout d'abord quelques notations. Soient $m \geq 2$ un entier et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ un élément de $\mathbb{Z}^m$. La hauteur du point $\mathbf{x}$ est définie par

$$H(\mathbf{x}) = \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}\,.$$

Rappelons que le vecteur $\mathbf{x}$ est primitif si ses coordonnées n'ont pas de diviseur premier en commun. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des éléments d'un même corps de nombres $\mathbb{K}$ de degré

d. Si v est une place finie de $\mathbb{K}$ au-dessus du nombre premier ℓ, on note $|\cdot|_v$ la valeur absolue qui coïncide avec $|\cdot|_\ell$ sur $\mathbb{Q}$ et on pose $d_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_\ell]/[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, où $\mathbb{K}_v$ est le complété de $\mathbb{K}$ à la place v. Si v est une place infinie de $\mathbb{K}$, on pose $d_v = 1/[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ si v est une place réelle, et $d_v = 2/[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ sinon. La hauteur de la forme linéaire $L(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$, notée $H(L)$, est définie par

$$H(L) = \prod_{v \in M_0(\mathbb{K})} (\max\{|\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_m|_v\})^{d_v} \cdot \prod_{v \in M_\infty(\mathbb{K})} (|\alpha_1|_v^2 + \ldots + |\alpha_m|_v^2)^{d_v/2},$$

où $M_0(\mathbb{K})$ et $M_\infty(\mathbb{K})$ désignent respectivement l'ensemble des places finies et infinies de $\mathbb{K}$.

Le théorème ES ci-dessous est une conséquence du Theorem 3.1 d'Evertse et Schlickewei [ES02].

Théorème ES. *Soit $m \geq 2$ un entier. Soient $L_1, \ldots, L_m$ des formes linéaires en les variables $X_1, \ldots, X_m$, à coefficients algébriques et linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit d le degré du corps de nombres engendré par leurs coefficients. On suppose en outre que*

$$det(L_1, \ldots, L_m) = \pm 1.$$

Soit H un majorant de la hauteur des formes linéaires $L_1, \ldots, L_m$. Soit ε un nombre réel vérifiant $0 < \varepsilon < 1$. Alors, l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ primitifs appartenant à $\mathbb{Z}^m$ qui sont solutions de l'inégalité

$$\prod_{i=1}^{m} |L_{i,\infty}(\mathbf{x})| < H(\mathbf{x})^{-\varepsilon}$$

et vérifient

$$H(\mathbf{x}) > \max\{m^{4m/\varepsilon}, H\}$$

est inclus dans une union finie d'au plus

$$(6m)^{2m}\, 2^{3(m+10)^2}\, \varepsilon^{-2m-4}\, (\log 4d)\, (\log\log 4d) \tag{2.3}$$

sous-espaces propres de $\mathbb{Q}^m$.

Notons que la qualité des mesures de transcendance que nous obtenons aux chapitres 3 et 5 dépend étroitement de la qualité de la dépendance en d dans (2.3).

Chapitre 3

Aspects quantitatifs de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt

Une démonstration de l'irrationalité d'un nombre réel ξ faisant appel à l'approximation diophantienne met généralement en évidence une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombres rationnels distincts qui converge vers ξ, à savoir telle que

$$0 < |q_n\xi - p_n| < \delta_n\,, \tag{3.1}$$

où $(\delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs tendant vers 0. Lorsque l'on est capable de contrôler à la fois la croissance de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ et la vitesse de convergence de la suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$, la démonstration produit en fait une *mesure d'irrationalité* de ξ, dans le sens où elle permet de construire d'une manière non triviale une fonction Ψ prenant des valeurs positives et telle que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \Psi(q)\,,$$

pour tout nombre rationnel p/q. Cela découle d'une méthode élémentaire fondée sur l'utilisation d'inégalités triangulaires, laquelle, dans le cas particulier où il existe $\delta > 0$ tel que $\delta_n < q_n^{-\delta}$ et où

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty\,, \tag{3.2}$$

entraîne que l'*exposant d'irrationalité* $\mu(\xi)$ de ξ est fini. Rappelons que $\mu(\xi)$ désigne le supremum des nombres réels w tels que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < q^{-w}$$

possède une infinité de solutions rationnelles p/q. Cette technique permet par exemple de majorer l'exposant d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ (voir [Fi04]). Nous l'utilisons également pour obtenir les différentes mesures d'irrationalité présentées au chapitre 5.

Notons, en outre, que l'approche élémentaire à laquelle nous venons de faire allusion garantit également le contrôle de l'approximation de ξ par des nombres algébriques dès lors que leur degré est strictement inférieur à $1+\delta$. Cependant, dans la pratique, δ est souvent strictement inférieur à 1 et cette approche se voit alors limitée à l'approximation de ξ par des nombres rationnels.

De façon similaire, une démonstration de la transcendance d'un nombre réel ξ fondée sur la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt fait intervenir une suite $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ de r-uplets d'entiers ou bien une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de nombres algébriques de degrés bornés. Dans l'article [AdBu2], nous nous intéressons à une généralisation de la problématique précédente en nous demandant si une telle démonstration produit nécessairement une mesure de transcendance de ξ, pour peu que l'on sache quantifier la croissance des hauteurs des nombres algébriques α_n ou des points $\mathbf{x}_n$[1]. Le seul résultat dans cette direction, fut établi en 1964 par Baker [Bak64], il s'agit du théorème B1 énoncé dans la partie 3.1. Le théorème de Baker donne une mesure de transcendance explicite de tout nombre réel dont la transcendance peut être obtenue grâce au théorème de Roth, c'est-à-dire de tout nombre ξ pour lequel il existe $\delta > 1$ et une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels distincts vérifiant $q_n \geq 1$, (3.1) et (3.2) avec $\delta_n \leq q_n^{-\delta}$.

Dans la série d'articles [AdBu2], [AdBu1] et [AdBu3], nous développons une nouvelle approche fondée sur l'utilisation d'énoncés quantitatifs du théorème du sous-espace de Schmidt. Le terme quantitatif signifie ici que le nombre de sous-espaces exceptionnels peut être borné en fonction du nombre de variables des formes linéaires, du degré et de la hauteur des coefficients des formes linéaires, et du nombre de places finies considérées. Une telle version du théorème du sous-espace se trouve par exemple dans [ES02] (voir également le théorème ES au chapitre 2 pour un énoncé du même type, mais moins général). Le point de départ de [AdBu2] est une nouvelle démonstration du théorème B1, beaucoup plus simple que la démonstration originale. Outre sa simplicité, cette démonstration possède un autre avantage sur celle de Baker : elle se généralise sans trop de difficultés techniques à des situations où la transcendance du nombre ξ est établie non pas au moyen du théorème de Roth, mais à l'aide du théorème du sous-espace de Schmidt, comme l'illustrent les résultats présentés dans la suite de ce chapitre. On peut raisonnablement considérer que les résultats obtenus dans les articles [AdBu2], [AdBu1] et [AdBu3], apportent, pour l'essentiel, une réponse positive à la question générale (et un peu vague) évoquée précédemment.

3.1 Classification de Mahler et un théorème de Baker

Étant donné un nombre réel ξ, on peut toujours trouver un polynôme P à coefficients entiers tel que la quantité $|P(\xi)|$ soit arbitrairement petite. On peut même imposer que le degré de P ou que la hauteur de P ne dépasse pas une valeur fixée. En revanche, puisqu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes de degré au plus d et de

[1] Ce problème nous a été suggéré par Waldschmidt suite à un exposé de Bugeaud au GEPBD de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

hauteur au plus H, il devient pertinent de se demander à quel point la quantité $|P(\xi)|$ peut être petite lorsque le degré et la hauteur de P sont tous les deux bornés.

En 1932, Mahler [Mah32] a introduit une classification intéressante des nombres réels qui repose sur cette idée. Nous rappelons brièvement cette classification. Soient $d \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel. On note $w_d(\xi)$ le supremum des nombres réels w pour lesquels les inégalités

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}$$

sont vérifiées par une infinité de polynômes $P(X)$ à coefficients entiers, de degré majoré par d. Ici, $H(P)$ désigne la hauteur naïve de $P(X)$, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Notons que ces exposants généralisent l'exposant d'irrationalité puisque $w_1(\xi) = \mu(\xi) - 1$. Posant alors $w(\xi) = \limsup_{d\to+\infty}(w_d(\xi)/d)$, nous disons, suivant Mahler, que ξ est un

A-nombre, si $w(\xi) = 0$;
S-nombre, si $0 < w(\xi) < \infty$;
T-nombre, si $w(\xi) = \infty$ et $w_d(\xi) < \infty$ pour tout entier $d \geq 1$;
U-nombre, si $w(\xi) = \infty$ et $w_d(\xi) = \infty$ pour un entier $d \geq 1$.

Une propriété essentielle de la classification de Mahler est que deux nombres transcendants appartenant à des classes différentes sont algébriquement indépendants. Les A-nombres sont exactement les nombres algébriques. Au sens de la mesure de Lebesgue, presque tous les nombres réels sont des S-nombres. Les nombres de Liouville, qui sont par définition les nombres ξ vérifiant $w_1(\xi) = +\infty$ (observons que $w_1(\xi) = \mu(\xi) - 1$), sont des exemples de U-nombres, mais la confirmation de l'existence des T-nombres demeura un problème ouvert durant une quarantaine d'années, jusqu'à sa résolution par Schmidt [W. Sch70b]. Notons dès à présent que l'ensemble des U-nombres ξ se subdivise en une infinité dénombrable de sous-classes selon le plus petit entier d pour lequel $w_d(\xi)$ est infini. Soit $\ell \geq 1$ un entier. On dit qu'un nombre réel ξ est un *U_ℓ-nombre* si $w_\ell(\xi)$ est infini et $w_d(\xi)$ est fini pour $d = 1, \ldots, \ell - 1$. L'ensemble des U_1-nombres est exactement l'ensemble des nombres de Liouville.

Dans la suite, on s'attache à obtenir des mesures de transcendance de nombres réels ξ en majorant $w_d(\xi)$ pour tout entier $d \geq 1$. En conservant les notations précédentes, le résultat de Baker s'énonce comme suit.

Théorème B1. *Soient ξ et $\varepsilon > 0$ deux nombres réels. Supposons qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels écrits sous forme irréductible, ordonnés de sorte que $2 \leq q_1 < q_2 < \ldots$, et tels que, pour tout $n \geq 1$,*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}} \cdot \tag{3.3}$$

Si en outre la condition

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty \tag{3.4}$$

est vérifiée, alors il existe un nombre réel c, ne dépendant que de ξ et de ε, tel que

$$w_d(\xi) \leq e^{e^{cd^2}},$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.

Notons que le théorème de Roth implique la transcendance de ξ si l'on suppose seulement que (3.3) est vérifié.

3.2 Extension p-adique du théorème de Baker et nombres normaux

Nous donnons tout d'abord une extension p-adique du théorème B1 qui améliore également la mesure de transcendance donnée par Baker ; ce résultat est extrait de [AdBu2].

Théorème 3.1 *Soient ξ et $\varepsilon > 0$ deux nombres réels, et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de nombres premiers distincts. Supposons qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels écrits sous forme irréductible, ordonnés de sorte que $2 \leq q_1 < q_2 < \ldots$, et tels que, pour tout $n \geq 1$,*

$$0 < \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_n|_\ell \cdot |q_n|_\ell \right) \cdot \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}} \cdot$$

Si en outre la condition

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty$$

est vérifiée, alors il existe un nombre réel c, ne dépendant que de ξ, de ε et du cardinal de $\mathcal{S}$, tel que

$$w_d(\xi) \leq (2d)^{c \log\log 3d},$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Le théorème 3.1 a des conséquences intéressantes sur certains nombres normaux[2]. En 1933, Champernowne [Ch33] montra que le nombre

$$\zeta_{10,X} = 0.123\,456\,789\,101\,112\,131\,415 \cdots,$$

dont la suite des chiffres décimaux est la concaténation de la suite formée de tous les entiers classés par ordre croissant, est normal en base 10. Quatre années plus tard, Mahler [Mah37a] montra que $\zeta_{10,X}$ est transcendant mais n'est pas un nombre de Liouville, puis il généralisa ce résultat de la façon suivante. Soit $P(X)$ un polynôme non constant tel que $P(n)$ est un entier strictement positif pour tout $n \geq 1$. Soit $b \geq 2$ un entier. Pour tout entier positif x, notons $(x)_b$ la suite des chiffres de x écrit en base

[2] Une définition de cette notion est rappelée au chapitre 4.

b. Ainsi, $(x)_b$ est un mot fini sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$. Considérons le nombre réel

$$\zeta_{b,P(X)} = 0.(P(1))_b(P(2))_b \cdots$$

en base b. Mahler [Mah37b] établit que $\zeta_{b,P(X)}$ est transcendant, et n'est pas un nombre de Liouville. En outre, le résultat de Champernowne sur la normalité de $\zeta_{10,X}$ fut généralisé en 1952 aux nombres réels $\zeta_{b,P(X)}$ par Davenport et Erdős [DE52]. Ainsi, nous disposons d'une famille de nombres normaux, transcendants, et qui ne sont pas des nombres de Liouville.

Par la suite, Baker [Bak64] raffina le résultat de Mahler [Mah37a] en montrant que $\zeta_{10,X}$ est soit un S-nombre, soit un T-nombre. Sous certaines hypothèses additionnelles sur b et sur le degré de $P(X)$, la méthode de Baker entraîne que $\zeta_{b,P(X)}$ n'est pas un U-nombre, mais elle ne permet pas de traiter le cas de tous les nombres de cette forme. Le théorème 3.1 entraîne que ces hypothèses additionnelles sont superflues.

Théorème 3.2 *Pour tout entier $b \geq 2$ et tout polynôme $P(X)$ comme ci-dessus, le nombre réel $\zeta_{b,P(X)}$ est normal en base b, et il s'agit soit d'un S-nombre, soit d'un T-nombre.*

Par la suite, Mahler [Mah76] établit la transcendance d'une autre classe de nombres réels, qui inclut les $\zeta_{b,X}$. Le théorème 3.1 entraîne que ces nombres ne sont pas des U-nombres.

Il est en fait possible de donner des séries encore plus simples définissant des nombres normaux dans une base donnée. Dans cette direction, Bailey et Crandall [BC02] ont démontré que les nombres

$$\xi_{b,c,d} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{c^k b^{d^k}},$$

définis pour tous entiers b, c, d avec $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d > \sqrt{c}$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) = 1$, sont des nombres normaux en base b. En outre, il découle du théorème de Ridout que $\xi_{b,c,d}$ est transcendant. Le théorème 3.1 implique le résultat plus précis suivant.

Théorème 3.3 *Soient b, c, d des entiers tels que $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d > \sqrt{c}$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) = 1$. Alors, le nombre réel $\xi_{b,c,d}$ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.*

3.3 Extensions multidimensionnelles du théorème de Baker

Le théorème de Roth a été généralisé dans de nombreuses directions. La plupart des résultats connus relèvent du théorème du sous-espace ou, plus exactement, de sa généralisation aux corps de nombres incluant des valeurs absolues p-adiques (voir les énoncés du chapitre 2). Nous rappelons ci-dessous deux énoncés importants démontrés en 1970 par W. M. Schmidt [W. Sch70a] et qui sont des cas particuliers du théorème du sous-espace.

Le premier résultat concerne l'approximation rationnelle simultanée des puissances d'un nombre réel. Rappelons que $\|x\|$ désigne la distance du nombre réel x à l'entier le plus proche.

Théorème Schmidt1. *Soient $r \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à r. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(q_n)_{n\geq 1}$ tels que*

$$\|q_n\xi\| \cdot \|q_n\xi^2\| \cdots \|q_n\xi^r\| < \frac{1}{q_n^{1+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Alors, le nombre réel ξ est transcendant.

Le second énoncé est une généralisation du théorème de Roth au cas de l'approximation d'un nombre réel par des nombres algébriques de degré borné. Ici, $H(\alpha)$ désigne la hauteur naïve du nombre algébrique α, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal.

Théorème Schmidt2. *Soient ξ un nombre réel, $r \geq 1$ un entier et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres algébriques distincts de degré au plus r. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$|\xi - \alpha_n| < \frac{1}{H(\alpha_n)^{r+1+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Alors, le nombre ξ est transcendant.

Le théorème de Roth correspond au cas $r = 1$ dans les théorèmes Schmidt1 et Schmidt2.

Dans l'article [AdBu2], nous raffinons ces deux résultats fondamentaux. Nous précisons tout d'abord la conclusion du théorème Schmidt1 lorsque la suite d'approximations rationnelles est suffisamment dense.

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses du théorème Schmidt1, si l'on suppose de plus que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty,$$

alors, soit ξ est un U_ℓ-nombre pour un certain entier $\ell \leq r$, soit il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^2(\log\log 3d)\}$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, dans le dernier cas, ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.

Le résultat suivant précise le théorème Schmidt2 lorsque la suite d'approximations $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est suffisamment dense.

Théorème 3.5 *Sous les hypothèses du théorème Schmidt2, si l'on suppose de plus que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log H(\alpha_{n+1})}{\log H(\alpha_n)} < +\infty,$$

alors, il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^r(\log\log 3d)^r\}$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

3.4 Applications aux nombres extrémaux de Roy

Les problèmes d'approximation diophantienne simultanée sont en général plus difficiles lorsque les quantités approchées sont linéairement indépendantes. Un exemple classique est donné par l'approximation simultanée des n premières puissances d'un nombre transcendant par des nombres rationnels de même dénominateur. Dans cette partie, nous nous concentrons sur le cas de la dimension 2, à savoir, sur l'approximation uniforme simultanée d'un nombre et de son carré par des nombres rationnels. Notons $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ le nombre d'or.

Dans ce contexte, le théorème de Dirichlet s'étend comme suit. Pour tout nombre réel ξ et tout nombre réel $X > 1$, le système d'inégalités

$$\begin{aligned} |x_0\xi - x_1| &\leq X^{-1/2}, \\ |x_0\xi^2 - x_2| &\leq X^{-1/2}, \\ |x_0| &\leq X, \end{aligned}$$

a une solution non nulle $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$. Il est assez naturel de penser que l'exposant $-1/2$ ne peut pas être diminué pour un nombre ξ qui n'est ni rationnel, ni quadratique. Dans cette direction, une première limitation fut obtenue par Davenport et Schmidt [DS69].

Théorème DS. *Soit ξ un nombre réel qui n'est ni rationnel, ni quadratique. Alors, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que le système d'inégalités*

$$\begin{aligned} |x_0\xi - x_1| &\leq cX^{-1/\varphi}, \\ |x_0\xi^2 - x_2| &\leq cX^{-1/\varphi}, \\ |x_0| &\leq X, \end{aligned}$$

n'a aucune solution non nulle $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ pour X suffisamment grand.

Remarquons que $1/\varphi = 0.618\cdots$ est supérieur à $1/2$. Comme nous l'avons mentionné, il fut pendant longtemps conjecturé que l'exposant $-1/\varphi$ dans le théorème DS pourrait être remplacé par $-1/2$. Ce n'est en fait pas le cas, comme l'a récemment montré Roy [Roy04].

Théorème R. *Il existe un nombre réel ξ, qui n'est ni rationnel ni quadratique, et un nombre réel $c > 0$ tels que le système d'inégalités*

$$\begin{aligned} |x_0\xi - x_1| &\leq cX^{-1/\varphi}, \\ |x_0\xi^2 - x_2| &\leq cX^{-1/\varphi}, \\ |x_0| &\leq X, \end{aligned}$$

a une solution non nulle $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ *pour tout nombre réel* $X > 1$.

Ce résultat est assez surprenant si l'on pense que le volume du corps convexe défini par les inégalités du théorème R tend rapidement vers 0 lorsque X tend vers l'infini. Notons également que le théorème R conduit (voir [Roy03]) à des résultats liés à une conjecture célèbre de Wirsing [Wi60] concernant l'approximation des nombres réels par des nombres algébriques de degrés bornés.

Tout nombre réel ξ satisfaisant à la condition diophantienne exceptionnelle du théorème R est appelé, suivant Roy, un *nombre extrémal.* Roy a démontré que l'ensemble des nombres extrémaux est dénombrable. En outre, il a donné des exemples explicites de nombres extrémaux, comme le nombre

$$\zeta = [1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots]$$

dont la suite des quotients partiels est le mot de Fibonacci défini sur l'alphabet $\{1, 2\}$[3]. Roy [Roy04] a également obtenu une mesure d'irrationalité des nombres extrémaux qui implique que leur exposant d'irrationalité est égal à 2. Plus précisément, étant donné un nombre extrémal ξ, il existe des nombres réels $c > 0$ et $t \geq 0$ qui dépendent uniquement de ξ et tels que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2(1 + \log q)^t},$$

pour tout nombre rationnel p/q.

Comme conséquence du théorème 3.5, nous obtenons dans [AdBu2] une mesure de transcendance des nombres extrémaux.

Théorème 3.6. *Pour tout nombre extrémal* ξ *et tout entier* $d \geq 1$, *il existe un nombre réel* c *indépendant de* d *tel que*

$$w_d(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^2(\log\log 3d)^2\}.$$

En particulier, un nombre extrémal est soit un S*-nombre, soit un* T*-nombre.*

[3] Voir le chapitre 1 pour une définition.

Deuxième partie

Nombres réels « anormaux » : bégaiements et palindromie

Chapitre 4

Développement de périodes irrationnelles dans une base entière

Kontsevitch et Zagier [KZ01] ont récemment proposé un cadre prometteur pour essayer de distinguer les « constantes classiques » des autres nombres réels en introduisant les notions de *période* et de *période exponentielle*. Une période est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions rationnelles avec des coefficients rationnels, sur des domaines de $\mathbb{R}^n$ définis par des égalités ou des inégalités polynomiales ayant des coefficients rationnels. Les nombres algébriques, π, $\log 2$ et $\zeta(3)$ sont des exemples emblématiques de périodes, tandis que e n'est (conjecturalement) pas une période. En revanche, le nombre e est le prototype d'une période exponentielle. Ces dernières sont définies de la même façon que les périodes, mais on autorise l'intégrande à être le produit d'une fonction algébrique avec l'exponentielle d'une fonction algébrique. Les périodes exponentielles forment un ensemble dénombrable qui contient celui des périodes. Nous renvoyons le lecteur à [KZ01] pour plus de détails sur ces notions, mais, pour paraphraser ces auteurs, on peut dire que *toutes les constantes mathématiques classiques sont des périodes en un sens approprié*[1].

Le développement décimal de périodes exponentielles comme $\sqrt{2}$, π, e ou $\log 2$, semble assez mystérieux et, depuis longtemps, intrigue les mathématiciens. Les observations numériques semblent plaider en faveur d'une structure complexe et plusieurs mathématiciens ont suggéré des définitions rigoureuses pour essayer de formaliser ce que le terme « structure complexe » peut vouloir dire dans ce contexte. Leurs principales influences ont été la théorie des probabilités, celle des systèmes dynamiques et

[1]Cette affirmation mérite sans doute un certain bémol. Ici, les constantes classiques désignent des nombres provenant de la géométrie et de l'analyse (valeurs de fonctions spéciales). La notion de « nombre classique » est par essence évolutive et il semble de plus en plus difficile d'interdire cette dénomination aux nombres de Chaitin (voir [Ca02]) ou au nombre de Liouville $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n!}}$.

l'informatique théorique. Ces travaux précurseurs nous laissent avec un amas de conjectures fascinantes relatives au développement de périodes irrationnelles dans une base entière. Ce panorama conjectural contraste pour le moins avec l'état de nos connaissances sur le sujet, et les questions les plus naïves que l'on peut imaginer poser dans ce domaine se révèlent la plupart du temps hors d'atteinte.

Ce chapitre est, pour l'essentiel, consacré aux périodes les plus simples, à savoir les nombres algébriques. Pour montrer que la suite des décimales des nombres algébriques a une structure complexe, une première étape consiste *a contrario* à exhiber certains comportements combinatoires du développement décimal qui assure la transcendance des nombres réels associés. Par exemple, il est connu depuis Liouville [Li1844] qu'un nombre algébrique irrationnel ne peut avoir une infinité d'occurrences précoces de trop longs blocs de zéros consécutifs dans son développement décimal. Une conséquence de cette remarque est la transcendance du nombre réel

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n!}}\,.$$

Nous pouvons grossièrement résumer notre contribution à ce domaine comme une tentative de généralisation de ce résultat classique. Notre approche consiste en un mélange d'outils provenant de la combinatoire des mots, de la dynamique symbolique et de l'informatique théorique, avec, d'autre part, des outils diophantiens puissants. Dans cette direction, nous utilisons dans [ABL04] une version p-adique du théorème du sous-espace pour démontrer le résultat suivant qui peut être pensé comme une sorte de « théorème de Roth combinatoire »[2].

Théorème 4.1. *Soient $b \geq 2$ un entier et α, $0 < \alpha < 1$, un nombre réel algébrique irrationnel, et $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ la suite des chiffres du développement en base b de α. Alors, on a $Dio(\mathbf{a}) = 1$.*

Rappelons que $\mathrm{Dio}(\mathbf{a})$ désigne l'exposant diophantien de la suite $\mathbf{a}$ défini au chapitre 1. Ce résultat a de nombreuses conséquences intéressantes, certaines d'entre elles étant décrites dans la suite de ce chapitre.

4.1 Nombres normaux et complexité

Un nombre réel est un *nombre normal* si pour tout entier $b \geq 2$ et tout entier $n \geq 1$, chacun des b^n blocs de chiffres de longueur n sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ apparaît dans son développement en base b avec la fréquence $1/b^n$. Cette notion fut introduite en 1909 par Borel [Bo1909] qui démontra que presque tout nombre réel est normal. Ce résultat contraste fortement avec le fait que nous ne connaissons pas le moindre exemple « naturel » de nombre normal. Bien que nos connaissances dans

[2] L'exposant diophantien remplace ici l'exposant d'irrationalité présent dans le théorème de Roth qui peut être reformulé comme suit : tout nombre algébrique irrationnel a un exposant d'irrationalité minimal, c'est-à-dire égal à 2.

ce domaine soient pour le moins limitées, une conjecture classique stipule que toute période irrationnelle devrait être un nombre normal.

Une manière intéressante (et peut être plus raisonnable) d'aborder ce problème consiste à considérer la *fonction de complexité* des nombres réels. Cette notion est inspirée de la fonction de complexité d'un mot infini définie au chapitre 1. Soient ξ un nombre réel et $b \geq 2$ un entier. Le nombre ξ a un unique développement en base b, c'est-à-dire, il existe une unique suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq -k}$ à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ telle que

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{n \geq -k} \frac{a_n}{b^n} \\ &= a_{-k} a_{-k+1} \cdots a_{-1} a_0 \bullet a_1 a_2 \cdots . \end{aligned}$$

La fonction de complexité de ξ en base b est la fonction qui associe à tout entier $n \geq 1$ l'entier

$$p(\xi, b, n) = \mathrm{Card}\{(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+n-1}),\ j \geq 1\}.$$

Un nombre normal a donc une complexité maximale en toute base entière, à savoir $p(\xi, b, n) = b^n$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $b \geq 2$. Comme nous l'avons déjà mentionné, on s'attend généralement à obtenir une telle complexité pour des nombres tels que $\sqrt{2}$, π et e. Ce problème fut d'abord suggéré par Hedlund et Morse [MH38] dans leur travaux fondateurs sur la dynamique symbolique.

Le résultat fondamental de Morse et Hedlund (le théorème MH1 du chapitre 1) peut alors être reformulé comme suit.

Théorème MH1 (reformulation). *Soit ξ un nombre réel. Alors ξ est rationnel si, et seulement si, sa fonction de complexité est bornée en toute base $b \geq 2$. De plus, si ξ est irrationnel, sa fonction de complexité est strictement croissante en toute base $b \geq 2$ et*

$$p(\xi, b, n) - n \geq 1, \tag{4.1}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Obtenir des minorations de la fonction de complexité des nombres algébriques irrationnels est une tâche plutôt difficile. En 1997, Ferenczi et Mauduit [FM97] ont obtenu le premier résultat dans cette direction améliorant asymptotiquement la minoration donnée par (4.1).

Théorème FM. *Soient $b \geq 2$ un entier et ξ nombre réel algébrique irrationnel. Alors,*

$$\lim_{n \to \infty} p(\xi, b, n) - n = +\infty.$$

Leur approche repose sur le théorème de Ridout [Rid57] énoncé au chapitre 2. Dans l'article [AdBu07d], nous utilisons le théorème 4.1 pour obtenir une amélioration significative du théorème FM.

Théorème 4.2. *Soient $b \geq 2$ un entier et ξ nombre réel algébrique irrationnel. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(\xi, b, n)}{n} = +\infty\,.$$

Bien qu'une légère amélioration ait été donnée récemment par Bugeaud et Evertse [BE08] au moyen d'une version quantitative du théorème du sous-espace, le théorème 4.2 est la principale minoration connue pour la fonction de complexité des nombres algébriques irrationnels.

Nos connaissances concernant les périodes transcendantes sont encore plus limitées. Apparemment, avant l'article [Ad10], on ne connaissait pas le moindre exemple de période exponentielle transcendante pour laquelle une amélioration de la minoration donnée par (4.1) soit connue. Dans l'article [Ad10], nous combinons des résultats combinatoires fins concernant les mots sturmiens, dus pour l'essentiel à Berthé, Holton et Zamboni [BHZ06], avec l'utilisation de l'exposant diophantien, pour obtenir une première minoration de la fonction de complexité des nombres réels dont l'exposant d'irrationalité est égal à 2[3].

Théorème 4.3. *Soient $b \geq 2$ un entier et ξ un nombre irrationnel dont l'exposant d'irrationalité est égal à 2. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} p(\xi, b, n) - n = +\infty\,. \tag{4.2}$$

Une conséquence notable de ce résultat est que, pour tout entier $b \geq 2$, le nombre e vérifie (4.2). À notre connaissance, il s'agit du premier exemple de période exponentielle transcendante pour laquelle la minoration (4.1) est améliorée. La seule propriété du nombre e utilisée ici est le fait que $\mu(e) = 2$. Cette propriété découle de la formule d'Euler décrivant le développement en fraction continue de e. En fait, de nombreux exemples de nombres liés à la fonction exponentielle, aux fonctions trigonométriques, ou aux fonctions de Bessel, ont un exposant d'irrationalité égal à 2. En particulier, l'égalité (4.2) reste valable si l'on remplace le nombre ξ par n'importe lequel des nombres suivants :

$$e^a,\ a \in \mathbb{Q}, a \neq 0\,;$$

$$\tan\left(\frac{1}{a}\right), \sqrt{a}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \frac{1}{\sqrt{a}}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right),\ a \in \mathbb{N}, a \neq 0\,;$$

$$\tanh\left(\frac{2}{a}\right),\ a \in \mathbb{N}, a \neq 0\,;$$

$$\sqrt{\frac{v}{u}}\tanh\left(\frac{1}{\sqrt{uv}}\right),\ u, v \in \mathbb{N}, uv \neq 0\,.$$

[3] La définition de l'exposant d'irrationalité est rappelée au chapitre 3.

D'autres nombres intéressants couverts par notre approche sont les nombres

$$\frac{J_{(p/q)+1}(2/q)}{J_{p/q}(2/q)} \quad \text{et} \quad \frac{I_{(p/q)+1}(2/q)}{I_{p/q}(2/q)}, \ p/q \in \mathbb{Q},$$

où $J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)}$ désigne la fonction de Bessel de première espèce et où $I_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{\lambda+2n}}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)}$ désigne la fonction de Bessel modifiée (ou hyperbolique) de première espèce.

Citons enfin une autre conséquence remarquable du théorème 4.2 : si ξ est un nombre réel irrationnel ayant une suite de quotients partiels bornés dans son développement en fraction continue, alors, pour tout entier $b \geq 2$, la fonction de complexité du développement en base b de ξ vérifie (4.2).

4.2 Complexité algorithmique : le problème de Hartmanis et Stearns

Les travaux précurseurs de Turing [Tu37] conduisent à une classification grossière des nombres réels. D'un côté, on trouve les nombres réels calculables, c'est-à-dire les nombres réels dont le développement binaire (ou plus généralement en base b) peut être produit par une machine de Turing, tandis que de l'autre se trouvent les nombres réels non calculables qui, en quelque sorte, « échappent aux ordinateurs ». Bien que la plupart des nombres appartiennent à la seconde classe (la première étant dénombrable), les constantes classiques (comme les périodes) sont généralement calculables. Suivant les idées pionnières de Turing, Hartmanis et Stearns [HS65] ont développé l'aspect quantitatif de la notion de calculabilité, en prenant en compte le nombre $T(n)$ d'opérations nécessaires à une machine de Turing (à plusieurs rubans) pour produire les n premiers chiffres du développement. De ce point de vue, un nombre réel est d'autant plus simple que son développement en base b peut être produit rapidement par une machine de Turing. Une problématique générale consiste alors à déterminer où se situent les constantes mathématiques classiques dans cette classification. Elle est source de nombreuses questions ouvertes comme le problème de Hartmanis–Stearns : existe-t-il des nombres algébriques irrationnels calculables en temps linéaire, c'est-à-dire pour lesquels $T(n) = O(n)$?

En 1968, Cobham [Co68] suggéra de restreindre le problème de Hartmanis–Stearns à une classe particulière de machines de Turing simples : les automates finis. Après plusieurs tentatives de Cobham en 1968, puis de Loxton et van der Poorten [LvdP82] en 1982, Loxton et van der Poorten [LvdP88] annoncèrent finalement avoir complètement résolu le problème en 1988. Leur démonstration, qui est fondée sur une méthode introduite par Mahler [Mah29], s'est avérée malheureusement incomplète, comme l'a expliqué Becker [Bec94]. Une conséquence importante du théorème 4.1 est la confirmation de la conjecture de Cobham [AdBu07c].

Théorème 4.4. *Le développement dans une base entière $b \geq 2$ d'un nombre algébrique irrationnel ne peut être engendré par un automate fini.*

Observons que le théorème 4.4 découle de la combinaison des théorèmes 1.3 et 4.1.

Dans les articles [ACL1] et [ACL2], nous revisitons le problème de Hartmanis–Stearns. Nous considérons diverses classes de machines, comme certains automates infinis ou certaines classes d'automates à piles. Pour chaque modèle de calcul choisi, nous demandons si de telles machines sont suffisamment puissantes pour produire le développement d'un nombre algébrique irrationnel dans une base entière. Une motivation particulière vient de la hiérarchie de Chomsky–Schützenberger des grammaires et des langages formels (voir par exemple [CS63]), à laquelle sont associées des classes intéressantes de machines. À nouveau, le théorème 4.1 peut être utilisé pour obtenir plusieurs résultats qui généralisent assez largement le théorème 4.4. Cette approche semble assez prometteuse et il reste sans doute encore beaucoup à accomplir dans cette direction.

4.3 Le développement binaire des nombres algébriques

Étant donné un entier $b \geq 3$, nous ne sommes malheureusement toujours pas capables de prouver que tous les chiffres $0, 1, \ldots, b-1$, apparaissent dans le développement en base b de tout nombre algébrique irrationnel. Notons qu'une réponse positive à cette question permettrait de résoudre une conjecture bien connue de Mahler [Mah84] concernant l'absence de nombres algébriques irrationnels dans l'ensemble triadique de Cantor. En revanche, il est facile de voir que les deux chiffres 0 et 1 apparaissent infiniment souvent dans le développement binaire de tout nombre irrationnel. Ainsi, il peut être parfois avantageux de travailler avec la base 2 qui offre une combinatoire un peu plus simple. Nous donnons dans la suite deux exemples de telles situations.

4.3.1 Une minoration effective pour le nombre d'occurrences du chiffre 1

On s'attend, comme conséquence de leur éventuelle normalité, à ce que le développement binaire d'un nombre algébrique irrationnel ait essentiellement la même proportion d'occurrences du chiffre 0 et du chiffre 1. Plus précisément, si $\#(|\xi|, N)$ désigne le nombre de 1 parmi les N premiers chiffres du développement binaire du nombre algébrique irrationnel ξ, on devrait avoir

$$\#(|\xi|, N) \sim \frac{N}{2} \cdot$$

On semble encore bien loin de prouver un tel résultat et minorer la quantité $\#(|\xi|, N)$, lorsque ξ est un nombre algébrique irrationnel, reste un problème délicat. Soit $\xi =$

$\sum_{i\geq 0} \frac{1}{2^{n_i}}$ un nombre réel binaire. Alors, il existe des entiers p_k tels que $\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{n_i}} = \frac{p_k}{2^{n_k}}$ et

$$\left|\xi - \frac{p_k}{2^{n_k}}\right| < \frac{2}{2^{n_{k+1}}} \cdot$$

D'un autre côté, si ξ est un nombre algébrique irrationnel et $\varepsilon > 0$ un nombre réel, alors le théorème de Ridout implique que

$$\left|\xi - \frac{p_k}{2^{n_k}}\right| > \frac{1}{2^{(1+\varepsilon)n_k}} ,$$

pour k assez grand. Cela implique que $n_{k+1} > (1+\varepsilon)n_k - 1$ pour de tels k, propriété dont découle aisément le fait que

$$\#(|\xi|, N) > \frac{\log N}{\log(1+\varepsilon)} + O(1) . \tag{4.3}$$

Dans [BBCP04], Bailey, Borwein, Crandall et Pomerance obtiennent une amélioration spectaculaire de l'inégalité (4.3) en suivant une approche très originale.

Théorème BBCP. *Soient ξ un nombre réel algébrique de degré $d \geq 2$, a_d le coefficient dominant de son polynôme minimal, $\varepsilon > 0$ un nombre réel et $c_1 = ((2+\epsilon)a_d)^{-1}$. Alors, on a*

$$\#(|\xi|, N) > c_1 N^{1/d} , \tag{4.4}$$

pour tout entier N assez grand.

L'approche de Bailey, Borwein, Crandall et Pomerance offre une nouvelle preuve de plusieurs résultats classiques comme la transcendance des nombres

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{2^n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{F_n}} ,$$

où F_n désigne le n-ième nombre de Fibonacci. En outre, le théorème BBCP implique la transcendance du nombre

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n^{\lfloor \log\log n \rfloor}}} ,$$

pour lequel aucune autre démonstration n'est connue.

La preuve de Bailey *et al.* mélange astucieusement des idées provenant de la théorie additive des nombres et le théorème de Roth. Le seul argument non élémentaire de leur démonstration est justement le résultat de Roth. De façon un peu surprenante, le fait de remplacer le théorème de Roth par le théorème de Ridout ne permet qu'une amélioration marginale du théorème BBCP : le terme $2+\varepsilon$ dans la définition de la constante c_1 peut être remplacée par $1+\varepsilon$.

Dans l'article [AF], nous choisissons une direction opposée, préférant substituer au théorème de Roth un résultat bien plus faible : l'inégalité de Liouville. Nous avons en effet remarqué que le résultat obtenu est essentiellement le même, mais avec une constante c_2 légèrement plus petite que c_1. Le premier avantage est d'obtenir une preuve complètement élémentaire, mais ce n'est pas le seul. En effet, une caractéristique du théorème BBCP est son ineffectivité : il ne permet pas de déterminer d'entier N à partir duquel la minoration (4.4) est valable. Nous remarquons dans [AF] que chaque étape de la preuve de Bailey *et al.* peut être rendue effective, mise à part bien entendu l'utilisation du théorème de Roth dont l'ineffectivité est malheureusement célèbre. Puisque l'inégalité de Liouville est un résultat effectif, l'approche de [AF] conduit à l'obtention dune minoration effective de $\#(|\xi|, N)$, lorsque ξ est un nombre algébrique irrationnel.

Théorème 4.5. *Soient ξ un nombre réel algébrique de degré d, a_d le coefficient dominant du polynôme minimal de ξ, $H(\xi)$ la hauteur naïve*[4] *de ξ et $c_2 = \left(\frac{7d-2}{16d^2 a_d}\right)^{1/d}$. Alors,*

$$\#(|\xi|, N) > c_2 N^{1/d}$$

pour tout entier $N \geq (8H(\xi)d^3)^d$.

Par exemple, le théorème 4.5 implique qu'il existe au moins $\lfloor 0,94\sqrt{N} \rfloor$ occurrences du chiffre 1 parmi les N premiers chiffres de $\sqrt{2}$, dès que $N > 17\,000$.

4.3.2 Motifs inévitables

Bien qu'il soit facile de montrer que chaque bloc de chiffres 0, 1, 01 et 10 apparaît infiniment souvent dans le développement binaire de tout nombre irrationnel, nous sommes malheureusement toujours incapables de dire si n'importe quel autre bloc de chiffres, comme par exemple 00 ou 11, apparaît infiniment souvent ou non dans le développement binaire de $\sqrt{2}$.

Au lieu de s'intéresser aux éventuelles occurrences d'un bloc de chiffres spécifique, nous proposons dans [AdRa08] de ne prendre en compte que le squelette combinatoire du développement binaire des nombres algébriques. Il s'agit de remplacer les mots, ou blocs de chiffres, par des *motifs*. Le plus simple pour définir cette notion est encore de donner un exemple de ce que l'on entend par motif. Un *carré* est un motif de la forme XX, où X est un mot fini non vide. Ainsi, les mots 00, 11 et 011 011 sont des mots différents, mais qui reflètent le même motif XX. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, ce motif est inévitable sur un alphabet binaire. Cela implique que le développement binaire de tout nombre irrationnel contient une infinité de carrés, bien que nous soyons incapable d'exhiber un seul d'entre eux. Si l'on s'intéresse aux occurrences de motifs plus répétitifs, la situation est nettement plus subtile. Rappelons qu'un *chevauchement* sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est un motif de la forme $xXxXx$ où $x \in \mathcal{A}$

[4]Rappelons qu'il s'agit du maximum des modules des coefficients du polynôme minimal de ξ.

et $X \in \mathcal{A}^*$. En 1912, Thue [Thue12] démontra l'existence d'un mot infini binaire évitant tout chevauchement en construisant le célèbre mot de Thue–Morse $\mathbf{t} = (t_n)_{n\geq 0}$. Comme conséquence de l'éventuelle normalité des nombres algébriques irrationnels, chaque motif de la forme X^w, avec $w > 1$, devrait apparaître dans le développement binaire de n'importe quel nombre algébrique. Un tel motif est appelé une *puissance d'ordre* w. Dans [AdRa08], nous combinons le théorème 4.1 avec un résultat récent de la théorie des motifs évitables, du à Karhumäki et Shallit [KS04], pour obtenir le premier résultat dans cette direction.

Théorème 4.6. *Le développement binaire de tout nombre algébrique contient une infinité de puissances d'ordre* $7/3$.

En 1929, Mahler [Mah29] démontra que le nombre binaire de Thue–Morse,

$$\xi_{\mathbf{t},2} = \sum_{n\geq 0} \frac{t_n}{2^n},$$

est transcendant. Comme conséquence immédiate du théorème 4.6, nous donnons la généralisation suivante de ce résultat.

Corollaire 4.7. *Le développement binaire de tout nombre algébrique contient une infinité de chevauchements.*

4.4 Variations sur le même thème : développement dans une base non entière, fonctions bégayantes et développement de Hensel des nombres p-adiques

Nous donnons dans cette partie quelques résultats se situant dans la lignée de ceux présentés dans l'article [AdBu07c], mais qui ne concernent pas le développement dans une base entière.

Notons d'abord que tous les résultats de transcendance obtenus à partir des résultats de [ABL04, AdBu07c], et relatifs aux développement dans une base entière, peuvent être traduits, sans difficulté additionnelle, pour démontrer des résultats analogues concernant la transcendance de nombres p-adiques définis par leur développement de Hensel.

Parmi les différentes représentations des nombres réels dans une base réelle β, les β-développements introduits par Rényi [Ré57] occupent une place centrale[5] (voir le

[5]Étant donné un nombre réel $\beta > 1$, le β-développement d'un nombre réel $\xi \in [0,1[$ est défini comme la suite $d_\beta(\xi) = (a_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans l'alphabet $\mathcal{A}_\beta = \{0, 1, \ldots, \lceil\beta\rceil - 1\}$ et produite par la β-transformation $T_\beta : x \mapsto \beta x \bmod 1$ en utilisant l'algorithme glouton. Cela signifie que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(\xi)\rfloor$. Le β-développement de ξ remplace dans ce contexte le développement décimal puisque

$$\xi = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}.$$

chapitre 11). Ils sont étudiés par de nombreux auteurs et pour des raisons très diverses, relatives notamment à la théorie ergodique, la dynamique symbolique, la théorie des pavages, la cristallographie, la théorie des nombres ou la théorie des langages formels. Contrairement au cas des développements dans une base entière, il est généralement difficile de déterminer si un nombre algébrique a ou non un β-développement ultimement périodique lorsque $\beta > 1$ est un nombre algébrique irrationnel. En outre, il semble difficile de décrire le β-développement d'un nombre algébrique lorsque celui-ci n'est ni ultimement périodique, ni fini. Par exemple, le développement de 1 en base 3/2 semble assez chaotique. Dans l'article [AdBu07d], nous formulons une hypothèse conjecturale (similaire à celle de normalité dans le cas d'une base entière) qui expliquerait ce phénomène, puis nous prouvons certains résultats dans cette direction en démontrant la transcendance de nombres ayant un β-développement « simple » dans une base algébrique β. Lorsque β est un nombre de Pisot[6] ou de Salem[7], nous obtenons les analogues des théorèmes 4.2 et 4.4. En particulier, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 4.8. *Soient β un nombre de Pisot ou de Salem et $\alpha \in [0,1]$ un nombre algébrique qui n'appartient pas au corps de nombres $\mathbb{Q}(\beta)$. Alors, le β-développement de α ne peut être engendré par un automate fini.*

Nous introduisons dans [ABL08] une classe de fonctions analytiques particulièrement intéressante du point de vue arithmétique : les fonctions bégayantes. Ce sont des fonctions analytiques dont les coefficients sont des nombres algébriques appartenant à un même corps de nombres, vérifiant une condition de hauteur, et formant une suite bégayante, c'est-à-dire dont l'exposant diophantien est strictement supérieur à 1. Certaines familles particulières de fonctions bégayantes ont été étudiées par différents auteurs dont Mahler [Mah29], Loxton et van der Poorten [LvdP77, LvdP82, LvdP88], Nishioka [Ni96] et plus récemment Corvaja et Zannier [CZ02a]. Ces auteurs ont démontré que les fonctions bégayantes qu'ils étudient prennent des valeurs transcendantes en tout point algébrique non nul de leur domaine de convergence. Plus généralement, nous nous attendons à ce que toute fonction bégayante prenne des valeurs transcendantes en tout point algébrique de son disque de convergence, à l'exception éventuellement d'un nombre fini d'entre eux. Dans l'article [ABL08], nous prouvons un critère assez général de transcendance qui présente l'avantage de s'appliquer à toutes les fonctions bégayantes, mais dont la conclusion est bien plus faible.

[6] Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1 dont les conjugués de Galois sont tous de module strictement inférieur à 1.

[7] Un nombre de Salem est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1 dont les conjugués de Galois sont tous de module inférieur à 1 et qui possède au moins un conjugué de module égal à 1.

Chapitre 5

Nombres réels de complexité sous-linéaire

La fonction de complexité définie au chapitre 4 induit naturellement une hiérarchie des nombres réels [AdBu3]. Étant donné une fonction strictement croissante f prenant des valeurs entières strictement positives, on définit la classe de complexité $\mathcal{C}(f)$ par

$$\mathcal{C}(f) = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \text{il existe une base } b \geq 2 \text{ telle que } p(n, \xi, b) = O(f(n))\} \ .$$

Cette classification des nombres réels diffère de façon drastique de celles issues des travaux de Turing et que l'on peut exprimer en termes de complexité algorithmique en temps ou en espace. En effet, dans ces dernières, les classes étudiées sont formées de nombres calculables au sens de Turing. Ici, dès que la fonction f croît au moins linéairement, l'ensemble $\mathcal{C}(f)$ est non dénombrable et contient ainsi des nombres non calculables.

Cette hiérarchie offre deux principaux champs d'investigation. Une première direction, déjà envisagée au chapitre 4, consiste à étudier la complexité de constantes classiques comme $\sqrt{2}, \pi, e$ ou $\zeta(3)$. On s'attend à ce que le développement de chacun de ces nombres soit de complexité maximale quelle que soit la base entière choisie, bien qu'un tel résultat semble hors d'atteinte pour le moment. D'autre part, on peut se demander quelles sont les propriétés dont jouissent les nombres réels ayant un ordre de complexité prescrit. Cette seconde direction fait l'objet de l'article [AdBu3] dans lequel nous proposons une étude assez approfondie des nombres réels appartenant à la classe

$$\mathcal{CL} = \{\xi \in \mathbb{R} : \text{il existe une base } b \geq 2 \text{ telle que } p(n, \xi, b) = O(n)\} \ .$$

Nous dirons qu'un élément de la classe $\mathcal{CL}$ est un *nombre réel de complexité sous-linéaire*. Ces nombres se situent donc au bas de la hiérarchie considérée. Un aspect remarquable des nombres de complexité sous-linéaire est qu'ils peuvent souvent être décrits par des procédés algorithmiques, dynamiques ou arithmétiques simples, comme l'illustrent les parties 5.3, 5.4 et 5.5. Aussi trouve-t-on dans la littérature de nombreux travaux ayant pour objet l'étude de familles particulières de nombres réels appartenant à la classe $\mathcal{CL}$ (voir par exemple [Mah29, Da77, AD77, LvdP77, Bun80, LvdP82, LvdP88, Ni91, Ni96, FM97, AZ98, Mas99, Qu02, AC03, AS03] pour une liste non exhaustive). En revanche, il a longtemps semblé difficile de traiter tous ces nombres de façon globale. Dans l'article [AdBu07c], nous avons développé une nouvelle approche permettant d'obtenir le premier résultat de ce type, à savoir le théorème 4.1. En effet, celui-ci peut être reformulé à l'aide de l'alternative suivante : *un nombre réel qui appartient à la classe $\mathcal{CL}$ est soit rationnel, soit transcendant.*

Évidemmment, le théorème MH1 cité au chapitre 4 implique que tous les nombres rationnels sont des nombres de complexité sous-linéaire. Il est donc impossible d'échapper à l'alternative « rationnel ou transcendant » présente dans la reformulation du théorème 4.1 donnée ci-dessus. Cela n'est pas réellement gênant puisque nous disposons d'un critère de rationalité combinatoire efficace pour les nombres définis par leur développement dans une base entière : un nombre est rationnel si, et seulement si, son développement dans toute base entière est ultimement périodique. Nous pouvons ainsi distinguer aisément, parmi les nombres réels de complexité sous-linéaire, les nombres transcendants des nombres rationnels.

L'objet de l'article [AdBu3] est de préciser le théorème 4.1 en obtenant des mesures d'irrationalité et de transcendance, ainsi que des résultats d'indépendance algébrique, pour les éléments de la classe $\mathcal{CL}$. Dans cette direction, nous démontrons deux résultats principaux, les théorèmes 5.1 et 5.2. Des applications de ces deux résultats sont ensuite données dans le reste de ce chapitre.

5.1 Mesures de transcendance pour les éléments de la classe $\mathcal{CL}$

L'un des résultats principaux de [AdBu3] est le théorème suivant qui donne une mesure de transcendance générale pour les éléments de la classe $\mathcal{CL}$.

Théorème 5.1 *Soit ξ un nombre irrationnel appartenant à la classe $\mathcal{CL}$. Alors, ou bien ξ est un nombre de Liouville, ou bien il existe un nombre réel c, indépendant de d, tel que*

$$w_d(\xi) \leq (2d)^{c(\log 3d)(\log\log 3d)},$$

pour tout entier $d \geq 1$. Dans ce dernier cas, ξ est un S-nombre ou un T-nombre.

La démonstration du théorème 5.1 repose sur une version quantitative du théorème du sous-espace de Schmidt établie par Evertse et Schlickewei [ES02] et suit la méthode générale développée au chapitre 3. Il s'agit de combiner l'approche de [AdBu07c] avec celle développée dans [AdBu2] afin de contrôler la qualité de l'approximation de tout nombre réel appartenant à la classe $\mathcal{CL}$ par des nombres algébriques de degré fixé au moins égal à deux. Tout comme le théorème 4.1, le théorème 5.1 présente une alternative à laquelle on ne peut espérer se soustraire. En effet, la classe $\mathcal{CL}$ contient aussi bien le nombre de Liouville

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n\,!}}$$

que le nombre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{2^n}}\,,$$

lequel, d'après un résultat de Nishioka [Ni96], est un S-nombre. Néanmoins, nous ignorons s'il existe des T-nombres ayant une complexité sous-linéaire.

Le théorème 5.1 nous renvoie donc au problème de distinguer, parmi les éléments de la classe $\mathcal{CL}$, les nombres de Liouville de ceux qui n'en sont pas. Pour cela, nous utilisons l'*exposant diophantien*, qui s'interprète comme une mesure de la périodicité du développement de ξ en base b. Nous montrons alors comment cet exposant permet d'obtenir une mesure d'irrationalité générale pour les nombres de complexité sous-linéaire (théorème 5.2). En particulier, nous établissons qu'un élément de $\mathcal{CL}$ est un nombre de Liouville si, et seulement si, son exposant diophantien est infini (corollaire 5.3). Ce critère combinatoire pour déterminer si un élément de $\mathcal{CL}$ est, ou non, un nombre de Liouville s'avère efficace dans la pratique comme l'illustrent les applications données dans les parties 5.3, 5.4 et 5.5.

5.2 Exposant diophantien et mesures d'irrationalité

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'approximation des éléments de la classe $\mathcal{CL}$ par des nombres rationnels. Nous cherchons à obtenir des mesures d'irrationalité pour ces nombres, c'est-à-dire à majorer leur *exposant d'irrationalité*. Rappelons que l'exposant d'irrationalité d'un nombre réel irrationnel ξ, noté $\mu(\xi)$, désigne le supremum des nombres réels μ pour lesquels l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < q^{-\mu}$$

possède une infinité de solutions rationnelles p/q. Pour tout nombre irrationnel ξ, on a

$$2 \leq \mu(\xi) \leq +\infty\,. \tag{5.1}$$

Les nombres de Liouville sont par définition les nombres réels dont l'exposant d'irrationalité est infini. Récemment, Bugeaud [Bu08] a démontré que, pour tout nombre réel $\mu \geq 2$, il existe une infinité de nombres réels ξ appartenant à la classe $\mathcal{CL}$ et tels que $\mu(\xi) = \mu$. Le comportement des nombres réels de complexité sous-linéaire vis-à-vis de l'approximation rationnelle est donc très variable, ce qui rend *a priori* difficile l'obtention d'une mesure d'irrationalité générale pour les éléments de la classe $\mathcal{CL}$.

Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons l'*exposant diophantien*, introduit dans le chapitre 1. Nous montrons comment il permet de contrôler de façon assez satisfaisante l'approximation rationnelle des nombres réels de complexité sous-linéaire, complétant ainsi le théorème 5.1. En particulier, cet exposant permet de caractériser, parmi les éléments de la classe $\mathcal{CL}$, ceux qui sont des nombres de Liouville.

Pour tout entier $b \geq 2$, notons $\mathrm{Dio}(\xi, b)$ l'exposant diophantien du développement de ξ en base b. En tronquant ce développement puis en le complétant par périodicité, on construit de bonnes approximations rationnelles de ξ qui nous permettent aisément de minorer l'exposant d'irrationalité $\mu(\xi)$ de ξ et d'établir, lorsque ξ est irrationnel, que

$$\mu(\xi) \geq \mathrm{Dio}(\xi, b)\,. \tag{5.2}$$

En revanche, ce raisonnement très simple n'est en principe d'aucune aide pour majorer $\mu(\xi)$, sauf, cependant, lorsque ξ est de complexité sous-linéaire, comme l'illustre le résultat suivant.

Théorème 5.2 *Soient $b, c \geq 2$ deux entiers et $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ telle que $p(n, \mathbf{a}) \leq cn$ pour tout entier n assez grand. Alors, le nombre réel*

$$\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{b^k}$$

vérifie

$$\max\{2, Dio(\xi, b)\} \leq \mu(\xi) \leq (2c+1)^3 (Dio(\xi, b) + 1)\,. \tag{5.3}$$

Nous déduisons du théorème 5.1 un critère combinatoire pour distinguer les nombres de Liouville dans l'ensemble des nombres de complexité sous-linéaire en base b, c'est-à-dire dans l'ensemble des nombres réels ξ tels que $p(n, \xi, b) = O(n)$.

Corollaire 5.3 *Soient $b \geq 2$ un entier et ξ un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire en base b. Alors, ξ est un nombre de Liouville si, et seulement si, $Dio(\xi, b)$ est infini.*

Ainsi, de façon assez surprenante, la lecture « naïve » du développement d'un nombre réel de complexité sous-linéaire nous permet toujours de déterminer s'il s'agit ou non d'un nombre de Liouville.

Notons enfin que l'exposant diophantien d'un nombre réel est parfois égal à son exposant d'irrationalité. En particulier, si

$$\xi = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha \rfloor}}\,,$$

avec $\alpha > 1$ irrationnel et $b \geq 2$ entier, les résultats présentés dans [AA07] (voir aussi [AD77]) impliquent que

$$\mu(\xi) = \mathrm{Dio}(\xi, b) = 1 + \limsup_{n\to+\infty}\, [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]\,,$$

où $a_0, a_1, \ldots$, désignent les quotients partiels du développement en fraction continue du nombre α.

5.3 Nombres réels automatiques

Un nombre réel engendré par un automate fini, ou plus simplement *automatique*, est un nombre dont le développement dans une base entière peut être produit par un automate fini. Les nombres réels automatiques forment une classe remarquable de nombres calculables qui se situent au bas de la hiérarchie associée aux machines de Turing. D'après un résultat classique de Cobham [Co72], les nombres automatiques appartiennent également à la classe $\mathcal{CL}$.

Alors que la transcendance de certains nombres automatiques emblématiques, comme

$$\xi_d = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{d^n}} \, ,$$

est connue depuis bien longtemps (voir [Kem16] ou [Mah29]), une réponse générale n'a été donnée que récemment dans [AdBu07c] : *tout nombre automatique irrationnel est transcendant*. Une étude systématique de l'approximation rationnelle des nombres automatiques a ensuite été développée dans [AC06] ; article dans lequel l'approche de [ABL04, AdBu07c] est rendue pour la première fois quantitative. Le résultat principal de [AC06] est la confirmation d'une conjecture de Shallit stipulant que le développement dans une base entière d'un nombre de Liouville ne peut être engendré par un automate fini.

Théorème 5.4. *Les nombres irrationnels automatiques ont un exposant d'irrationalité fini. En d'autres termes, le développement dans une base entière d'un nombre de Liouville ne peut être engendré par un automate fini.*

En fait, une conjecture plus forte stipulant que les nombres automatiques irrationnels devraient être des S-nombres a été suggérée par Becker en 1993 dans sa correspondance avec Shallit. En combinant les théorèmes 5.3 et 5.4, nous faisons dans [AdBu3] un premier pas en direction de cette conjecture.

Théorème 5.5 *Un nombre irrationnel automatique est soit un S-nombre, soit un T-nombre.*

Tous les résultats ou conjectures que nous venons de mentionner montrent que les nombres automatiques irrationnels partagent (au moins conjecturalement) certaines propriétés satisfaites par presque tous les nombres réels, comme par exemple être transcendant, avoir un exposant d'irrationalité fini, ou encore être un S-nombre. À l'inverse, certains nombres automatiques jouissent de propriétés très spéciales par rapport à l'approximation rationnelle. En guise d'illustration, rappelons que $\mu(\xi_d) = d$ pour tout entier $d \geq 2$. Récemment, Bugeaud [Bu08] s'est intéressé à cette question et a obtenu le résultat suivant.

Théorème Bu. *Pour tout nombre rationnel $\omega \geq 2$, il existe une infinité de nombres réels automatiques ξ tels que $\mu(\xi) = \omega$.*

En fait, Bugeaud construit des séries automatiques lacunaires explicites pour lesquelles on peut calculer la valeur exacte de l'exposant d'irrationalité. Cependant, ces exemples sont *ad hoc* et ne figurent pas parmi les exemples classiques de nombres automatiques, tels que ceux associés aux suites de Thue-Morse, de Rudin-Shapiro et de Baum-Sweet, ou encore à la suite de pliage de papier. Il n'est en fait pas évident de se faire une idée de la façon dont ces nombres automatiques peuvent être approchés par des nombres rationnels, et, la plupart du temps, aucun majorant fin n'est connu pour leur exposant d'irrationalité. Dans l'article [AdRi09], nous donnons des majorants de l'exposant d'irrationalité de tous les nombres automatiques que nous venons d'évoquer. Ces bornes sont obtenues à partir de constructions explicites d'approximants de Padé ou d'approximants de « type Padé » pour les fonctions génératrices de ces suites automatiques. Ces approximations fonctionnelles sont obtenues par deux voies. Une première approche, fondée sur les équations fonctionnelles satisfaites par ces fonctions génératrices, s'apparente à la méthode de transcendance de Mahler (voir [Mah29, Ni96]). Elle permet d'obtenir des approximants de Padé suffisamment bons arithmétiquement pour pouvoir majorer l'exposant d'irrationalité des nombres automatiques associés. La seconde approche que nous utilisons est celle introduite dans [AC06]. Elle est fondée sur un théorème classique de Cobham qui caractérise les suites automatiques en termes de morphismes de monoïdes libres (le théorème C1 du chapitre 1). La plupart du temps cette approche produit seulement des approximants de « type Padé », mais ceux-ci s'avèrent tout de même suffisamment bons arithmétiquement pour majorer l'exposant d'irrationalité des nombres automatiques étudiés. Parfois, cette méthode produit également de « vrais approximants de Padé ». Afin de donner une idée des mesures obtenues, nous mentionnons le cas emblématique des nombres de Thue–Morse $\xi_{\mathbf{t},b} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n/b^n$ associés à la suite de Thue–Morse $\mathbf{t} = (t_n)_{n\geq 0}$ déjà définie au chapitre 1.

Théorème 5.6. *Pour tout entier $b \geq 2$, on a*

$$\mu\bigl(\xi_{\mathbf{t},b}\bigr) \leq 4\,.$$

Ce résultat améliore la mesure d'irrationalité précédemment donnée dans [AC06] où l'exposant d'irrationalité des nombres $\xi_{\mathbf{t},b}$ est majoré par 5.

5.4 Nombres sturmiens et séries de Hecke–Mahler

Depuis les travaux précurseurs de Morse et Hedlund [MH38, MH40], les suites sturmiennes ont fait l'objet d'une littérature impressionnante (voir par exemple [Lo02] pour une introduction à ce sujet). Un *nombre sturmien* est simplement défini comme un nombre réel dont le développement dans une base entière est une suite sturmienne. Comme nous allons le voir, l'étude des nombres sturmiens a également une longue histoire.

Notons qu'une suite sturmienne ne prend que deux valeurs distinctes. Dans la suite de cette partie nous nous limitons à l'étude des nombres sturmiens dont les chiffres sont 0 et 1, mais nos résultats s'adaptent sans peine à tous les nombres sturmiens. Il découle de l'une des nombreuses caractérisations des suites sturmiennes qu'un nombre écrit en base $b \geq 2$ avec les seuls chiffres 0 et 1 est sturmien si, et seulement si, il est de la forme

$$S_b(\alpha, \rho) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha + \rho \rfloor}}$$

ou bien

$$S'_b(\alpha, \rho) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lceil n\alpha + \rho \rceil}},$$

avec $\alpha > 1$ irrationnel et $0 \leq \rho \leq 1$.

Les nombres sturmiens sont également liés aux valeurs aux points $1/b$ des séries de Hecke–Mahler

$$f(z, \alpha, \rho) = \sum_{n \geq 1} \lceil n\alpha + \rho \rceil z^n,$$

dont la transcendance aux points z algébriques a été étudiée depuis les travaux précurseurs de Mahler [Mah29]. Ces fonctions analytiques correspondent essentiellement à la transformée de Mellin de certaines fonction de Dirichlet étudiées par Hecke [He21], puis par Hardy et Littlewood [HL23a, HL23b]. Mahler [Mah29] a établi en particulier la transcendance de $S_b(\alpha, 0)$ pour α quadratique, un résultat étendu en 1977 par Loxton et van der Poorten [LvdP77] à tout nombre α irrationnel, également au moyen de la méthode de Mahler. Plus récemment, Masser [Mas99] a obtenu des résultats d'indépendance algébrique pour les nombres $S_b(\alpha, 0)$ avec α quadratique, toujours en utilisant la méthode de Mahler. D'autre part, il est bien connu que le paramètre ρ est une source de difficultés importantes. Ainsi, il a fallu attendre 1997 pour que Ferenczi et Mauduit [FM97] démontrent la transcendance de tous les nombres sturmiens comme conséquence du théorème FM énoncé au chapitre 4.

En combinant les théorèmes 1.2 et 5.3, nous avons généralisé un résultat établi en 1980 par Bundschuh [Bun80] et correspondant au cas particulier où $\rho = 0$ dans le théorème suivant.

Théorème 5.7 *Soient $b \geq 2$ un entier, $\alpha > 1$ un nombre irrationnel et $\rho > 0$ un nombre réel. Le nombre réel*

$$S_b(\alpha, \rho) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha + \rho \rfloor}}$$

est un nombre de Liouville si, et seulement si, α est nombre à quotients partiels non bornés. De plus, si α est un nombre à quotients partiels bornés, alors $S_b(\alpha, \rho)$ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Le théorème 5.7 conduit également à des résultats d'indépendance algébrique, comme l'illustre l'exemple suivant.

Corollaire 5.8 *Les deux nombres réels*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{\lfloor ne+\pi \rfloor}} \quad et \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^{\lfloor n\sqrt{2}+\zeta(3) \rfloor}}$$

sont algébriquement indépendants.

5.5 Nombres lacunaires

Nous dirons qu'un nombre réel ξ est un *nombre lacunaire* si son développement dans une base entière $b \geq 2$ s'écrit

$$\xi = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{b^{u_n}},$$

où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs vérifiant

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1\,.$$

Les nombres

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n\,!}}\,, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{\lfloor \theta^n \rfloor}}\,, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{F_n}}\,,$$

où $\theta > 1$ désigne un nombre réel et F_n est le n-ième nombre de Fibonacci, sont des exemples classiques de nombres lacunaires. Le fait que les nombres lacunaires sont des nombres de complexité sous-linéaire est une observation assez simple, et le théorème de Ridout [Rid57] implique qu'ils sont transcendants, un résultat que nous précisons dans [AdBu3].

Théorème 5.9. *Soit $b \geq 2$ un nombre entier. Un nombre lacunaire*

$$\xi = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{b^{u_n}}$$

est un nombre de Liouville si, et seulement si, la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée. De plus, si cette suite est bornée, alors ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Notons également que Corvaja et Zannier [CZ02a] ont utilisé le théorème du sous-espace de façon astucieuse pour démontrer la transcendance de séries lacunaires lorsque l'entier b est remplacé par un nombre algébrique non nul du disque complexe unité ouvert. Nous profitons de cette occasion pour signaler que le résultat de la note [Ad04b] s'avère être une conséquence de résultats plus généraux obtenus antérieurement dans [CZ02a].

Chapitre 6

Fractions continues transcendantes

La façon dont les nombres algébriques irrationnels peuvent être approchés par des nombres rationnels est une question centrale en analyse diophantienne. Cette problématique est bien sûr intimement liée au développement en fraction continue des nombres algébriques irrationnels[1]. Rappelons que le développement en fraction continue d'un nombre réel irrationnel α est ultimement périodique si, et seulement si, α est un irrationnel quadratique. En revanche, on ne dispose que de très peu d'informations sur la taille des quotients partiels des nombres algébriques de degré supérieur ou égal à 3. Certaines investigations numériques laissent à penser que le développement en fraction continue de ces nombres pourrait se comporter comme celui d'un nombre « choisi au hasard ». Plus formellement, on conjecture par exemple que la suite formée par leurs quotients partiels n'est pas bornée. Il s'agit d'un problème important suggéré par Khintchine [Kh49]. Bien que presque aucun résultat n'ait été démontré dans cette direction, certaines spéculations audacieuses sont dues à Lang [Lan65, Lan95] ; elles incluent notamment le fait que tout nombre algébrique de degré supérieur ou égal à 3 devrait essentiellement se comporter comme presque tout nombre réel par rapport aux lois de Gauss–Khintchine–Kuzmin–Lévy.

Plus modestement, on peut penser que si la suite des quotients partiels d'un nombre irrationnel est suffisamment simple, alors ce dernier est soit quadratique, soit transcendant. Cette alternative séduisante se doit d'être formalisée, le terme « simple » pouvant conduire à des interprétations différentes. Il peut désigner aussi bien des nombres réels dont le développement en fraction continue peut être produit par un algorithme simple (par exemple par une machine de Turing simple), que provenant d'un système dynamique simple... Quoi qu'il en soit, une première étape consiste à produire des exemples explicites de fractions continues « simples » transcendantes. Ce thème a en fait une longue histoire. Le premier résultat de ce type remonte aux

[1] Nous ne donnons pas de rappels concernant la théorie des fractions continues et renvoyons le lecteur aux ouvrages [HW08] et [Kh49].

travaux précurseurs de Liouville [Li1844], lequel construisit des nombres réels transcendants avec une suite de quotients partiels croissant très rapidement. Ensuite, plusieurs auteurs utilisèrent des résultats diophantiens plus profonds afin de construire de nouvelles classes de fractions continues transcendantes. Dans cette direction, citons les travaux de Maillet [Mai1906] dans lesquels on trouve les premiers exemples de nombres transcendants ayant une suite de quotients partiels bornée. L'approche de Maillet fut notamment poursuivie par Baker [Bak62, Bak64]. Plus récemment, de nouvelles familles remarquables de fractions continues transcendantes ont été mises en évidence par différents auteurs, dont Allouche, Baxa, Davison, Queffélec et Zamboni [Da89, Qu98, Qu00, ADQZ01, Da02, Bax04, Da07]. Le point commun de tous ces travaux est de reposer sur des résultats diophantiens issus de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt. Nous donnons ci-dessous deux exemples de résultats assez récents sur ce sujet. Tout d'abord, en 1998, Queffélec [Qu98] a démontré la transcendance des fractions continues de Thue–Morse.

Théorème Q. *Soient a et b deux entiers distincts strictement positifs et $\mathbf{t} = (t_n)_{n\geq 0}$ la suite de Thue–Morse à valeurs dans l'alphabet $\{a, b\}$. Alors, le nombre réel $\zeta_{\mathbf{t}} = [t_0, t_1, \ldots]$ est transcendant.*

En suivant l'approche de Queffélec, elle-même inspirée de travaux antérieurs de Davison [Da89], il est également possible de montrer la transcendance des fractions continues sturmiennes [ADQZ01].

Théorème ADQZ. *Soient a et b deux entiers distincts strictement positifs et $\mathbf{s} = (s_n)_{n\geq 0}$ une suite sturmienne à valeurs dans l'alphabet $\{a, b\}$. Alors, le nombre réel $\zeta_{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, \ldots]$ est transcendant.*

Dans une série d'articles [AdBu05, AdBu07e, AdBu07f, ABD06], nous montrons comment le théorème du sous-espace peut être utilisé afin d'améliorer de façon significative tous les résultats antérieurs relatifs à la construction de fractions continues transcendantes. Nous donnons en particulier plusieurs critères combinatoires de transcendance améliorant fortement ceux de [Bak62, Qu98, ADQZ01]. Un aspect particulièrement intéressant de ces différents critères est qu'ils conduisent naturellement à de nouveaux résultats concernant les différentes approches mentionnées précédemment des notions de « simplicité/complexité » pour le développement en fraction continue des nombres réels algébriques de degré supérieur ou égal à 3. Nous discutons certains de ces résultats dans la suite de ce chapitre.

6.1 Fractions continues de Maillet–Baker

Au début du siècle dernier, Maillet [Mai1906] démontra que si $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ est une suite non ultimement périodique d'entiers strictement positifs, pour laquelle il existe une infinité d'entiers n tels que

$$a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{n+\lambda(n)-1} ,$$

alors le nombre réel $\zeta_{\mathbf{a}} = [a_0, a_1, \cdots]$ est transcendant, dès que $\lambda(n)$ est plus grand qu'une certaine fonction du dénominateur du n-ième convergent de $\zeta_{\mathbf{a}}$. Sa démonstration repose sur une version de l'inégalité de Liouville qui limite l'approximation des nombres algébriques par des nombres quadratiques irrationnels. En effet, avec les notations précédentes, les nombres quadratiques α_n, dont le développement en fraction continue est

$$[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n^{\infty}] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_n, a_n, \ldots] ,$$

fournissent une infinité de « trop bonnes » approximations de $\zeta_{\mathbf{a}}$. Il n'est pas surprenant que la percée faite par Roth [Rot55] conduise à une amélioration de ce résultat. Ainsi, Baker [Bak62] utilisa en 1962 un résultat de LeVeque [Le56], correspondant à une généralisation du théorème de Roth aux corps de nombres, pour améliorer fortement les résultats de Maillet et les rendre plus explicites. L'idée principale de Baker est la suivante : lorsque la suite $\mathbf{a}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, une infinité des approximants quadratiques mis en évidence par Maillet appartiennent en fait à un même corps de nombres. Il devient alors avantageux de remplacer l'inégalité de Liouville utilisée par Maillet par le résultat de LeVeque.

Soient $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite apériodique d'entiers strictement positifs, $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers, et $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ et $(r_k)_{k\geq 0}$ deux suites d'entiers strictement positifs. Supposons que pour tout entier k, on a $n_{k+1} \geq n_k + \lambda_k r_k$ et

$$a_{m+r_k} = a_m \ \text{ pour } \ n_k \leq m \leq n_k + (\lambda_k - 1)r_k - 1 , \tag{6.1}$$

et considérons le nombre réel ζ défini par

$$\zeta_{\mathbf{a}} = [a_0, a_1, \ldots] .$$

Alors, $\zeta_{\mathbf{a}}$ a un développement en fraction continue « quasi périodique » dans le sens suivant : pour tout entier k, un bloc de r_k quotients partiels est répété consécutivement λ_k fois, une telle répétition se produisant juste après le $(n_k - 1)$-ième quotient partiel.

Dans [Bak62], Baker établit plusieurs résultats améliorant les travaux fondateurs de Maillet. Nous rappelons ci-dessous l'un d'entre eux.

Théorème B2. *Soient $A \geq 2$ un entier et $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite apériodique d'entiers strictement positifs majorés par A et satisfaisant à la condition (6.1) pour une suite bornée $(r_k)_{k\geq 0}$. Supposons que*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{n_k} > B = B(A) ,$$

où B est défini par

$$B = 2\left(\frac{\log\left(\left(A + \sqrt{A^2+4}\right)/2\right)}{\log\left((1+\sqrt{5})/2\right)}\right) - 1 .$$

Alors, le nombre réel $\zeta_{\mathbf{a}} = [a_0, a_1, \ldots]$ *est transcendant.*

Remarquons d'abord que $B(A)$ croît avec A et que $\lim_{A\to\infty} B(A) = +\infty$. La plus petite valeur de B, obtenue pour $A = 2$, est $B(2) \simeq 2.66\cdots$. Notons également que, si l'on ne connaît pas de borne explicite pour la suite $\mathbf{a}$, le théorème B2 requiert l'hypothèse plus forte

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{n_k} = +\infty\,.$$

Une des difficultés de la preuve du théorème B2 est de nécessiter une estimation précise de la croissance des dénominateurs des convergents du nombre $\zeta_{\mathbf{a}}$. C'est la raison pour laquelle, dans ce résultat, la valeur de B dépend de A.

Dans l'article [AdBu07f], nous améliorons les différents résultats obtenus par Baker dans [Bak62]. En particulier, nous obtenons une amélioration significative du théorème B2. Bien qu'elle repose sur le théorème du sous-espace, notre approche diffère réellement de celle suivie par Baker. Nous utilisons de façon cruciale la formule du miroir[2], une identité classique de la théorie des fractions continues, mais qui n'avait jusque là jamais été utilisée dans ce contexte.

Théorème 6.1. *Soit* $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ *une suite apériodique d'entiers strictement positifs vérifiant (6.1). Notons* $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ *la suite des convergents du nombre réel*

$$\zeta_{\mathbf{a}} = [a_0, a_1, \ldots]\,.$$

Supposons que la suite $(q_n^{1/n})_{n\geq 1}$ *est bornée (ce qui est toujours le cas si* $\mathbf{a}$ *est bornée), et que*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{n_k} > 0\,.$$

Alors, le nombre réel $\zeta_{\mathbf{a}}$ *est transcendant.*

Contrairement au théorème B2, le théorème 6.1 ne requiert ni que la suite des quotients partiels de $\zeta_{\mathbf{a}}$ ne soit bornée, ni que la longueur des blocs qui sont répétés ne soit bornée. La condition imposée à la croissance de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ est en général assez facile à vérifier et n'est pas très restrictive comme le montre par exemple le résultat de Lévy rappelé dans la partie 6.4. En guise d'illustration, notons que la transcendance du nombre réel

$$\zeta = [\underline{1}, 2, 3, \underline{1, 1}, 4, 5, 6, 7, \underline{1, 1, 1}, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \underline{1, 1, 1, 1, 1}, 16, 17, \ldots]$$

découle immédiatement du théorème 6.1.

[2] Cette formule élémentaire stipule que si $p_n/q_n := [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ désigne le n-ième convergent d'un nombre réel, alors $q_n/q_{n-1} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$. Un survol sur certaines applications récentes de cette formule est proposé dans [AA07].

6.2 Fractions continues bégayantes

Dans les articles [AdBu05] et [ABD06], nous donnons plusieurs critères combinatoires permettant de démontrer la transcendance de nombres réels dont le développement en fraction continue est une suite bégayante[3]. Nous donnons ici l'un de ces énoncés qui peut être formulé aisément grâce à l'exposant critique initial introduit au chapitre 1.

Théorème 6.2. *Soit* $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ *une suite apériodique d'entiers strictement positifs. Notons* $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ *la suite des convergents du nombre réel*

$$\zeta_{\mathbf{a}} = [a_0, a_1, \ldots] .$$

Si $\mathrm{Ice}(\mathbf{a}) \geq 2$*, alors* $\zeta_{\mathbf{a}}$ *est transcendant. Si* $\mathrm{Ice}(\mathbf{a}) > 1$ *et si la suite* $(q_n^{1/n})_{n\geq 1}$ *est bornée, alors* $\zeta_{\mathbf{a}}$ *est transcendant.*

L'intérêt principal de la première partie du théorème 6.2 est d'éviter toute condition sur la croissance de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$. La seconde partie du théorème 6.2 améliore significativement le résultat principal de [ADQZ01], lequel requiert, sous des conditions supplémentaires relativement contraignantes, l'hypothèse plus forte $\mathrm{Ice}(\mathbf{a}) > 3/2$. Mis à part le fait que la suite $(q_n^{1/n})_{n\geq 1}$ doit être bornée, le théorème 6.2 ne dépend pas de la taille des quotients partiels de $\zeta_{\mathbf{a}}$. Cela contraste fortement avec tous les résultats connus jusqu'alors dans ce domaine ; résultats qui requièrent généralement que la quantité $\mathrm{Ice}(\mathbf{a})$ soit d'autant plus grande que les quotients partiels de $\zeta_{\mathbf{a}}$ sont grands. Contrairement à ces résultats antérieurs, le théorème 6.2 s'applique sans peine même dans le cas où $\zeta_{\mathbf{a}}$ a des quotients partiels non bornés.

Le théorème 6.2 et ses extensions ont de nombreuses conséquences intéressantes, comme nous l'expliquons dans [AdBu05, ABD06]. Par exemple, ce résultat permet de prouver la transcendance de nombreux nombres réels dont le développement en fraction continue est automatique, comme ceux associés aux suites de Rudin–Shapiro et de Baum–Sweet. En guise d'illustration, nous donnons le résultat suivant, obtenu dans [AdBu05], et qui découle du théorème 6.2.

Théorème 6.3. *Soient* a *et* b *deux entiers strictement positifs distincts, et* φ *un morphisme défini sur le monoïde* $\{a, b\}^*$*. Soit* $\mathbf{a} = a_0 a_1 \cdots$ *un mot apériodique engendré par* φ*. Alors, le nombre réel*

$$\zeta_{\mathbf{a}} = [a_0, a_1, \ldots]$$

est transcendant.

En fait, la conclusion de ce théorème reste valable si $\mathbf{a}$ est une suite d'entiers strictement positifs engendrée par n'importe quel morphisme primitif. Nous démontrons ainsi la transcendance du nombre réel

$$\zeta = [1, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 2, 2, 1, 2, \ldots] ,$$

[3] Voir le chapitre 1 pour une définition.

dont la suite des quotients partiels est l'unique point fixe commençant par 1 du morphisme primitif φ défini sur le monoïde libre $\{1,2,3,4\}^*$ par $\varphi(1) = 12334$, $\varphi(2) = 23$, $\varphi(3) = 422$ et $\varphi(4) = 1$.

6.3 Fractions continues palindromiques

Le point commun de tous les résultats présentés jusqu'ici dans ce chapitre est d'utiliser le fait qu'un nombre réel ait un développement en fraction continue « quasi périodique » pour démontrer sa transcendance. D'autre part, des fractions continues commençant par des palindromes arbitrairement longs apparaissent dans plusieurs articles récents, principalement sous l'impulsion des travaux originaux de Roy [Roy03, Roy04]. Gardant à l'esprit notre problématique générale, nous nous sommes demandés dans [AdBu07e] si l'occurrence précoce de motifs symétriques dans le développement en fraction continue d'un nombre réel irrationnel implique que ce dernier est quadratique ou transcendant.

Comme nous l'avons mentionné, il y a une longue tradition dans l'utilisation d'un « excès de périodicité » pour prouver la transcendance de fractions continues. Cela est très naturel puisque si le développement en fraction continue d'un nombre réel ζ commence par le motif périodique $ABBB$ (ici, A et B désignent deux blocs finis de quotients partiels), alors ζ est « très proche » du nombre quadratique ayant un développement en fraction continue ultimement périodique donné par AB^∞. Le fait qu'un « excès de symétrie » puisse également conduire à la transcendance du nombre considéré est plus surprenant et complètement nouveau, bien que ce phénomène soit sous-jacent dans [Roy04]. Comme pour les résultats concernant les fractions continues de Maillet–Baker, la formule du miroir joue ici un rôle capital.

Dans l'article [AdBu07e], nous obtenons trois nouvelles conditions combinatoires de transcendance qui s'appliquent à une large classe de fractions continues, incluant des fractions continues dont les quotients partiels ne sont pas bornés. Ces résultats correspondent exactement à ceux obtenus dans [AdBu05, ABD06] lorsque les motifs répétitifs sont remplacés par des motifs symétriques. Comme dans [AdBu05], les démonstrations reposent sur le théorème du sous-espace. En guise d'illustration, nous donnons ici un énoncé très simple extrait de [AdBu07e]. Nous rappelons qu'un mot fini $w_1 w_2 \cdots w_r$ est un *palindrome* si $w_1 w_2 \cdots w_r = w_r w_{r-1} \cdots w_1$.

Théorème 6.4. *Soit* $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'entiers strictement positifs commençant par des palindromes arbitrairement longs. Alors, le nombre réel*

$$\zeta_{\mathbf{a}} = [a_0, a_1, \ldots]$$

est soit un nombre quadratique, soit un nombre transcendant.

Notons qu'il n'y a aucune hypothèse faite sur la croissance de la suite $\mathbf{a}$ dans le théorème 6.4. Plusieurs exemples de fractions continues classiques comme la fraction continue de Thue–Morse

$$[1,2,2,1,2,1,1,2,2,1,1,2,1,2,2,1,\ldots],$$

ou la fraction continue de Fibonacci

$$[3,4,3,3,4,3,4,3,3,4,3,3,4,3,4,3,\ldots],$$

vérifient les hypothèses du théorème 6.4. En outre, nous avons montré dans [AdBu07a] que le théorème 6.4 permet d'obtenir une nouvelle preuve, bien plus courte, du théorème Q énoncé dans ce chapitre.

Il faut également signaler qu'il est très facile de construire des fractions continues transcendantes en utilisant le théorème 6.4. Voici un procédé à la fois général et élémentaire. Notons $\overline{W} = a_n \cdots a_1$ l'image miroir du mot $W = a_1 \cdots a_n$. Par définition, W est un palindrome si $W = \overline{W}$. Étant donnée une suite arbitraire $\mathbf{u} = (U_n)_{n\geq 0}$ de mots finis non vides formés d'entiers strictement positifs, on définit récursivement une suite de mots finis$(A_n)_{n\geq 0}$ en posant $A_0 = U_0$ et $A_{n+1} = A_n U_{n+1} \overline{A_n U_{n+1}}$, pour $n \geq 0$. Par construction, A_{n+1} est un palindrome. De plus, A_{n+1} commence par A_n et la suite de mots finis $(A_n)_{n\geq 0}$ converge donc vers un mot infini $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots$. Si la suite $\mathbf{a}$ est apériodique, le théorème 6.4 implique que le nombre réel

$$\zeta_{\mathbf{a}} = [0, a_1, a_2, \ldots]$$

est transcendant.

Notons enfin que l'on ne sait toujours pas démontrer la transcendance d'un nombre réel irrationnel dont l'écriture dans une base entière commence par des palindromes arbitrairement longs. Par exemple, si $(a_n)_{n\geq 1}$ désigne une telle suite à valeurs dans l'alphabet $\{0,1\}$, nous obtenons seulement qu'au moins l'un des deux nombres

$$\xi = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{et} \quad \xi_2 = \sum_{n\geq 1} a_n 2^n$$

est transcendant. Évidemment ξ_2 désigne ici un élément de $\mathbb{Q}_2$ et le terme « transcendant » signifie transcendant sur $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_2$. Ce résultat est extrait de l'article [AdBu06b].

6.4 La suite des dénominateurs des convergents des nombres algébriques

En 1936, Lévy [Lé36] démontra un résultat remarquable : pour presque tout nombre réel on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12 \log 2} \cdot$$

Il suit en particulier que la suite $(q_n^{1/n})_{n\geq 1}$ est presque sûrement bornée. En outre, le théorème de Lagrange implique que la suite $(q_n^{1/n})_{n\geq 1}$ est bornée pour les nombres quadratiques. On s'attend également à ce que ce soit le cas pour les nombres algébriques de degré au moins 3. Il semble cependant que l'on soit toujours bien loin de démontrer, ou d'infirmer, cette conjecture.

La première majoration de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$, valable pour tout nombre algébrique irrationnel, découle de l'inégalité de Liouville. Plus précisément, cette inégalité implique que

$$\log\log q_n \ll n\,. \tag{6.2}$$

Rappelons que l'inégalité (6.2) fut utilisée par Liouville [Li1844] pour produire les premiers exemples de fractions continues transcendantes. En 1955, Roth [Rot55] démontra que, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble des solutions de l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}}\,,$$

en entiers p et $q > 0$ premiers entre eux, est fini. Dans un article commun avec Davenport [DR55], certaines étapes de [Rot55] furent rendues plus explicites dans le but de majorer le cardinal $\mathcal{N}(\xi,\delta)$ de cet ensemble. En outre, Davenport et Roth [DR55] établirent que, pour $\delta \leq 1/3$, il existe des constantes strictement positives c et c', dépendant uniquement de ξ, et telles que

$$\mathcal{N}(\xi,\delta) \leq c\,\exp\{c'\delta^{-2}\}\,. \tag{6.3}$$

L'inégalité (6.3) permet, comme l'ont montré Davenport et Roth, d'améliorer la majoration (6.2), et d'obtenir

$$\log\log q_n \ll \frac{n}{\sqrt{\log n}}\,\cdot \tag{6.4}$$

La première majoration de $\mathcal{N}(\xi,\delta)$, qui soit polynomiale en δ^{-1}, est due à Bombieri et van der Poorten [BvdP88]. Une légère amélioration de leur résultat a ensuite été obtenue par Evertse [Ev97] qui a démontré, pour $\delta < 1$, l'existence d'une constante c ne dépendant que de ξ et telle que

$$\mathcal{N}(\xi,\delta) \leq c\,\delta^{-3}\,(1+\log\delta^{-1})^2\,. \tag{6.5}$$

Toute amélioration qualitative de (6.3) conduit à une amélioration de (6.4). En particulier, si l'on remplace (6.3) par (6.5) dans la preuve de Davenport et Roth de la majoration (6.4), on obtient

$$\log\log q_n \ll n^{3/4}\,\sqrt{\log n}\,. \tag{6.6}$$

Il s'avère qu'en modifiant les arguments de la démonstration de Davenport et Roth, il est possible d'utiliser (6.5) pour améliorer significativement la majoration donnée en (6.6). Plus précisément, nous obtenons dans [AdBu07f] la meilleure majoration connue de la suite des dénominateurs des convergents des nombres algébriques.

Théorème 6.5. *Soient ξ un nombre algébrique irrationnel et $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ la suite des dénominateurs de ses convergents. Alors, il existe une constante c, dépendant uniquement de ξ, telle que*

$$\log\log q_n \leq c\, n^{2/3}\, \log\log n\,.$$

Évidemment, le théorème 6.5 peut être utilisé pour construire des fractions continues transcendantes avec de très grands quotients partiels, améliorant ainsi les travaux précurseurs de Liouville [Li1844]. Par exemple, il découle du théorème 6.5 que le nombre réel

$$\zeta = [2, 4, 4, 16, 16, 16, 64, 64, 256, \ldots, 2^{2^{\lfloor n^{0.67} \rfloor}}, \ldots]$$

est transcendant.

6.5 Mesures de transcendance de fractions continues

Comme nous venons de le voir, le théorème du sous-espace peut être utilisé pour améliorer de façon significative la plupart des résultats relatifs à la construction de fractions continues transcendantes. La série d'articles [AdBu05, AdBu07e, AdBu07f, ABD06] est consacrée à de telles applications. La méthode générale décrite au chapitre 3 et introduite dans [AdBu2] permet en outre d'obtenir des mesures de transcendance pour la plupart de ces fractions continues. L'article [AdBu1] est entièrement consacré à ces applications et contient de nombreux résultats de ce type. Pour donner une idée de ce travail, nous énonçons ci-dessous deux d'entre eux.

Notre premier exemple est un raffinement du théorème 6.3.

Théorème 6.6. *Soient a et b deux entiers strictement positifs et φ un morphisme défini sur le monoïde libre $\{a, b\}^*$. Soit $\mathbf{a} = a_0 a_1 \cdots$ une suite apériodique engendrée par φ. Alors, il existe une constante c indépendante de d telle que le nombre réel*

$$\zeta_{\mathbf{a}} = [a_0, a_1, \ldots]$$

vérifie

$$w_d(\xi) \leq \exp(c\,(\log 3d)^3\,(\log\log 3d)^2)\,,$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Notre second exemple concerne les fractions continues sturmiennes. La démonstration de la transcendance de ces fractions continues est l'objet principal de [ADQZ01]. Nous raffinons ce résultat de la façon suivante.

Théorème 6.7. *Soient $\alpha > 1$ un nombre réel irrationnel et $\rho > 0$ un nombre réel. Soit $(a_\ell)_{\ell\geq 0}$ une suite sturmienne de pente α et d'intercept ρ. Alors, le nombre réel*

$$\zeta_{\alpha,\rho} = [a_0, a_1, \ldots]$$

est un U_2-nombre si, et seulement si, α a une suite non bornée de quotients partiels.

En outre, si α a une suite bornée de quotients partiels, alors il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d(\zeta_{\alpha,\rho}) \leq \exp(c\,(\log 3d)^2\,(\log\log 3d))\,,$$

pour tout entier $d \geq 1$. Dans ce cas, $\zeta_{\alpha,\rho}$ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Un intérêt de la classification de Mahler est qu'elle peut conduire à des résultats d'indépendance algébrique. En guise d'illustration, nous donnons la conséquence suivante du théorème 6.7.

Corollaire 6.8 *Les deux nombres réels $\zeta_{\sqrt{2},e}$ et $\zeta_{e,\sqrt{2}}$ sont algébriquement indépendants.*

6.6 Fractions continues non convergentes et méthode de Mahler

Nous concluons cette partie en décrivant brièvement un travail récent [Ad] concernant toujours des fractions continues transcendantes, mais d'une nature quelque peu différente. Il ne repose en effet pas sur la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt, mais sur la méthode fonctionnelle de Mahler.

Étant donné un entier $a \geq 2$, il a été récemment observé par Dilcher et Stolarsky dans [DS] que la fraction continue

$$\mathcal{C}(a) = a + \cfrac{1}{a^2 + \cfrac{1}{a^4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a^{2^n} + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

est transcendante. Il s'agit en fait d'une conséquence assez immédiate des résultats de Davenport et Roth décrits dans la partie 6.4. De façon plutôt surprenante, il semble que cette fraction continue n'ait pas été considérée avant les travaux de [DS], bien qu'un analogue pour les corps de fonctions apparaisse précédemment dans [Tha99]. En effet, vu comme un élément de $\mathbb{F}_2((1/t))$, la fraction continue $\mathcal{C}(t)$ a la propriété remarquable d'être un élément cubique sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_2(t)$. Plus précisément, il s'agit de l'unique racine dans $\mathbb{F}_2((1/t))$ du polynôme

$$x^3 + tx^2 + 1\,.$$

Curieusement, le fait que $\mathcal{C}(t)$ soit une série de Laurent algébrique sur le corps $\mathbb{F}_2(t)$ de degré strictement supérieur à 2 suggère que d'autres évaluations de $\mathcal{C}$ devrait être transcendantes (voir les théorèmes CKRM et 7.1 du chapitre 7 pour des résultats de ce type). Par exemple, pour tout corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, la fraction continue $\mathcal{C}(t)$, vue comme un élément de $\mathbb{K}((1/t))$, est transcendante sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(t)$. Il s'agit d'une conséquence facile de l'analogue pour les corps de fonctions en caractéristique nulle du théorème de Roth [Rat78]. Notons également que la fraction continue $\mathcal{C}(q)$ converge pour tout nombre complexe q tel que $|q| > 1$. Nous observons dans [Ad] qu'une application directe d'un théorème de Mahler [Mah29] donne le résultat suivant, qui généralise l'observation de Dilcher et Stolarsky.

Théorème 6.9 *Soit q un nombre complexe algébrique tel que $|q| > 1$. Alors, le nombre complexe $\mathcal{C}(q)$ est transcendant.*

La situation est en fait plus intrigante lorsque l'on cherche à évaluer $\mathcal{C}$ en des nombres complexes de module strictement inférieur à 1. En effet, si q est un tel nombre complexe, alors la fraction continue $\mathcal{C}(q)$ n'est plus convergente, en vertu du théorème de Stern–Stolz (voir [LW92]). Toutefois, le théorème de Stern–Stolz précise que $\mathcal{C}(q)$ est « presque convergente » dans le sens suivant : les deux limites

$$\mathcal{C}_{ev}(q) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \text{ pair}}} [q, q^2, q^4, \ldots, q^{2^n}] \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{od}(q) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \text{ impair}}} [q, q^2, q^4, \ldots, q^{2^n}]$$

existent pour tout nombre complexe q tel que $0 < |q| < 1$. Les auteurs de [DS] ont découvert une jolie relation entre ces limites et la suite diatomique de Stern. Leurs résultats montrent que ces fractions continues sont liées à des fonctions analytiques vérifiant des équations fonctionnelles d'un type particulier, appelées équations fonctionnelles de Mahler. Nous utilisons ce lien dans [Ad] pour démontrer, à l'aide de résultats de Nishioka [Ni96] concernant la méthode de Mahler, le résultat suivant.

Théorème 6.10 *Soit q un nombre complexe algébrique tel que $0 < |q| < 1$. Alors, les deux nombres complexes $\mathcal{C}_{ev}(q)$ et $\mathcal{C}_{od}(q)$ sont transcendants.*

Notons que $\mathcal{C}(1)$ est une fraction continue convergente et algébrique puisque $\mathcal{C}(1) = (1+\sqrt{5})/2$. Au vu des théorèmes 6.9 et 6.10, il serait intéressant de déterminer précisément le comportement de $\mathcal{C}(q)$ lorsque q parcourt le cercle unité.

Troisième partie

Compter sans retenue : arithmétique en caractéristique non nulle et automates finis

Chapitre 7

Clôtures algébriques de corps de fractions rationnelles et séries de Hahn

Dans ce chapitre, p désigne un nombre premier, q une puissance de p et $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments.

7.1 Le théorème de Christol

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, il est difficile d'obtenir la moindre information concernant le développement d'un nombre algébrique irrationnel dans une base entière. Cependant, lorsque les opérations usuelles, telles que l'addition et la multiplication, sont effectuées sans tenir compte des retenues, la situation se trouve grandement simplifiée. Dans cette direction, le théorème de Christol [Chr79, CKMR80] est un résultat remarquable qui décrit en termes d'automates finis le développement en série de Laurent (sorte de « développement en base t ») des éléments de $\mathbb{F}_q((t))$ qui sont algébriques sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_q(t)$.

Théorème Ch. *Soit* $f(t) = \sum_{n\geq -k} a_n t^n \in \mathbb{F}_q((t))$. *Alors,* $f(t)$ *est algébrique sur le corps* $\mathbb{F}_q(t)$ *si, et seulement si, la suite* $(a_n)_{n\geq 0}$ *est* p*-automatique.*

Le théorème Ch a de nombreuses conséquences intéressantes, dont certaines sont décrites dans [AS03]. Un exemple remarquable est l'utilisation du théorème Ch pour démontrer la transcendance de séries de Laurent qui sont des analogues de périodes classiques comme π ou les valeurs des fonctions ζ et log aux points entiers (voir par exemple [Al90, Ber92, Ber94, Al96, Tha96, AT99]). Récemment, Papanikolas [Pa08] a obtenu des résultats impressionnants concernant l'indépendance algébrique dans des corps de fonctions en caractéristique positive. Le résultat principal de [Pa08] concernant les périodes de t-motifs peut être vu comme une confirmation de l'analogue, pour les corps de fonction en caractéristique positive, de la conjecture de Grothendieck [Gr66] sur les périodes des variétés algébriques. Une conséquence des travaux de Papanikolas est la confirmation de l'analogue, pour le logarithme de Carlitz, de la conjecture qui stipule que les nombres réels $\pi, \log 2, \log 3, \log 5, \ldots$, sont algébriquement indépendants. Il est d'autant plus surprenant que ce dernier résultat de Papanikolas puisse en fait être démontré au moyen de la méthode de Mahler, laquelle est relativement élémentaire. À ce sujet, le lecteur est renvoyé à la discussion figurant dans [Pe08]. Ainsi, il semble que les analogues des périodes pour les corps de fonctions en caractéristique positive puissent être naturellement rattachés à des objets relativement simples, comme l'illustre également le théorème Ch.

Notons également que le théorème Ch a été généralisé dans [Sa86, Sa87] (voir aussi [SW88] et [Har88]) au cas de séries de Laurent de plusieurs variables. Une conséquence notable d'une telle généralisation est qu'elle permet d'en déduire une preuve élémentaire d'un résultat de Deligne [Del84] : la diagonale d'une série de Laurent algébrique de plusieurs variables sur un corps de caractéristique non nulle est une série algébrique d'une variable.

7.2 Un problème de Mahler et Mendès France

Étant donnée une suite binaire $\mathbf{a} = (a_n)_{\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on considère les deux nombres réels

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{3^n} \cdot$$

On s'intéresse à la question suivante : peut-on montrer que si la suite $\mathbf{a}$ n'est pas ultimement périodique, alors au moins l'un des deux nombres est transcendant ? Ce problème figure à la fin d'un article de Mendès France [Me80], bien que ce dernier en attribue la paternité à Mahler. Au premier abord, ce problème peut sembler un peu anecdotique, mais ce n'est bien sûr pas le cas. Il laisse au contraire entrevoir une question importante et d'une grande difficulté : celle des relations entre les développements des nombres réels dans deux bases multiplicativement indépendantes. Malheureusement, la connaissance du développement binaire d'un nombre réel irrationnel ne semble d'aucune utilité pour obtenir des renseignements sur la structure de son développement en base 3. Nos connaissances sur ce sujet sont pour le moins limitées et on semble bien loin de résoudre le problème de Mahler et Mendès France.

Inspirés par cette question, Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [CKMR80] ont combiné un résultat important de Cobham [Co69], à savoir le théorème C2 du chapitre 12, avec le théorème de Christol. Ils en déduisent alors facilement le résultat suivant[1].

Théorème CKRM. *Soit* $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ *une suite à valeurs dans* $\{0,1\}$. *Alors, les deux*

[1] Leur résultat est en fait plus général puisqu'il n'est pas limité au cas des caractéristiques 2 et 3.

séries de Laurent

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in \mathbb{F}_2((t)) \quad et \quad g(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in \mathbb{F}_3((t))$$

sont algébriques (respectivement sur les corps $\mathbb{F}_2(t)$ et $\mathbb{F}_3(t)$) si, et seulement si, ce sont des fractions rationnelles.

Ainsi, si la suite **a** n'est pas ultimement périodique, au moins l'une des deux séries de Laurent est transcendante. En combinant le théorème 4.3 et le théorème de Christol, nous déduisons immédiatement dans [AdBu07c] le résultat suivant ; lequel souligne la grande différence entre les représentations naturelles des nombres réels algébriques et des séries de Laurent algébriques à coefficients dans un corps fini.

Théorème 7.1. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite apériodique à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Si la série de Laurent $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in \mathbb{F}_p((t))$ est algébrique sur le corps $\mathbb{F}_p(t)$, alors le nombre réel $\xi = \sum_{n\geq 0} a_n/p^n$ est transcendant. Inversement, si ξ est un nombre algébrique, alors la série $f(t)$ est transcendante.*

Dans [AdBu06b], nous suggérons la version p-adique suivante du problème de Mahler–Mendès France. Nous obtenons également des résultats partiels en direction de ce problème à l'aide du théorème du sous-espace.

Problème 7.2. *Soit $(a_n)_{\geq 0}$ une suite apériodique à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Considérons le nombre réel $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{p^n}$ et le nombre p-adique $\sum_{n\geq 0} a_n p^n$. Alors, au moins l'un de ces deux nombres devrait être transcendant.*

7.3 Corps des séries de Hahn

Le théorème de Christol donne une très jolie description de la fermeture algébrique du corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_q(t)$ dans le corps des séries de Laurent $\mathbb{F}_q((t))$. Comme l'a remarqué Kedlaya [Ked06], le résultat de Christol n'est pas entièrement satisfaisant. En effet, le corps $\mathbb{F}_q((t))$ est loin d'être algébriquement clos et beaucoup de racines de polynômes échappent au théorème de Christol. Rappelons qu'en vertu d'un théorème de Puiseux, si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, le corps

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{K}((t^{1/i}))$$

est algébriquement clos et contient en particulier une clôture algébrique du corps $\mathbb{K}(t)$. Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique positive, la situation est très différente. La clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_q((t))$ est plus délicate à décrire, à cause de l'existence d'extensions sauvagement ramifiées. Par exemple, Chevalley [Che51] a remarqué que le polynôme d'Artin–Schreier $x^p - x - 1/t$ n'a aucune racine dans le corps de Puiseux $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{F}_q((t^{1/n}))$. Pour décrire une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p(t)$, il est donc nécessaire de se placer dans un corps plus gros et c'est à Hahn [Hah1907] que l'on doit la construction appropriée ; celle d'un corps énorme, noté $\mathbb{F}_q((t^{\mathbb{Q}}))$, dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Un sous-ensemble S d'un groupe totalement ordonné est dit *bien ordonné* si tout sous-ensemble non vide de S a un plus petit élément, ou, de façon équivalente, s'il n'existe pas de suite infinie décroissante d'éléments de S. Étant donnés un anneau commutatif R et un groupe abélien totalement ordonné G, on définit l'anneau commutatif $R((t^G))$ comme la collection des éléments de la forme

$$f(t) \ = \ \sum_{\alpha \in G} r_\alpha t^\alpha$$

qui vérifient :
- $r_\alpha \in R$ pour tout $\alpha \in G$,
- le support de $f(t)$ est bien ordonné, c'est-à-dire l'ensemble $\{\alpha \mid r_\alpha \neq 0_G\}$ est un ensemble bien ordonné.

L'addition et la multiplication sont définies selon les règles usuelles :

$$\sum_{\alpha \in G} r_\alpha t^\alpha + \sum_{\alpha \in G} s_\alpha t^\alpha \ = \ \sum_{\alpha \in G} (r_\alpha + s_\alpha) t^\alpha$$

et

$$\left(\sum_{\alpha \in G} r_\alpha t^\alpha \right) \left(\sum_{\alpha \in G} s_\alpha t^\alpha \right) \ = \ \sum_{\alpha \in G} \sum_{\beta \in G} (r_\beta s_{\alpha - \beta}) t^\alpha .$$

Le fait que le support des séries de Hahn soit bien ordonné évite tout problème d'occurrence de sommes infinies dans la définition du produit de deux séries de Hahn. L'anneau $R((t^G))$ est appelé *l'anneau des séries de Hahn à coefficients dans R et exposants dans G.*

Notons que si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos et G un groupe divisible, alors le corps $\mathbb{K}((t^G))$ est algébriquement clos [Ka42] (voir également [Se79]). Nous nous restreignons ici au cas du groupe divisible $\mathbb{Q}$ et du corps fini $\mathbb{F}_q$. On obtient alors la série d'inclusion suivante :

$$\mathbb{F}_q(t) \ \subset \ \mathbb{F}_q((t)) \subset \ \mathbb{F}_q((t^{\mathbb{Q}}))\,.$$

Bien que les corps $\mathbb{F}_q((t^{\mathbb{Q}}))$ ne soient pas algébriquement clos, il est suffisant de considérer ces corps puisque $\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_{p^n}$ fournit une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

Dans [Ked06], Kedlaya donne une description en termes d'automates finis de la clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_p(t)$ dans le corps des séries de Hahn $\overline{\mathbb{F}_p}((t^{\mathbb{Q}}))$. Dans ce but, il introduit la notion de fonction p-quasi-automatique définie de $\mathbb{Q}$ dans un ensemble fini. Cette notion généralise celle de suite p-automatique dans ce contexte. Le résultat de Kedlaya peut alors s'énoncer comme suit.

Théorème K. *Soit*

$$f(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} h(\alpha) t^{\alpha} \ \in \ \mathbb{F}_q((t^{\mathbb{Q}})).$$

Alors, $f(t)$ est une série algébrique sur le corps $\mathbb{F}_q(t)$ si, et seulement si, la fonction $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{F}_q$ est p-quasi-automatique.

En utilisant le théorème K, nous obtenons dans [AdBe07] la généralisation suivante du théorème CKRM[2]. L'intérêt principal de ce résultat est d'englober tous les éléments algébriques des corps $\mathbb{F}_p(t)$.

Théorème 7.3. *Soit $h : \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$ une fonction dont le support est bien ordonné. Alors, les deux séries de Hahn*

$$f(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} h(\alpha) t^{\alpha} \in \mathbb{F}_2((t^{\mathbb{Q}})) \quad et \quad g(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} h(\alpha) t^{\alpha} \in \mathbb{F}_3((t^{\mathbb{Q}}))$$

sont algébriques (respectivement sur les corps $\mathbb{F}_2(t)$ et $\mathbb{F}_3(t)$) si, et seulement si, il existe un entier strictement positif n tel que $f(t^n)$ et $g(t^n)$ soient deux fractions rationnelles.

Notons que l'on ne peut espérer ici, comme c'est le cas dans le théorème CKMR, que $f(t)$ et $g(t)$ soient deux fractions rationnelles. En effet, la fonction $a(t) = \sqrt{t}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(t)$ pour tout nombre premier p sans qu'il s'agisse pour autant d'une fraction rationnelle. Par contre, $a(t^2)$ est bien une fraction rationnelle.

[2] Le théorème 7.3 est en fait plus général puisqu'il n'est pas limité au cas des caractéristiques 2 et 3.

Chapitre 8

Le théorème de Skolem–Mahler–Lech

8.1 Zéros des suites récurrentes linéaires

Une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$ est une *suite récurrente linéaire* s'il existe un entier strictement positif d et des éléments $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{K}$ tels que :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_d a_{n-d}$$

pour tout entier n suffisamment grand. Le théorème de Skolem–Mahler–Lech est un résultat classique qui décrit la structure de l'ensemble des indices n pour lesquels une suite récurrente linéaire s'annule lorsque le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Posons

$$\mathcal{Z}(\mathbf{a}) = \{n \in \mathbb{N} \mid a(n) = 0\}.$$

Théorème SML. *Soit* $\mathbf{a}$ *une suite récurrente linéaire à valeurs dans un corps* $\mathbb{K}$ *de caractéristique nulle. Alors, l'ensemble* $\mathcal{Z}(\mathbf{a})$ *est composé d'un ensemble fini et d'une union finie de progressions arithmétiques.*

Le théorème SML a d'abord été démontré par Skolem [Sk34] pour les suites récurrentes linéaires à valeurs rationnelles, puis étendu par Mahler [Mah35] au cas des suites récurrentes linéaires à valeurs dans le corps $\overline{\mathbb{Q}}$. La version énoncée ci-dessus est due à Lech [Lec53] (voir également Mahler [Mah57]). Le lecteur intéressé trouvera une discussion plus complète dans l'ouvrage d'Everest *et al.* [EPSW03].

La démonstration de Lech suit peu ou prou celle de Skolem. En voici une esquisse. L'idée de départ consiste à remarquer que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que le corps $\mathbb{K}$ est une extension finiment engendrée du corps $\mathbb{Q}$. On peut donc plonger $\mathbb{K}$ dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, pour un certain nombre premier p. En écrivant une suite récurrente comme un polynôme exponentiel, on montre alors l'existence d'un entier strictement positif r tel que pour tout entier $i = 1, \ldots, r-1$, il existe une fonction analytique f_i de $\mathbb{Z}_p$ telle que $f_i(n) = a_{rn+i}$ pour tout entier n suffisamment grand.

Ainsi, si a_{rn+i} est nul pour une infinité d'entier n, la fonction f_i est identiquement nulle, cette dernière ayant une infinité de zéros dans l'ensemble compact $\mathbb{Z}_p$. On obtient donc que soit le terme a_{rn+i} est nul pour tout entier n assez grand, soit il n'y a qu'un nombre fini de zéros dans la sous-suite $(a_{rn+i})_{n\geq 0}$. Le résultat suit immédiatement.

On trouve dans la littérature plusieurs preuves de ce théorème, mais elles ont toutes recours, de façon plus ou moins explicite, aux nombres p-adiques. Cela est plutôt étonnant car le résultat est valable pour tout corps de caractéristique nulle. Une conséquence bien connue de l'utilisation de méthodes p-adiques est l'ineffectivité du théorème SML : on ne connaît pas d'algorithme qui pour toute suite récurrente linéaire fixée à valeurs dans un corps de caractéristique nulle permettrait de déterminer l'ensemble $\mathcal{Z}(\mathbf{a})$ (voir à ce sujet les discussions dans [EPSW03] et [Ta08]). À vrai dire, on ne sait même pas si la question « l'ensemble $\mathcal{Z}(\mathbf{a})$ est-il vide ou non ? » est décidable.

8.2 Suites récurrentes linéaires à valeurs dans un corps de caractéristique non nulle

Le théorème de Skolem–Mahler–Lech admet bien sûr un analogue lorsque le corps $\mathbb{K}$ est un corps fini. En effet, toute suite récurrente linéaire à valeurs dans un corps fini est ultimement périodique, ce qui implique immédiatement le résultat. En revanche, la conclusion du théorème SML n'est plus vraie si $\mathbb{K}$ est un corps infini de caractéristique positive. Cela fut remarqué par Lech [Lec53] qui donna le contre-exemple classique suivant. Considérons la suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_p(t)$ et définie par

$$a_n = (1+t)^n - t^n - 1\,.$$

Cette suite vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 3. Plus précisément, on a :

$$a(n) = (2+2t)a(n-1) - (1+3t+t^2)a(n-2) + (t+t^2)a(n-3)\,,$$

pour tout $n > 3$. D'autre part, on peut vérifier que

$$a(p^j) = (1+t)^{p^j} - t^{p^j} - 1 = 0$$

et que $a(n) \neq 0$ si n n'est pas une puissance de p. Ainsi,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{a}) = \{1, p, p^2, p^3, \ldots\}\,.$$

On peut en fait donner des exemples encore plus pathologiques, lesquels soulignent la difficulté d'obtenir un analogue au théorème de Skolem–Mahler–Lech pour les corps de caractéristique positive. Par exemple, considérons la suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans le corps $\mathbb{F}_2(x, y, z)$ et définie par

$$a_n = (x+y+z)^n - (x+y)^n - (x+z)^n - (y+z)^n + x^n + y^n + z^n\,.$$

On peut montrer que cette suite vérifie une relation de récurrence linéaire. De plus, l'ensemble $\mathcal{Z}(a)$ est composé des entiers n qui sont soit une puissance de 2, soit la somme de deux puissances de 2. Pour voir cela, observons dans un premier temps que l'égalité $a_{2^i} = 0$ découle de l'identité $(b+c)^{2^i} = b^{2^i} + c^{2^i}$ valable pour tout couple d'éléments b et c d'un corps de caractéristique 2. Ensuite, pour montrer que $a_{2^i+2^j} = 0$, il faut remarquer que l'application

$$\begin{aligned} g(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2) \\ &- (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - (x_1 + z_1)(x_2 + z_2) \\ &- (y_1 + z_1)(y_2 + z_2) + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \end{aligned}$$

est identiquement nulle quelque soit le corps considéré. Si $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{F}_2$ alors

$$(c_1x + c_2y + c_3z)^{2^i+2^j} = (c_1x^{2^i} + c_2y^{2^i} + c_3z^{2^i})(c_1x^{2^j} + c_2y^{2^j} + c_3z^{2^j})\,.$$

Ainsi,

$$a(2^i + 2^j) = g(x^{2^i}, y^{2^i}, z^{2^i}, x^{2^j}, y^{2^j}, z^{2^j}) = 0\,.$$

Enfin, si l'entier n n'est ni une puissance de 2 ni une somme de deux puissances de 2, alors il existe un entier m, strictement positif et impair, et deux entiers positifs distincts i et j, tels que $n = 2^i + 2^j + 2^k m$. Il vient :

$$\begin{aligned} (x+y+z)^n &= (x+y+z)^{2^i}(x+y+z)^{2^j}\left((x+y+z)^{2^k}\right)^m \\ &= (x^{2^i} + y^{2^i} + z^{2^i})(x^{2^j} + y^{2^j} + z^{2^j})(x^{2^k} + y^{2^k} + z^{2^k})^m\,. \end{aligned}$$

Considérons le coefficient de $x^{2^i}y^{2^j}z^{2^k m}$ dans le polynôme $(x+y+z)^n$. La seule façon d'obtenir ce monôme est de prendre x^{2^i} dans le premier terme du produit, y^{2^j} dans le second et $z^{2^k m}$ dans le dernier. Le coefficient en question est donc égal à 1. Puisque $(z+y+z)^n$ est le seul terme de a_n qui comporte un monôme de la forme $x^b y^c z^d$ avec $b, c, d > 0$, on obtient que a_n n'est pas nul.

Nous venons de voir que l'ensemble des zéros d'un suite récurrente linéaire à valeurs dans un corps de caractéristique p peut être relativement exotique ; trop complexe en tout cas pour pouvoir être décrit en termes de progressions arithmétiques.

D'un autre côté, dans les deux exemples précédents, la connaissance du développement en base p de l'entier n permet de décider simplement si le n-ième terme de la suite considérée est nul. En 2007, Derksen [Der07] a montré que ce phénomène est tout-à-fait général : l'ensemble des zéros d'un suite récurrente linéaire à valeurs dans un corps de caractéristique non nulle peut toujours être décrit par un automate fini. Il s'agit d'un analogue assez satisfaisant au théorème de Skolem–Mahler–Lech. Plus précisément, Derksen a obtenu le résultat remarquable suivant.

Théorème D1. *Soit* $\mathbf{a}$ *une suite récurrente linéaire à valeurs dans un corps de caractéristique p. Alors, l'ensemble* $\mathcal{Z}(\mathbf{a})$ *est un ensemble d'entiers p-automatique.*

Derksen obtient en réalité un résultat un peu plus précis que nous ne décrivons pas ici, mais qui implique que les ensembles automatiques concernés sont très particuliers.

Par exemple, l'ensemble $\{1, 2, 4, 7, 8, \dots\}$ des entiers de Thue–Morse n'est l'ensemble des zéros d'aucune suite récurrente linéaire.

Un aspect remarquable de la méthode de Derksen est que chacune des étapes peut être rendue effective.

Théorème D2. *Soit* **a** *une suite récurrente linéaire à valeurs dans un corps de caractéristique p. Alors, l'ensemble $\mathcal{Z}(a)$ peut être effectivement déterminé.*

Un résultat similaire valable pour les corps de caractéristique nulle semble hors de portée pour le moment.

8.3 Une généralisation du théorème de Derksen

Rappelons tout d'abord un résultat classique. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$,
- $\sum_{n\geq 0} a(n)t^n$ est le développement en série formelle d'une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$.

À la lumière de ce résultat, on peut reformuler les théorèmes SML et D1 de la façon suivante. Étant donnée une série de Laurent $f(t) = \sum_{n\geq -k} a(n)t^n$, notons

$$\mathcal{Z}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 0\} .$$

Théorème SML (reformulation). *Soit $f(t)$ une fraction rationnelle à coefficients dans un corps de caractéristique nulle. Alors, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est composé d'un ensemble fini et d'une union finie de progressions arithmétiques.*

Théorème D1 (reformulation). *Soit $f(t)$ une fraction rationnelle à coefficients dans un corps de caractéristique p. Alors, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble d'entiers p-automatique.*

Ces reformulations en termes de fractions rationnelles ont l'avantage de se prêter à des généralisations intéressantes.

Étant donné un corps $\mathbb{K}$, une série formelle de plusieurs variables à coefficients dans $\mathbb{K}$ $f(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{K}[[t_1, \dots, t_m]]$ est dite algébrique si elle est algébrique sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(t_1, \dots, t_m)$. Dans la suite de ce chapitre, $\mathbf{n}$ désigne un d-uplet d'entiers positifs $(n_1, \dots, n_d)$ et $\mathbf{t^n}$ désigne alors le monôme $t_1^{n_1} \cdots t_d^{n_d}$. Étant donnée une série formelle $f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}}\mathbf{t^n}$ appartenant à $\mathbb{K}[[\mathbf{t}]]$, notons

$$\mathcal{Z}(f) = \left\{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \mid a_{\mathbf{n}} = 0\right\} .$$

À ce stade, il est intéressant de remarquer qu'aucune généralisation du théorème de Skolem–Mahler–Lech n'est connue pour les fractions rationnelles de plusieurs variables à coefficients dans un corps de caractéristique nulle. Pour comprendre les difficultés liées à l'obtention d'une telle généralisation, nous donnons deux exemples. Tout d'abord, considérons la série formelle

$$f(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} (2^m - n^2)x^m y^n \,.$$

Il s'agit d'une fraction rationnelle de deux variables à coefficients entiers. De plus, la définition de f implique que

$$\mathcal{Z}(f) = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \equiv 0 \pmod 2, n = 2^{m/2}\} \,.$$

Notons que l'on ne peut pas espérer décrire un tel ensemble comme une union de progressions arithmétiques, ni même comme un ensemble automatique.

D'autre part, considérons la série formelle

$$g(x,y) = \sum_{m,n\geq 0} (3^m - 2^n - 1)x^m y^n.$$

On a

$$g(x,y) = (1-3x)^{-1}(1-y)^{-1} - (1-x)^{-1}(1-2y)^{-1} - (1-x)^{-1}(1-y)^{-1} \,,$$

ce qui montre que g est une fraction rationnelle de deux variables. D'autre part, le coefficient de $x^m y^n$ est nul si, et seulement si, $3^m = 2^n + 1$. Ainsi,

$$\mathcal{Z}(g) = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid 3^m - 2^n = 1\} \,.$$

La résolution par Mihăilescu's [Mih04] de la conjecture de Catalan a comme conséquence le fait que $\mathcal{Z}(g)$ ne contient que les deux éléments $(2,3)$ et $(1,1)$. On pourrait sans doute trouver ici un moyen plus direct de montrer ce résultat[1], mais en général, déterminer l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ d'une fraction rationnelle de plusieurs variables $f(\mathbf{t})$ peut conduire à des problèmes diophantiens difficiles.

Il est donc d'autant plus surprenant que le résultat de Derksen puisse se généraliser dans deux directions : on peut d'une part remplacer les fractions rationnelles par des séries formelles algébriques, et d'autre part considérer des séries formelles de plusieurs variables. Nous prouvons en effet dans [AdBe2] le résultat suivant.

Théorème 8.1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p et $f(\mathbf{t}) \in \mathbb{K}[[\mathbf{t}]]$ une série formelle de plusieurs variables algébrique sur le corps $\mathbb{K}(\mathbf{t})$. Alors, $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble p-automatique de $\mathbb{N}^d$.*

Le théorème 8.1 implique immédiatement le théorème D1 en choisissant $d = 1$ et pour $f(t)$ une fraction rationnelle, c'est-à-dire une série formelle algébrique de degré 1. D'autre part, en choisissant $d = 1$ et pour $\mathbb{K}$ un corps fini, le théorème 8.1 implique la partie difficile du théorème de Christol.

[1] En utilisant par exemple une mesure d'irrationalité effective de $\log 2/\log 3$.

De plus, étant donné un ensemble p-automatique $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N}^d$, on peut montrer que la série formelle

$$f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \notin \mathcal{N}} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \in \mathbb{F}_p((\mathbf{t}))$$

est algébrique sur le corps $\mathbb{F}_p(\mathbf{t})$. Il s'agit d'un cas particulier de la version multidimensionnelle du théorème de Christol due à Salon [Sa86, Sa87]. En outre, la définition de $f(\mathbf{t})$ implique que

$$\mathcal{Z}(f) = \mathcal{N}\,.$$

À ce niveau de généralité, nous obtenons donc une correspondance entre les ensembles p-automatiques et les ensembles $\mathcal{Z}(f)$ associés aux séries formelles algébriques à coefficients dans un corps de caractéristique p.

Notre démonstration du théorème 8.1 utilise à la fois l'approche de Derksen ainsi que certaines techniques plus avancées de la théorie des séries formelles en caractéristique non nulle ; lesquelles se trouvent être des réminiscences de travaux de plusieurs auteurs dont Christol [Chr79], Harase [Har88], Shariff et Woodcock [SW88]. Comme nous l'avons déjà souligné, un aspect particulièrement important de la démonstration de Derksen du théorème D est que chacune des étapes peut être rendue effective. Cette particularité se retrouve également dans le théorème 8.1, comme l'illustre le résultat suivant obtenu dans [AdBe2].

Théorème 8.2. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p et $f(\mathbf{t}) \in \mathbb{K}[[\mathbf{t}]]$ une série formelle de plusieurs variables algébrique sur le corps $\mathbb{K}(\mathbf{t})$. Alors, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ peut être effectivement déterminé. En outre, les propriétés suivantes sont décidables :*

- *l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est vide ;*
- *l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est fini ;*
- *l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble périodique, c'est-à-dire composé de l'union d'un ensemble fini et d'une union finie de progressions arithmétiques d-dimensionnelles.*

En particulier, si $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble fini, il est possible de déterminer (en un temps fini) tous ses éléments.

Lorsque nous disons que $\mathcal{Z}(f)$ peut être effectivement déterminé, cela signifie que nous donnons un algorithme qui produit, en un temps fini, un p-automate reconnaissant cet ensemble. Il est alors possible de décider à partir de cet automate si $\mathcal{Z}(f)$ est vide, fini ou périodique. Comme nous l'expliquons en partie au chapitre 9, l'application du théorème 8.2 à certaines fractions rationnelles de plusieurs variables conduit à des résultats effectifs intéressants concernant des équations diophantiennes qui généralisent les célèbres équations en S-unités, ou plus généralement concernant le théorème de Mordell–Lang sur des corps de caractéristique non nulle.

Chapitre 9

Équations linéaires dans un groupe multiplicatif

Dans ce chapitre, nous considérons certaines équations diophantiennes qui généralisent les célèbres équations en S-unités. Plus précisément, étant donnés un corps $\mathbb{K}$ et Γ un sous-groupe multiplicatif finiment engendré de $\mathbb{K}^*$, on s'intéresse aux équations du type

$$a_1X_1 + \cdots + a_dX_d = 1\,, \tag{9.1}$$

où $a_1, \ldots, a_d$, sont des éléments de $\mathbb{K}$ et où les solutions sont recherchées dans Γ^d.

9.1 Un bref état de l'art en caractéristique nulle

Soient $\mathcal{S}$ un ensemble fini de nombres premiers et $\Gamma \subset \mathbb{Q}^*$ le groupe multiplicatif engendré par les éléments de $\mathcal{S}$. En 1933, Mahler [Mah33] démontra que pour tous nombres rationnels a et b non nuls, l'équation

$$aX + bY = 1\,, \tag{9.2}$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions dans Γ^2. En 1960, Lang [Lan60] généralisa ce résultat en montrant que pour tous nombres a et b appartenant à $\mathbb{C}^*$ et tout sous-groupe de rang fini Γ de $\mathbb{C}^*$, l'équation (9.2) n'a qu'un nombre fini de solutions dans Γ^2. En outre, si Γ est un sous-groupe de $\mathbb{Q}^*$, il existe une méthode effective fondée sur la théorie des formes linéaires de logarithmes pour déterminer les solutions de l'équation (9.2). De façon remarquable, on peut également majorer le nombre de solutions de (9.2) uniquement en fonction du rang du groupe Γ [BS96].

Lorsque le nombre d de variables est strictement supérieur à 2, on ne peut plus espérer que l'équation (9.1) ait toujours un nombre fini de solutions. Un exemple particulièrement simple est donné par l'équation

$$X - Y + Z = 1\,,$$

qui possède pour tout entier n la solution $(2^n, 2^n, 1)$ dans Γ^3, où $\Gamma = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Plus généralement, si $(x_1, \ldots, x_d)$ est une solution de (9.1) telle que $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = 0$, pour un certain entier $m < d$, alors, pour tout α dans le groupe Γ, le d-uplet $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m, x_{m+1}, \ldots, x_d)$ est également une solution de l'équation (9.1), ce qui conduit donc à l'existence d'une infinité de solutions. Il est possible de contourner ce problème en introduisant la notion de solution *non dégénérée*. Une solution est dite non dégénérée si aucune sous-somme de (9.1) ne s'annule. Le théorème du sous-espace permet alors de montrer que l'équation (9.1) n'a qu'un nombre fini de solutions non dégénérées. Le premier résultat de ce type est dû indépendamment à Evertse [Ev84] et à van der Poorten et Schlickewei [PS91]. En outre, il est possible de majorer le nombre de solutions non dégénérées. Dans cette direction, nous rappelons ci-dessous un résultat récent très général obtenu par Evertse, Schlickewei et Schmidt [ESS02].

Théorème ESS. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et Γ un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{K}^*$ de rang r. Alors, l'équation (9.1) possède au plus*

$$\exp((6d)^{3d}(r+1))$$

solutions non dégénérées.

L'aspect le plus remarquable de ce théorème est son uniformité : la majoration obtenue ne dépend pas du corps $\mathbb{K}$ ou du groupe Γ, mais seulement du nombre de variables et du rang de ce dernier. En revanche, les résultats valables pour un nombre de variables supérieur ou égal à 3 sont ineffectifs et ne permettent donc pas de déterminer toutes les solutions non dégénérées.

9.2 Exemples « pathologiques » en caractéristique non nulle

La situation en caractéristique p est semblable à celle rencontrée avec le théorème de Skolem–Mahler–Lech. Le morphisme de Frobenius se trouve là encore à l'origine de solutions « pathologiques » comme l'illustrent les deux exemples suivants.

Notons en effet que la simple équation

$$X + Y = 1 \tag{9.3}$$

possède déjà une infinité de solutions dans Γ^2, où Γ est le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{F}_p(t)^*$ engendré par t et $1-t$. En effet, on vérifie aisément que pour tout entier q qui est une puissance de p, le couple $(t^q, (1-t)^q)$ est une solution de (9.3).

En conservant $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p(t)$ et $\Gamma = \langle t, (1-t) \rangle$, on peut également donner l'exemple un peu plus sophistiqué suivant. L'équation

$$X + Y - Z = 1$$

possède bien sûr pour tout entier n la solution dégénérée

$$X = t^n, \ \ Y = 1, \ \ Z = t^n,$$

mais il existe également une infinité de solutions non dégénérées données par

$$X = t^{(p^n-1)p^m}, \ \ Y = (1-t)^{p^{n+m}}, \ \ Z = t^{(p^n-1)p^m}(1-t)^{p^m},$$

pour tout couple d'entiers positifs (n, m).

Il est donc vain d'espérer obtenir dans ce contexte un résultat de finitude semblable au théorème ESS. On peut néanmoins essayer de comprendre la structure des solutions de ces équations. Dans cette direction, on trouve essentiellement deux articles, dus respectivement à Voloch [Vo98] et Masser [Mas04]. Tout d'abord, Voloch [Vo98] s'est livré à une étude assez précise de l'équation

$$aX + bY = 1 .$$

Il a en particulier donné des conditions pour que celle-ci n'ait qu'un nombre fini de solutions. Ensuite, Masser [Mas04] a obtenu un résultat plutôt technique concernant la structure de l'ensemble des solutions de l'équation générale (9.1), lorsque l'ensemble des solutions est infini et vérifie certaines conditions additionnelles. Dans [Mas04], la motivation principale de Masser est en fait de démontrer une conjecture de Schmidt (voir [K. Sch01, SW93]) concernant les propriétés de mélange d'actions algébriques de $\mathbb{Z}^d$ sur des groupes abéliens compacts.

9.3 Structure de l'ensemble des solutions en caractéristique non nulle : une approche « automatique »

Afin de décrire les solutions de l'équation (9.1) dans des corps de caractéristique non nulle, nous proposons une nouvelle approche qui consiste dans un premier temps à remplacer les solutions de l'équation par des sous-ensembles de $\mathbb{Z}^k$, pour un certain entier k, puis à essayer de décrire la structure de ces ensembles d'entiers. Revenons sur l'équation (9.3). Les solutions de cette équation sont des couples de la forme $(t^a(1-t)^b, t^c(1-t)^d)$, où a, b, c et d sont dans $\mathbb{Z}$. Une fois ce choix de représentation effectué, la donnée d'une solution devient équivalente à celle du quadruplet d'entiers (a, b, c, d). Dans le cas de l'équation (9.3), on peut ainsi mettre l'ensemble des solutions dans Γ^2 en correspondance avec l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{(p^n, 0, 0, p^n) \in \mathbb{Z}^4 \mid n \geq 0\right\} \cup \left\{(0, p^n, p^n, 0) \in \mathbb{Z}^4 \mid n \geq 0\right\} .$$

Plus généralement, si $g_1, \ldots, g_m$, sont des générateurs du groupe Γ, la donnée d'un élément $(x_1, \ldots, x_d)$ de Γ^d est équivalente à celle du $(m \times d)$-uplet d'entiers

$$(n_{1,1}, \ldots, n_{1,m}, n_{2,1}, \ldots, n_{2,m}, \ldots, n_{d,1}, \ldots, n_{d,m}) \in \mathbb{Z}^{m \times d},$$

où $x_i = g_1^{n_{i,1}} \cdots g_m^{n_{i,m}}$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq d$. En suivant ce principe, on peut toujours associer un sous-ensemble $\mathbb{Z}^{m\times d}$ à l'ensemble des solutions de l'équation (9.1).

Nous venons de voir que l'ensemble des solutions d'une équation linéaire dans un sous-groupe multiplicatif d'un corps de caractéristique p n'est pas nécessairement fini, même si l'on ne considère que les solutions non dégénérées. D'un autre côté, l'ensemble des solutions d'une équation du type (9.1) se trouve en correspondance naturelle avec un sous-ensemble d'un produit cartésien de $\mathbb{Z}$. En outre, les coordonnées des éléments de ces ensembles sont, dans les deux exemples précédents, des fonctions simples de l'écriture en base p de ces entiers. Il s'agit d'un phénomène général qui peut être formalisé, une fois encore, grâce à la théorie des automates finis. Plus précisément, nous obtenons dans [AdBe2] le « théorème de structure » suivant.

Théorème 9.1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p et Γ un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{K}^*$ finiment engendré. Soient $g_1, \ldots, g_m$ un ensemble de générateurs de Γ et $\varphi : \mathbb{Z}^m \to \Gamma$ un morphisme surjectif de groupe. Posons*

$$\mathcal{S} = \Big\{(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d) \in \mathbb{Z}^{m\times d} \mid \begin{array}{l} \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{Z}^m \\ \text{et } (\varphi(\mathbf{x}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{x}_d)) \text{ est une solution de } (9.1)\Big\} . \end{array}$$

Alors, l'ensemble $\mathcal{S}$ est un ensemble p-automatique de $\mathbb{Z}^{m\times d}$ qui peut être effectivement déterminé[1].

La notion d'ensemble p-automatique de $\mathbb{Z}^k$ peut être définie de manière similaire à celle d'ensemble p-automatique de $\mathbb{N}^k$ considérée précédemment[2]. Le théorème 9.1 est obtenu comme conséquence du théorème 8.1. On peut en fait espérer aller plus loin, tout comme Derksen l'a fait avec son analogue du théorème de Skolem–Mahler–Lech, en décrivant quels ensembles automatiques de $\mathbb{Z}^{m\times d}$ peuvent être associés à ces équations. Il y a sans doute beaucoup d'informations à extraire de ce théorème de structure, lesquelles devraient permettre de compléter les résultats de Voloch et Masser.

Notons également que, puisque l'ensemble $\mathcal{S}$ peut être effectivement déterminé, cette approche offre *in fine* une méthode de résolution effective valable pour toute équation linéaire dans un groupe multiplicatif finiment engendré d'un corps de caractéristique non nulle. Cette question semble à ce jour hors de portée pour les corps de caractéristique nulle. Signalons enfin que nous obtenons dans [AdBe2] un énoncé « géométrique » généralisant le théorème 9.1. Ce dernier correspond à une version effective du théorème de Mordell–Lang pour les sous-variétés de tores (produits de groupes multiplicatifs et de groupes additifs) définis sur des corps de caractéristique non nulle.

[1] Nous renvoyons le lecteur au chapitre 8 pour une discussion portant sur le sens précis, dans ce contexte, de l'expression « effectivement déterminé ».

[2] En abusant quelque peu, on peut dire qu'il suffit essentiellement d'ajouter les symboles $-1, -2, \ldots, -(p-1)$ à l'alphabet d'entrée Σ_p.

Quatrième partie

Quelques constructions issues de systèmes de numération

Chapitre 10

La conjecture de Littlewood en approximation diophantienne

Un des résultats les plus élémentaires en approximation diophantienne stipule que pour tout nombre réel α, il existe une infinité d'entiers strictement positifs q tels que

$$q \cdot \|q\alpha\| < 1\,, \tag{10.1}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche. Il s'agit d'une conséquence du théorème de Dirichlet ou encore de la théorie des fractions continues. Évidemment, cette inégalité assure, pour tout couple de nombres réels (α, β), l'existence d'une infinité d'entiers strictement positifs q tels que

$$q \cdot \|q\alpha\| \cdot \|q\beta\| < 1\,.$$

La conjecture de Littlewood [Li68] affirme qu'un résultat légèrement plus fort est également vrai, à savoir :

$$\inf_{q \geq 1} q \cdot \|q\alpha\| \cdot \|q\beta\| = 0\,. \tag{10.2}$$

Il s'agit d'un problème célèbre d'approximation diophantienne simultanée qui, en dépit de son apparente simplicité et de progrès récents importants, demeure toujours ouvert.

Nous commençons par rappeler deux remarques classiques, qu'il est utile d'avoir à l'esprit pour comprendre la pertinence de nos résultats. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des *nombres réels mal approchables* par des nombres rationnels, c'est-à-dire,

$$\mathcal{B} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \inf_{q \geq 1} q \cdot \|q\alpha\| > 0 \right\}\,.$$

Un nombre réel appartient à l'ensemble $\mathcal{B}$ si, et seulement si, la suite des quotients partiels de son développement en fraction continue est bornée. Il suffit donc que l'un des deux nombres α ou β ait une suite de quotients partiels non bornée pour que le couple (α, β) vérifie la conjecture de Littlewood. Une conséquence notable du théorème de Khintchine est alors que l'ensemble des couples de nombres réels qui satisfont à la conjecture de Littlewood est de mesure de Lebesgue pleine. Aussi, la conjecture de Littlewood est-elle « presque sûrement » vraie. Une seconde remarque découle de l'inégalité (10.1). En effet, on montre aisément à partir de cette dernière que le couple (α, β) vérifie la conjecture de Littlewood dès lors que les nombres 1, α, et β sont linéairement dépendants sur le corps des nombres rationnels. On en déduit notamment que la conjecture de Littlewood est vraie pour tout couple de nombres réels appartenant à un même corps quadratique.

Dans la suite de ce chapitre, un *couple non trivial* désigne un couple (α, β) d'éléments de $\mathcal{B}$ tel que les nombres 1, α et β soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Au vu des remarques précédentes, nous nous intéressons à la question suivante, préalable naturel à une éventuelle démonstration de la conjecture de Littlewood.

Question 10.1. *Étant donné un nombre réel α appartenant à $\mathcal{B}$, existe-t-il toujours un nombre réel β tel que (α, β) soit un couple non trivial vérifiant la conjecture de Littlewood ?*

10.1 Principaux résultats en direction de la conjecture

La première contribution importante relative à la conjecture de Littlewood remonte aux travaux de Cassels et Swinnerton-Dyer [CSD55]. Ces auteurs ont montré que si α et β sont deux nombres réels appartenant un même corps cubique, alors le couple (α, β) vérifie la conjecture de Littlewood. Cependant, leur résultat ne fournit aucun exemple de couple non trivial vérifiant la conjecture. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, on ne sait toujours pas s'il existe ou non des nombres réels cubiques ayant une suite de quotients partiels bornés. Apparemment, la question 10.1 est restée ouverte jusqu'aux travaux de Pollington et Velani [PV00]. Ces derniers ont en fait établi le résultat plus précis suivant, au moyen d'outils sophistiqués provenant de la théorie métrique des nombres.

Théorème PV. *Soit $\alpha \in \mathcal{B}$. Alors, il existe un ensemble $A(\alpha) \subset \mathcal{B}$ de dimension de Hausdorff égale à 1, et tel que pour tout élément β de $A(\alpha)$, il existe une infinité d'entiers strictement positifs vérifiant*

$$q \cdot \|q\alpha\| \cdot \|q\beta\| \leq \frac{1}{\log q} \cdot \tag{10.3}$$

En particulier, la conjecture de Littlewood est vérifiée par tous les couples (α, β) pour lesquels β appartient à $A(\alpha)$.

Récemment, un résultat spectaculaire en direction de la conjecture de Littlewood a été obtenu par Einsiedler, Katok et Lindenstrauss [EKL06] grâce à une approche complètement différente fondée sur la théorie des systèmes dynamiques. Plus exactement, ces auteurs ont établi une partie d'une conjecture de Margulis [Mar00] concernant les actions ergodiques sur les espaces homogènes $SL_k(\mathbb{R})/SL_k(\mathbb{Z})$, pour $k \geq 3$. Il était déjà connu qu'un tel résultat aurait des conséquences en approximation diophantienne et notamment sur la conjecture de Littlewood.

Théorème EKL. *L'ensemble des couples de nombres réels ne vérifiant pas la conjecture de Littlewood est de dimension de Hausdorff nulle.*

Noton que puisque $\mathcal{B}$ est un ensemble de dimension de Hausdorff égale à 1, le théorème EKL, tout comme le théorème PV, assure l'existence de couples non triviaux vérifiant la conjecture de Littlewood et apporte une réponse positive à la question 10.1. Malheureusement, aucun de ces deux résultats ne permet d'exhiber le moindre exemple d'un tel couple.

10.2 Une approche élémentaire fondée sur la théorie des fractions continues

Dans [AdBu06a], nous avons développé une nouvelle approche pour ce problème qui diffère totalement de celles évoquées précédemment. Celle-ci, fondée sur la théorie des fractions continues, à l'avantage d'être à la fois complètement élémentaire et constructive. Ainsi, pour tout nombre α fixé dans $\mathcal{B}$, nous construisons une famille ayant la puissance du continu de couples non triviaux (α, β) qui vérifient la conjecture de Littlewood. Ce résultat généralise de façon significative ceux obtenus antérieurement par de Mathan sur cette question [Mat03].

Rappelons brièvement cette construction. Dans la suite, il sera commode d'identifier un mot fini $W = w_1 w_2 \cdots w_r$ défini sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}^*$ avec la suite de quotients partiels $w_1, w_2, \ldots, w_r$. De plus, si $U = u_1 \cdots u_m$ et $V = v_1 v_2 \cdots$ sont deux mots définis sur l'alphabet $\mathbb{N}^*$, avec V fini ou infini, alors $[U, V]$ désigne la fraction continue $[u_1, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots]$. L'image miroir d'un mot $W = w_1 \cdots w_m$ est notée $\overline{W} = w_m \cdots w_1$.

Soient $M \geq 2$ un entier et $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ un élément de $\mathcal{B}$ dont les quotients partiels sont majorés par M. Pour tout entier strictement positif n, on pose $A_n = a_0 a_1 \cdots a_n$. Étant données une suite $\mathbf{t} = (t_i)_{i \geq 1}$ à valeurs dans $\{M+1, M+2\}$ et une suite d'entiers strictement positifs $\mathbf{n} = (n_i)_{i \geq 1}$, on définit le nombre réel

$$\beta_{\mathbf{n},\mathbf{t}} = [\overline{A_{n_1}}, t_1, \overline{A_{n_2}}, t_2, \overline{A_{n_3}}, t_3, \ldots] .$$

L'idée à l'origine de cette construction est la suivante : si la suite $\mathbf{n}$ croît suffisamment rapidement, la formule du miroir évoquée au chapitre 6 assure que le couple $(\alpha, \beta_{\mathbf{n},\mathbf{t}})$ possède de très bonnes approximations rationnelles simultanées, tandis que la suite $\mathbf{t}$ garantit l'indépendance linéaire des nombres 1, α et $\beta_{\mathbf{n},\mathbf{t}}$. En guise d'illustration de ce principe, nous nous contentons de donner l'énoncé très simple suivant, extrait de [AdBu06a].

Théorème 10.2. *Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. Supposons que la suite $\mathbf{n}$ vérifie*

$$\liminf_{i \to +\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} > \frac{4 \log(M+3)}{\varepsilon \log 2} .$$

Alors, 1, α *et* $\beta_{\mathbf{n},\mathbf{t}}$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$*, et il existe une infinité d'entiers strictement positifs* q *tels que*

$$q \cdot \|q\alpha\| \cdot \|q\beta_{\mathbf{n},\mathbf{t}}\| \leq \frac{1}{q^{1-\varepsilon}} \cdot \tag{10.4}$$

En particulier, $(\alpha, \beta_{\mathbf{n},\mathbf{t}})$ *est un couple non trivial vérifiant la conjecture de Littlewood.*

Notons que l'inégalité (10.4) est bien plus forte que les inégalités (10.2) et (10.3).

10.3 Analogues de la conjecture de Littlewood dans les corps de séries de Laurent

Comme nous l'avons aperçu aux chapitres 7, 8 et 9, la plupart des questions arithmétiques concernant les nombres réels peuvent être traduites dans le cadre des corps de séries de Laurent. La conjecture de Littlewood n'échappe pas à cette règle.

Étant donnés un corps $\mathbb{K}$ et une indéterminée t, on définit une norme $|\cdot|$ sur le corps des séries de Laurent $\mathbb{K}((t^{-1}))$ en posant $|0| = 0$ et, pour toute série non nulle $f(t) = \sum_{h=-m}^{+\infty} f_h t^{-h}$ avec $f_{-m} \neq 0$, en posant $|f| = 2^m$. On désigne également par $||f||$ la norme de la partie fractionnaire de $f(t)$, c'est-à-dire de la partie composée uniquement des puissances négatives de t. Par analogie avec la conjecture de Littlewood, il est assez naturel de se demander si

$$\inf_{q \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}} |q| \cdot \|q\Theta\| \cdot \|q\Phi\| = 0\,, \tag{10.5}$$

pour tout couple (Θ, Φ) d'éléments de $\mathbb{K}((t^{-1}))$. Une réponse négative à cette question a été donnée par Davenport et Lewis dans [DL63] lorsque le corps $\mathbb{K}$ est infini. En revanche, la question reste ouverte si $\mathbb{K}$ est un corps fini.

Un aspect notable de l'approche introduite dans [AdBu06a] est qu'elle peut être utilisée sans difficulté additionnelle dans le cadre des séries de Laurent à coefficients dans un corps quelconque. Cela n'est malheureusement pas le cas des méthodes utilisées pour démontrer les théorèmes PV et EKL. Dans [AdBu07g], nous obtenons ainsi l'analogue du théorème 10.2 dans ce contexte. Au-delà de ce résultat, l'intérêt de l'article [AdBu07g] réside principalement dans la construction de couples « naturels » vérifiant la conjecture de Littlewood, et non plus seulement de couples *ad hoc* comme c'est le cas dans [AdBu06a]. En effet, du point de vue de l'approximation rationnelle, la situation des séries de Laurent algébriques à coefficients dans un corps fini diffère fondamentalement de celle des nombres réels algébriques. En particulier, on dispose, suite aux travaux de plusieurs auteurs dont Baum et Sweet [BaSw76, BaSw77], Mills et Robbins [MR86] et Lasjaunias [Las00, Las08], de nombreux exemples de séries de Laurent algébriques de degré au moins 3 qui sont mal approchables par des fractions rationnelles. De plus, dans chacun de ces travaux, le développement en fraction continue de telles séries de Laurent est décrit explicitement. Malgré l'absence d'explication théorique générale, on constate que des motifs symétriques apparaissent dans tous ces développements en fraction continue. Nous utilisons ces motifs dans [AdBu07g] pour exhiber de nombreux couples non triviaux de séries de Laurent algébriques qui vérifient l'inégalité (10.5).

En guise d'illustration, nous donnons un tel exemple, extrait de [AdBu07g]. On peut montrer que le polynôme (par rapport à la variable x)

$$(2t^3(t+1)+1)x^4 - (t^4(t+2)+1)x^3 + 2(t+1)x + t(t+2)$$

a une unique racine $\Theta(t)$ dans le corps $\mathbb{F}_3((t^{-1}))$. Dans [MR86], Mills et Robbins décrivent le développement en fraction continue de la série $\Theta(t)$ et montrent en particulier qu'il s'agit d'une série mal approchable, c'est-à-dire dont les quotients partiels sont des polynômes de degrés bornés. À l'aide de cette description, nous montrons dans [AdBu07g] le résultat suivant.

Théorème 10.3. *Le couple* (Θ, Θ^{-1}) *vérifie la conjecture de Littlewood.*

Il s'agit du premier exemple de couple non trivial de séries de Laurent quartiques dont on sait prouver qu'il vérifie la conjecture de Littlewood. Ce résultat est d'autant plus intéressant que l'on ne connaît toujours pas le moindre couple de nombres réels algébriques de degré strictement supérieur à 3 vérifiant la conjecture de Littlewood.

Chapitre 11

Développements des nombres rationnels dans une base algébrique et pavages de Rauzy–Thurston

Le fait que tout nombre rationnel ait un développement décimal ultimement périodique est sans doute l'un des résultats les plus élémentaires concernant la représentation des nombres réels en base 10 ; la réciproque de ce résultat étant quant à elle évidente. En outre, il est possible d'être plus précis : un nombre rationnel p/q appartenant à l'intervalle $[0,1]$, et écrit sous forme réduite, a un développement décimal purement périodique si, et seulement si, les entiers q et 10 sont premiers entre eux. Aussi les nombres rationnels dont le développement décimal est purement périodique et ceux dont le développement décimal ne l'est pas, se répartissent-ils de façon plutôt uniforme dans $[0,1]$. Ces résultats s'étendent *mutatis mutandis* à n'importe quelle base entière $b \geq 2$, comme cela est par exemple indiqué dans l'ouvrage de Hardy et Wright [HW08].

Lorsque l'on remplace l'entier b par un nombre algébrique qui n'est pas entier, la situation peut se trouver totalement bouleversée. En guise d'illustration, nous donnons deux exemples éclairants. Rappelons tout d'abord que si φ désigne le nombre d'or, c'est-à-dire la racine positive du polynôme $x^2 - x - 1$, alors tout nombre réel ξ appartenant à l'intervalle $[0,1[$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\xi = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\varphi^n},$$

où les a_n prennent les valeurs 0 et 1, avec la condition additionnelle que $a_n a_{n+1} = 0$ pour tout entier strictement positif n. La suite binaire $(a_n)_{n\geq 1}$ est appelée le φ-développement de ξ. En 1980, Schmidt [K. Sch80] démontra le résultat suivant : tout nombre rationnel appartenant à l'intervalle $[0,1[$ a un φ-développement purement périodique. Une telle régularité est un peu surprenante puisque l'on imaginerait volontiers le φ-développement des nombres rationnels comme étant plus complexe que leur développement décimal. La propriété obtenue par Schmidt est en fait assez exceptionnelle. Si $\theta = 1 + \varphi$ désigne la plus grande racine du polynôme $x^2 - 3x + 1$, à nouveau, tout nombre réel ξ appartenant à $[0, 1[$ possède un unique θ-développement, ce qui signifie que ξ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\xi = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\theta^n},$$

où les a_n prennent les valeurs 0, 1 et 2. Il faudrait bien sûr ajouter certaines conditions additionnelles afin de garantir l'unicité du développement, mais nous ne les donnons pas ici. Contrairement à l'exemple précédent, Hama et Imahashi [HI97] ont observé qu'aucun nombre rationnel appartenant à $]0, 1[$ n'a un θ-développement purement périodique.

11.1 Développements des nombres rationnels dans une base quadratique

Les développements mentionnés ci-dessus figurent parmi les exemples emblématiques des *β-développements* introduits en 1957 par Rényi [Ré57]. Étant donné un nombre réel $\beta > 1$, le β-développement d'un nombre réel $\xi \in [0, 1[$ est défini comme la suite $d_\beta(\xi) = (a_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans l'alphabet $\mathcal{A}_\beta = \{0, 1, \ldots, \lceil \beta \rceil - 1\}$ et produite par la β-transformation $T_\beta : x \mapsto \beta x \bmod 1$ en utilisant l'algorithme glouton. Cela signifie que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(\xi) \rfloor$. Le β-développement de ξ remplace dans ce contexte le développement décimal puisque

$$\xi = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\beta^n} \cdot$$

Dans l'article [AFSS], nous étudions les nombres réels β qui jouissent de la curieuse propriété suivante : tout nombre rationnel positif suffisamment petit a un β-développement purement périodique. En posant

$$\gamma(\beta) = \sup\{c \in [0, 1[\mid \text{tout rationnel de } [0, c] \text{ a un } \beta\text{-développement purement périodique}\}$$

il s'agit donc de considérer les nombres réels β pour lesquels

$$\gamma(\beta) > 0 . \tag{11.1}$$

Cette définition implique que $\gamma(\varphi) = 1$, tandis que $\gamma(\theta) = 0$. Comme on s'en doute, la condition (11.1) se révèle très restrictive. En effet, on peut montrer que de tels nombres réels β doivent forcément être des nombres de Pisot unitaires. Cela signifie que β est à la fois un nombre de Pisot[1] et une unité de l'anneau des entiers du corps de nombres qu'il engendre. La propriété suivante s'avère pertinente dans ce contexte :

$$(\mathrm{F}) : \quad \text{tout } x \in \mathbb{Z}[1/\beta] \cap [0, 1[\text{ a un } \beta\text{-développement fini.}$$

Cette propriété a été introduite par Frougny et Solomyak dans [FS92]. Elle a ensuite été constamment étudiée pour diverses raisons depuis les vingt dernières années. Akiyama [Ak98] a montré que $\gamma(\beta) > 0$ pour tout nombre de Pisot unitaire satisfaisant à la propriété (F). Un résultat similaire, mais pour une variante de la fonction γ, a également été obtenu dans [ABBS08] pour tous les nombres de Pisot satisfaisant à la propriété (F). Cependant, le fait que (F) joue un rôle crucial dans l'étude de $\gamma(\beta)$ n'est guère intuitif.

Les résultats de Hama, Imahashi et Schmidt mentionnés précédemment à propos des φ- et θ-développements sont en fait plus généraux et conduisent à une compréhension complète de $\gamma(\beta)$ lorsque β est un nombre quadratique.

Théorème HIS. *Soit $\beta > 1$ un nombre quadratique. Alors, $\gamma(\beta) > 0$ si, et seulement si, β est un nombre de Pisot unitaire satisfaisant à la propriété* (F). *Dans ce cas, $\gamma(\beta) = 1$.*

Ainsi, on retrouve bien que $\gamma(\varphi) = 1$ car φ est nombre de Pisot quadratique unitaire satisfaisant à la propriété (F), tandis que l'égalité $\gamma(\theta) = 0$ s'explique par le fait que θ ne satisfaisait pas à la propriété (F).

11.2 Développements des nombres rationnels dans une base cubique

Dans [AFSS], nous complétons certains résultats d'Akiyama [Ak98] pour démontrer un résultat analogue au théorème HIS pour les nombres algébriques de degré 3.

Théorème 11.1. *Soit $\beta > 1$ un nombre cubique. Alors, $\gamma(\beta) > 0$ si, et seulement si, β est un nombre de Pisot unitaire satisfaisant à la propriété* (F).

Les nombres de Pisot unitaires de degré 3 satisfaisant à la propriété (F) ont été caractérisés dans [Ak00] : il s'agit des plus grandes racines réelles des polynômes $x^3 - ax^2 - bx - 1$, où a et b sont des entiers tels que $a \geq 1$ et $-1 \leq b \leq a + 1$.

La démonstration du théorème 11.1 repose sur la théorie des pavages de Rauzy–Thurston (voir la discussion qui suit le théorème 11.2). Notons que le fait de faire intervenir ces pavages pour étudier des questions concernant les nombres réels ayant un développement purement périodique dans une base qui est un nombre de Pisot n'est pas nouveau (voir [IR05, BeSi07, ABBS08] et les références données dans ces articles). En particulier, de tels nombres peuvent être caractérisés à l'aide d'ensembles fractals

[1] Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1 dont les conjugués de Galois ont tous un module strictement inférieur à 1.

liés à ces pavages [IR05, BeSi07]. Une telle caractérisation sert de point de départ à notre étude de la fonction γ.

Il est bien sûr tentant de se demander si, dans le théorème 10.1, la propriété (F) n'impliquerait pas que $\gamma(\beta) = 1$, comme cela est le cas pour les nombres de Pisots quadratiques unitaires. La situation se révèle en fait plus subtile dans le cas des nombres cubiques. En particulier, Akiyama [Ak98] a démontré que pour le plus petit nombre de Pisot η, qui est l'unique racine réelle du polynôme $x^3 - x - 1$, on a $0 < \gamma(\eta) < 1$.

11.3 Une preuve d'irrationalité « topologique »

Suite aux travaux d'Akiyama, il a été observé que le nombre réel $\gamma(\eta)$ est « anormalement proche » du nombre rationnel 2/3 puisque

$$\gamma(\eta) = 0.666\,666\,666\,086 \cdots .$$

Le fait que le nombre $\gamma(\eta)$ soit si proche de 2/3 est un phénomène assez intrigant et, en tout cas, une invitation à étudier la nature arithmétique de ce nombre. Dans cette direction, nous démontrons dans [AFSS] le résultat suivant.

Théorème 11.2. *Le nombre $\gamma(\eta)$ est irrationnel.*

Au-delà de ce résultat, il faut noter que la preuve que nous donnons de l'irrationalité de $\gamma(\eta)$ est pour le moins inhabituelle. Le point de départ de l'approche que nous avons suivie consiste, dans l'esprit de [IR05, BeSi07, ABBS08], à associer au nombre η un pavage apériodique auto-similaire du plan complexe dont les tuiles ont une frontière fractale (voir la figure 11.1). Un pavage semblable avait déjà été introduit par Rauzy [Rau82] dans le cas spécial de l'unique racine réelle du polynôme $x^3 - x^2 - x - 1$. Thurston [Thur89] a ensuite introduit ces pavages de façon plus générale et en suivant une approche différente.

Grossièrement, le pavage de Rauzy–Thurston associé à un nombre de Pisot peut être pensé comme une sorte de « pavage de Galois », sa construction étant fondée sur l'utilisation de la conjugaison de Galois. Un tel pavage possède une structure répétitive : il est apériodique mais quasi-périodique. Pour cette raison, ces pavages sont liés à la modélisation de quasi-cristaux. De façon surprenante, les nombres réels ayant un développement purement périodique en base η peuvent être caractérisés grâce au pavage de Rauzy–Thurston [IR05, BeSi07][2] ; cela n'est pas sans rappeler le théorème de Galois [Ga1829] caractérisant les nombres réels ayant un développement en fraction continue purement périodique.

Dans [AFSS], nous introduisons la notion topologique de *point en spirale* associé à un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$. Nous démontrons alors que tout nombre rationnel qui appartient à la frontière d'une tuile du pavage de Rauzy–Thurston associé à η est

[2] Ces auteurs obtiennent des résultats plus généraux, valables respectivement pour tout nombre de Pisot unitaire [IR05] et pour tout nombre de Pisot [BeSi07].

un point en spirale relativement à cette tuile. Cette propriété du pavage de Rauzy–Thurston associé à η est alors la clé pour démontrer l'irrationalité de $\gamma(\eta)$.

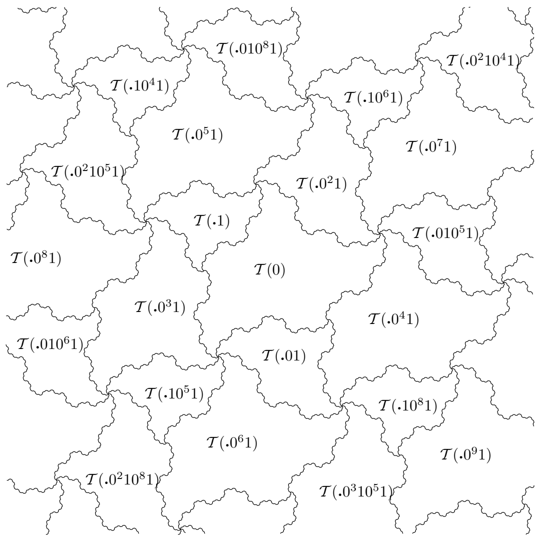

FIG. 11.1. Le pavage de Rauzy–Thurston associé au plus petit nombre de Pisot.

FIG. 11.2. La tuile centrale (contenant l'origine) pour le pavage de Rauzy–Thurston associé au plus petit nombre de Pisot.

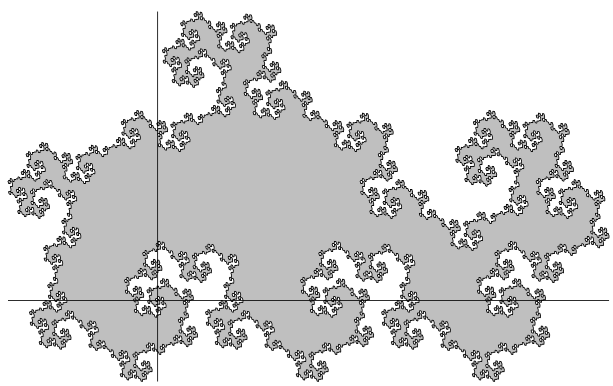

Fig. 11.3. La tuile centrale pour le pavage de Rauzy–Thurston associé à l'unique racine réelle du polynôme $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. L'origine se trouve sur la frontière de la tuile centrale.

Chapitre 12

Un théorème de Cobham pour des ensembles fractals

La notion d'auto-similarité est fondamentale dans l'étude des ensembles fractals. Le lecteur trouvera dans l'ouvrage de référence de Falconer [Fa90] une discussion approfondie sur ce thème. L'introduction de cette notion peut être motivée par l'exemple de l'ensemble triadique de Cantor $\mathcal{C}$. Rappelons que cet ensemble peut être défini comme le sous-ensemble compact de $[0, 1]$ formé de tous les nombres dont le développement en base 3 ne contient pas le chiffre 1. Notons que

$$\mathcal{C} \ = \ \frac{1}{3}\mathcal{C} \cup \left(\frac{1}{3}\mathcal{C} + \frac{2}{3}\right) .$$

Intuitivement, le fait que $\mathcal{C}$ soit l'union disjointe d'un nombre fini d'images de lui-même par des transformations affines nous dit que cet ensemble est auto-similaire.

12.1 Ensembles k-auto-similaires

Gardant à l'esprit l'exemple de l'ensemble de Cantor, nous définissons dans [AdBe1] la notion de *k-noyau* pour les sous-ensembles de $[0, 1]^d$. Le k-noyau d'un ensemble X est composé de tous les ensembles que l'on peut obtenir à partir de X en considérant son intersection avec certains cubes de $[0, 1]^d$ dont la longueur des côtés est égale à $1/k^a$ pour un entier strictement positif a, puis en dilatant l'ensemble obtenu d'un facteur k^a.

Plus précisément, étant donné un ensemble $X \subseteq [0, 1]^d$, on définit le *k-noyau* de X comme la collection des ensembles de la forme

$$\left\{ (k^a x_1 - b_1, \ldots, k^a x_d - b_d) \in [0, 1]^d \mid (x_1, \ldots, x_d) \in X \cap \prod_{j=1}^{d} [b_j/k^a, (b_j + 1)/k^a] \right\} ,$$

où a est un entier positif et $b_1, \ldots, b_d$, sont des entiers vérifiant $0 \leq b_1, \ldots, b_d < k^a$. On définit alors la notion d'ensemble k-auto-similaire à l'aide de celle de k-noyau. Un ensemble compact $X \subseteq [0,1]^d$ est dit k-*auto-similaire* si son k-noyau est un ensemble fini.

Comme nous l'avons observé dans [AdBe1], de nombreux fractals classiques se révèlent être k-auto-similaires pour un certain entier k. Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor est un sous-ensemble 3-auto-similaire de $\mathbb{R}$. Le tapis de Sierpiński ou le sol de l'abbaye du révérend Back sont des sous-ensembles 3-auto-similaires de $\mathbb{R}^2$. Le triangle de Pascal modulo 2 est un sous-ensemble 2-auto-similaire de $\mathbb{R}^2$. L'éponge de Menger est un sous-ensemble 3-auto-similaire de $\mathbb{R}^3$.

FIG. 12.1. L'ensemble de Cantor.

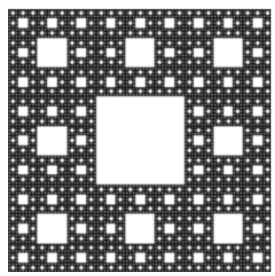

FIG. 12.2. Le tapis de Sierpiński.

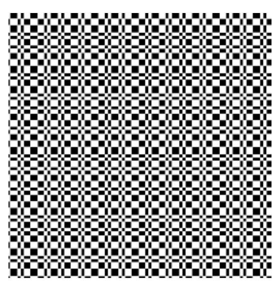

FIG. 12.3. Le sol de l'abbaye du révérend Back.

12.2 Un analogue du théorème de Cobham

La définition que nous avons donnée d'ensemble compact auto-similaire de $\mathbb{R}^n$ s'appuie sur la notion de noyau. En fait, comme nous l'avons vu au premier chapitre de ce mémoire, certains sous-ensembles d'entiers intéressants peuvent être caractérisés d'une

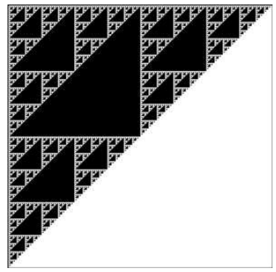

FIG. 12.4. Le triangle de Pascal modulo 2.

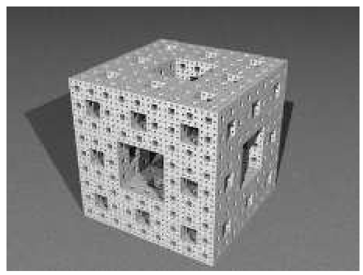

FIG. 12.5. L'éponge de Menger.

façon similaire : il s'agit des ensembles d'entiers automatiques. Rappelons qu'un ensemble d'entiers est k-automatique si, et seulement si, son k-noyau est fini. Ce résultat correspond au théorème E, donné au chapitre 1.

L'ensemble $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ formé des puissances positives de 2 est un exemple typique d'ensemble 2-automatique. Bien que ces entiers aient évidemment un développement très simple en base 2, on peut observer que c'est loin d'être le cas lorsque ceux-ci sont écrits en base 3. Un des résultats les plus importants de la théorie des automates finis formalise cette idée. Rappelons que deux entiers strictement positifs k et l sont dits multiplicativement indépendants si $\log(k)/\log(l) \notin \mathbb{Q}$ ou, de façon équivalente, si l'équation $k^a = l^b$ a une unique solution en entiers positifs a, b. Le théorème de Cobham traduit le fait que seuls les ensembles d'entiers « triviaux » sont reconnaissables dans deux bases qui sont multiplicativement indépendantes [Co69]. Plus précisément, Cobham démontra en 1969 le résultat suivant.

Théorème C2. *Soient k et ℓ deux entiers strictement positifs et multiplicativement indépendants. Alors, un ensemble d'entiers $\mathcal{N}$ est à la fois k-automatique et l-automatique si, et seulement si, il est composé d'un ensemble fini et d'une union finie de progressions arithmétiques.*

Le résultat principal de [AdBe1] est l'analogue du théorème de Cobham pour les sous-ensembles auto-similaires de $\mathbb{R}$.

Théorème 12.1. *Soient k et ℓ deux entiers strictement positifs et multiplicativement indépendants. Alors, un sous-ensemble compact $X \subseteq [0,1]$ est à la fois k-auto-similaire* *et ℓ-auto-similaire si, et seulement si, il est composé d'une union finie d'intervalles fermés dont les extrémités sont des nombres rationnels.*

Ainsi, l'ensemble triadique de Cantor n'est pas 2-auto-similaire ou 7-auto-similaire. Notons que notre démonstration repose sur des arguments topologiques élémentaires et n'utilise pas le théorème de Cobham. Nous montrons également dans [AdBe1] comment associer de façon naturelle un ensemble fractal à tout automate fini. Notre approche est inspirée par les travaux de Kedlaya [Ked06] décrits au chapitre 7. Ces ensembles sont appelés *fractals automatiques*. Les exemples donnés précédemment et illustrés par les figures 12.1–12.5 sont en fait tous des fractals automatiques. Nous montrons que les fractals automatiques sont auto-similaires. Signalons que des constructions différentes de « fractals automatiques », mais conduisants toutefois à des familles de fractals similaires, se trouvent dans de nombreux autres travaux ; citons entre autres [HS67, SS89, AHPS96, AHPPS97, HPS01a, HPS01b, BH03, AS03]. L'article [BB09] présente un cas particulier du théorème 12.1, mais exprimé en termes de logique et motivé par des questions de nature complètement différente.

Le théorème 12.1 ne prend en compte que des ensembles unidimensionnels, mais on peut raisonnablement s'attendre à un phénomène du même genre en toute dimension. Plus précisément, nous avons formulé dans [AdBe1] la conjecture suivante.

Conjecture 12.2. *Soient k et ℓ deux entiers strictement positifs et multiplicativement indépendants. Alors, un ensemble compact $X \subseteq [0,1]^d$ est à la fois k-auto-similaire et ℓ-auto-similaire si, et seulement si, il est composé d'une union finie de polyèdres dont les sommets ont des coordonnées rationnelles.*

Notons que certains principes d'indépendance similaires sont attendus dans d'autres contextes et sont sources de questions difficiles. En guise d'illustration, nous rappelons trois problèmes ouverts qui relèvent de ce principe. Le premier, le problème $\times 2 \times 3$ de Furstenberg, est issu de la théorie des systèmes dynamiques. Il s'énonce comme suit : étant donnés deux entiers positifs multiplicativement indépendants k et l, il s'agit de démontrer que les seules mesures boréliennes sur $[0,1]$, qui sont à la fois ergodiques pour les transformations $T_k(x) = kx \pmod 1$ et $T_l(x) = bx \pmod 1$, sont la mesure de Lebesgue et les mesures portées par des orbites périodiques pour les deux actions. Cette question fut proposée par Furstenberg en 1967 [Fu67]. Dans un registre plus arithmétique, on trouve le problème suivant déjà mentionnée au chapitre 7 : étant donnée une suite binaire $(a_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, il s'agit de démontrer que si les deux nombres réels

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{3^n}$$

sont des nombres algébriques, alors ils sont rationnels. Cette question est généralement attribuée à Mahler. Citons enfin un problème apparu implicitement dans certains travaux de Ramanujan (voir [Wa00]) : il s'agit de montrer que si x est un nombre réel tel que les nombres 2^x et 3^x sont entiers, alors x est lui-même entier. Cet énoncé correspond à un cas particulier de la conjecture des quatre exponentielles, un problème de transcendance célèbre.

Grave incertitude, toutes les fois que l'esprit se sent dépassé par lui-même ; quand lui, le chercheur, est tout ensemble le pays obscur où il doit chercher et où tout son bagage ne lui sera de rien.

Marcel Proust, *À la recherche du temps perdu.*

Bibliographie

[Ad02] B. Adamczewski, Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **14** (2002), 351–386.

[Ad03] B. Adamczewski, Balances for fixed points of primitive substitutions, *Theoret. Comput. Sci.* **307** (2003), 47–75.

[Ad04a] B. Adamczewski, Répartition des suites $(n\alpha)$ et substitutions, *Acta Arith.* **112** (2004), 1–22.

[Ad04b] B. Adamczewski, Transcendance « à la Liouville » de certains nombres réels, *C. R. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), 511–514.

[Ad04c] B. Adamczewski, Symbolic discrepancy and self-similar dynamics, *Ann. Inst. Fourier* **54** (2004), 2201–2234.

[Ad05] B. Adamczewski, On powers of words occurring in binary codings of rotations, *Adv. Appl. Math.* **34** (2005), 1–29.

[Ad10] B. Adamczewski, On the expansion of some exponential periods in an integer base, *Math. Ann.* **346** (2010), 107–116.

[Ad] B. Adamczewski, Non-converging continued fractions related to the Stern diatomic sequence, *Acta Arith.* **142** (2010), 67–78.

[AA07] B. Adamczewski and J.-P. Allouche, Reversals and palindromes in continued fractions, *Theoret. Comput. Sci.* **320** (2007), 220–237.

[AdBe07] B. Adamczewski and J. Bell, Function fields in positive characteristic: expansions and Cobham's theorem, *J. Algebra* **319** (2008), 2337–2350.

[AdBe1] B. Adamczewski and J. Bell, An analogue of Cobham's theorem for fractals, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc*, 19 pp.

[AdBe2] B. Adamczewski and J. Bell, Vanishing coefficients of algebraic power series over fields of positive characteristic, preprint 2010.

[AdBe4] B. Adamczewski and J. Bell, Automata in Number Theory, to appear as Chapter 23 of the collective book *Automata: from Mathematics to Applications*, to be published by the European Mathematical Society.

[AdBu05] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, On the complexity of algebraic numbers II. Continued fractions. *Acta Math.* **195** (2005), 1–20.

[AdBu06a] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, On the Littlewood conjecture in simultaneous diophantine approximation. *J. London Math. Soc.* **73** (2006), 355–366.

[AdBu06b] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, Real and p-adic expansions involving symmetric patterns, *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), Article ID 75968, 17 pages.

[AdBu07a] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, A short proof of the transcendence of Thue-Morse continued fractions, *Amer. Math. Monthly* **114** (2007), 536–540.

[AdBu07b] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, On the independence of expansions of algebraic numbers in an integer base, *Bull. London Math. Soc.* **39** (2007), 283–289.

[AdBu07c] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, On the complexity of algeraic numbers I. Expansions in integer bases, *Annals of Math.* **165** (2007), 547–565.

[AdBu07d] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, Dynamics for β-shifts and Diophantine approximation, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **27** (2007), 1695–1711.

[AdBu07e] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, Palindromic continued fractions, *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007), 1557–1574.

[AdBu07f] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, On the Maillet-Baker continued fractions, *J. Reine Angew. Math.* **606** (2007), 105–121.

[AdBu07g] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, On the Littlewood conjecture in fields of power series, Probability and Number Theory — Kanazawa 2005, *Adv. Stud. Pure Math.* **49** (2007), 1–20.

[AdBu1] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, Transcendence measures for continued fractions involving symmetric and repetitive patterns, *J. Eur. Math. Soc.* **12** (2010), 883–914.

[AdBu2] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, Mesures de transcendance et aspects quantitatifs de la méthode de Thue-Siegel-Roth-Schmidt, *Proc. London Math. Soc.* **101** (2010), 1–26.

[AdBu3] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, Nombre réels de complexité sous-linéaire : mesures d'irrationalité et de transcendance, à paraître au *J. Reine Angew. Math.*, 34 pp.

[AdBu4] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, Diophantine approximation and transcendence, in *Combinatorics, Automata and Number Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **135**, Cambridge University Press, 2010, pp. 424–465.

[ABD06] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, and L. Davison, Continued fractions and transcendental numbers, *Ann. Inst. Fourier* **56** (2006), 2093–2113.

[ABL04] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, and F. Luca, Sur la complexité des nombres algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), 11–14.

[ABL08] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, and F. Luca, On the values of a class of analytic functions at algebraic points, *Acta Arith.*, 135 (2008), 1–18.

[AC03] B. Adamczewski and J. Cassaigne, On the transcendence of real numbers with a regular expansion, *J. Number Theory* **301** (2003), 27–37.

[AC06] B. Adamczewski and J. Cassaigne, Diophantine properties of real numbers generated by finite automata, *Compositio Math.* **142** (2006), 1351–1372.

[ACL1] B. Adamczewski, J. Cassaigne and M. Le Gonidec, The Hartmanis–Stearns problem revisited I: infinite automata, work in progress.

[ACL2] B. Adamczewski, J. Cassaigne and M. Le Gonidec, The Hartmanis–Stearns problem revisited II: the Chomsky hyerarchy and pushdown automata, work in progress.

[AD02] B. Adamczewski and D. Damanik, Linearly recurrent circle map subshifts and an application to Schrödinger operators, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 1019-1047.

[AF] B. Adamczewski and C. Faverjon, Une minoration effective du nombre de chiffres non nuls dans le développement en base entière d'un nombre algébrique irrationnel, travail en cours.

[AFSS] B. Adamczewski, Ch. Frougny, A. Siegel and W. Steiner, Rational numbers with purely periodic β-expansion, *Bull. London Math. Soc.* **42** (2010), 538–552.

[AdRa08] B. Adamczewski and N. Rampersad, On patterns occurring in binary algebraic numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), 3105–3109.

[AdRi09] B. Adamczewski and T. Rivoal, Irrationality measures for some automatic real numbers, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **147** (2009), 659–678.

[AD77] W. W. Adams and J. L. Davison, A remarkable class of continued fractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **65** (1977), 194–198.

[Ak98] S. Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, In *Number theory (Eger, 1996)*, 9–21, de Gruyter, Berlin, 1998.

[Ak00] S. Akiyama, Cubic Pisot units with finite beta expansions, In *Algebraic number theory and Diophantine analysis (Graz, 1998)*, 11–26, de Gruyter, Berlin, 2000.

[ABBS08] S. Akiyama, G. Barat, V. Berthé and A. Siegel, Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions, *Monatsh. Math.* **155** (2008), 377–419.

[Al90] J.-P. Allouche, Sur la transcendance de la série formelle Π, *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)* **2** (1990), 103–117.

[Al96] J.-P. Allouche, Transcendence of the Carlitz-Goss gamma function at rational arguments, *J. Number Theory* **60** (1996), 318–328.

[ADQZ01] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, and L. Q. Zamboni, Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions, *J. Number Theory* **91** (2001), 39–66.

[AHPPS97] J.-P. Allouche, F. von Haeseler, H.-O. Peitgen, A. Petersen, and G. Skordev, Automaticity of double sequences generated by one-dimensional linear cellular automata, *Theoret. Comput. Sci.* **188** (1997), 195–209.

[AHPS96] J.-P. Allouche, F. von Haeseler, H.-O. Peitgen, and G. Skordev, Linear cellular automata, finite automata and Pascal's triangle, *Discrete Appl. Math.* **66** (1996), 1–22.

[AS99] J.-P. Allouche and J. O. Shallit, The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence, in *Sequences and their applications (Singapore, 1998)*, 1–16, Springer, London, 1999.

[AS03] J.-P. Allouche and J. O. Shallit, *Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press, 2003.

[AT99] J.-P. Allouche and D. Thakur, Automata and transcendence of the Tate period in finite characteristic, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 1309–1312.

[AZ98] J.-P. Allouche and L. Q. Zamboni, Algebraic irrational binary numbers cannot be fixed points of non-trivial constant length or primitive morphisms, *J. Number Theory* **69** (1998), 119–124.

[BBCP04] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall, and C. Pomerance, On the binary expansions of algebraic numbers, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (2004), 487–518.

[BC02] D. H. Bailey and R. E. Crandall, Random generators and normal numbers, *Experimental Math.* **11** (2002), 527–546.

[Bak62] A. Baker, Continued fractions of transcendental numbers, *Mathematika* **9** (1962), 1–8.

[Bak64] A. Baker, On Mahler's classification of transcendental numbers, *Acta Math.* **111** (1964), 97–120.

[BH03] A. Barbé and F. von Haeseler, Limit sets of automatic sequences. *Adv. Math.* **175** (2003), 169–196.

[BaSw76] L. E. Baum and M. M. Sweet, Continued fractions of algebraic power series in characteristic 2, *Annals of Math.* **103** (1976), 593–610.

[BaSw77] L. E. Baum and M. M. Sweet, Badly approximable power series in characteristic 2, *Annals of Math.* **105** (1977), 573–580.

[Bax04] C. Baxa, Extremal values of continuants and transcendence of certain continued fractions, *Adv. in Appl. Math.* **32** (2004) 745–790.

[BDV06] V. Beresnevich, D. Dickinson and S. Velani, Measure theoretic laws for lim sup sets, *Mem. Amer. Math. Soc.* **179** (2006).

[BDV07] V. Beresnevich, D. Dickinson and S. Velani, Diophantine approximation on planar curves and the distribution of rational points, with an Appendix by R. C. Vaughan, *Annals of Math.* **166** (2007), 367–426.

[BV06] V. Beresnevich and S. Velani, A mass transference principle and the Duffin-Schaeffer conjecture for Hausdorff measures, *Annals of Math.* **164** (2006), 971–992.

[Bec94] P. G. Becker, k-regular power series and Mahler-type functional equations, *J. Number Theory* **49** (1994), 269–286.

[Ber92] V. Berthé, De nouvelles preuves « automatiques » de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz, *Astérisque* **209** (1992), 159–168.

[Ber94] V. Berthé, Automates et valeurs de transcendance du logarithme de Carlitz, *Acta Arith.* **66** (1994), 369–390.

[BHZ06] V. Berthé, C. Holton, and L. Q. Zamboni, Initial powers of Sturmian words, *Acta Arith.* **122** (2006), 315–347.

[BeSi07] V. Berthé and A. Siegel, Purely periodic β-expansion in the non-unit case, *J. Number Theory* **127** (2007), 153–172.

[BS96] F. Beukers and H. P. Schlickewei, The equation $x + y = 1$ in finitely generated groups, *Acta Arith.* **78** (1996), 189–199.

[Bi08] Yu. Bilu,The many faces of the Subspace Theorem [after Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier ...], Séminaire Bourbaki 2006/2007, exposé no. 967, *Astérisque* **317** (2008), 1–38.

[BB09] B. Boigelot and J. Brusten, A generalization of Cobham's theorem to automata over real numbers, *Theoret. Comput. Sci.* **410** (2009), 1694–1703.

[BvdP88] E. Bombieri and A. J. van der Poorten, Some quantitative results related to Roth's theorem, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **45** (1988), 233–248.

[Bo1909] É. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **27** (1909), 247–271.

[Bu08] Y. Bugeaud, Diophantine approximation and Cantor sets, *Math. Ann.* **341** (2008), 677–684.

[BE08] Y. Bugeaud and J.-H. Evertse, On two notions of complexity of algebraic numbers, *Acta Arith.* **133** (2008), 221–250.

[Bun80] P. Bundschuh, Über eine Klasse reeller transzendenter Zahlen mit explizit angebbarer g-adischer und Kettenbruch-Entwicklung, *J. Reine Angew. Math.* **318** (1980), 110–119.

[Ca02] C. S. Calude, *Information and Randomness. An algorithmic perspective*, Texts in Theoretical Computer Science, an EATCS series, Springer-Verlag, 2002.

[CSD55] J. W. S. Cassels and H. P. F. Swinnerton-Dyer, On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **248** (1955), 73–96.

[Ch33] D. G. Champernowne, The construction of decimals normal in the scale of ten, *J. London Math. Soc.* **8** (1933), 254–260.

[Che51] C. Chevalley, *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable*, Mathematical Surveys No. VI, Amer. Math. Soc., 1951.

[CS63] N. Chomsky and M. P. Schützenberger, The algebraic theory of context free languages, in *Computer Programming and Formal Languages*, North Holland, Amsterdam, 118–161, 1963.

[Chr79] G. Christol, Ensembles presque périodiques k-reconnaissables, *Theoret. Comput. Sci.* **9** (1979), 141–145.

[CKMR80] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France, and G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), 401–419.

[Co68] A. Cobham, On the Hartmanis-Stearns problem for a class of tag machines, *Conference Record of 1968 Ninth Annual Symposium on Switching and Automata Theory*, Schenectady, New York (1968), 51–60.

[Co69] A. Cobham, On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata, *Math. Systems Theory* **3** (1969), 186–192.

[Co72] A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972), 164–192.

[CZ02a] P. Corvaja and U. Zannier, Some new applications of the Subspace Theorem, *Compositio Math.* **131** (2002), 319–340.

[CZ02b] P. Corvaja and U. Zannier, Finiteness of integral values for the ratio of two linear recurrences, *Invent. Math.* **149** (2002), 431–451.

[CZ04a] P. Corvaja and U. Zannier, On integral points on surfaces, *Annals of Math.* **160** (2004), 705–726.

[CZ04b] P. Corvaja and U. Zannier, On the rational approximations to the powers of an algebraic number: solution of two problems of Mahler and Mendès France, *Acta Math.* **193** (2004), 175–191.

[CZ05] P. Corvaja and U. Zannier, S-unit points on analytic hypersurfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **38** (2005), 76–92.

[Da77] J. L. Davison, A series and its associated continued fraction, *Proc. Amer. Math. Soc.* **63** (1977), 29–32.

[Da89] J. L. Davison, A class of transcendental numbers with bounded partial quotients, in *Number theory and applications (Banff, 1988)*, 365–371, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[Da02] J. L. Davison, Continued fractions with bounded partial quotients, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **45** (2002), 653–671.

[Da07] J. L. Davison, Quasi-periodic continued fractions, *J. Number Theory* **127** (2007), 272–282.

[DE52] H. Davenport and P. Erdős, Note on normal decimals, *Canadian J. Math.* **4** (1952), 58–633.

[DL63] H. Davenport and D. J. Lewis, An analogue of a problem of Littlewood, *Michigan Math. J.* **10** (1963), 157–160.

[DR55] H. Davenport and K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 160–167.

[DS69] H. Davenport and W. M. Schmidt, Approximation to real numbers by algebraic integers, *Acta Arith.* **15** (1968-1969) 393–416.

[Del84] P. Deligne, Intégration sur un cycle évanescent, *Invent. Math.* **76** (1984), 129–143.

[Der07] H. Derksen, A Skolem-Mahler-Lech theorem in positive characteristic and finite automata, *Invent. Math.* **168** (2007), 175–224.

[DS] K. Dilcher and K. B. Stolarsky, Stern polynomials and double-limit continued fractions, *Acta Arith.* **140** (2009), 119–134.

[Du09] A. Dubickas, Binary words with a given Diophantine exponent, *Theoret. Comput. Sci.* **410** (2009), 5191–5195.

[Dy47] F. J. Dyson, The approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Math.* **79** (1947), 225–240.

[Ei74] S. Eilenberg, *Automata, Languages, and Machines*, Vol. A. Academic Press, 1974.

[EKL06] M. Einsiedler, A. Katok, and E. Lindenstrauss, Invariant measures and the set of exceptions to the Littlewood conjecture, *Annals of Math.* **164** (2006), 513–560.

[EPSW03] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, and T. Ward, *Recurrence Sequences*, Mathematical Surveys and Monographs **104**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Ev84] J.-H. Evertse, On sums of S-units and linear recurrences, *Compositio Math.* **53** (1984), 225–244.

[Ev97] J.-H. Evertse, The number of algebraic numbers of given degree approximating a given algebraic number, in: *Analytic number theory (Kyoto, 1996)*, pp. 53–83, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[ES02] J.-H. Evertse and H. P. Schlickewei, A quantitative version of the Absolute Subspace Theorem, *J. Reine Angew. Math.* **548** (2002), 21–127.

[ESS02] J.-H. Evertse, H. P. Schlickewei, and W.M. Schmidt, Linear equations in variables which lie in a multiplicative group, *Annals of Math.* **155** (2002), 807–836.

[Fa90] K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1990.

[FM97] S. Ferenczi and Ch. Mauduit, Transcendence of numbers with a low complexity expansion, *J. Number Theory* **67** (1997), 146–161.

[Fi04] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Séminaire Bourbaki 2002–2003, exposé no. 910, *Astérisque* **294** (2004), 27–62.

[FS92] Ch. Frougny and B. Solomyak, Finite beta-expansions, *Ergodic Theory & Dynam. Systems* **12** (1992), 713–723.

[Fu67] H. Furstenberg, Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation, *Math. Systems Theory* **1** (1967), 1–49.

[Ga1829] É. Galois, Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques, *Annales math. pures et appl.* **19** (1828-1829), 294–301.

[Ge60] A.O. Gel'fond, *Transcendental and algebraic numbers*, Dover Publ., New York, 1960.

[Gr66] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **29** (1966), 95–103.

[HPS01a] F. von Haeseler, H.-O. Peitgen and G. Skordev, Self-similar structure of rescaled evolution sets of cellular automata I, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **11** (2001), 913–926.

[HPS01b] F. von Haeseler, H.-O. Peitgen and G. Skordev, Self-similar structure of rescaled evolution sets of cellular automata II, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **11** (2001), 927–941.

[Hah1907] H. Hahn, Über die nichtarchimedische Größensysteme (1907), reprinted in Gesammelte Abhandlungen I, Springer-Verlag, 1995.

[HI97] M. Hama and T. Imahashi, Periodic β-expansions for certain classes of Pisot numbers, *Math. Univ. St. Paul.* **46** (1997), 103–116.

[HL23a] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of diophantine approximation: the analytic character of the sum of a Dirichlet's series considered by Hecke, *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.* **3** (1923), 57–68.

[HL23b] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of diophantine approximation : the analytic character of the sum of a Dirichlet's series associated with the distribution of numbers to modulus unity, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **22** (1923), 519–533.

[HW08] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman.

[HS65] J. Hartmanis and R. E. Stearns, On the computational complexity of algorithms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **117** (1965), 285–306.

[HS67] J. Hartmanis and R. E. Stearns, Sets of numbers defined by finite automata, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967) 539–542.

[Har88] T. Harase, Algebraic elements in formal power series rings, *Israel J. Math.* **63** (1988), 281–288.

[He21] E. Hecke, Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins, *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.* **1** (1921), 54–76.

[IR05] S. Ito and H. Rao, Purely periodic β-expansion with Pisot base, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 953–964.

[Ka42] I. Kaplansky, Maximal fields with valuations, *Duke Math. J.* **9** (1942), 303–321.

[KS04] J. Karhumäki and J. O. Shallit, Polynomial versus exponential growth in repetition-free binary words, *J. Combin. Theory, Ser. A* **105** (2004), 335–347.

[Ked06] K. Kedlaya, Finite automata and algebraic extensions of function fields, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **18** (2006), 379–420.

[Kem16] A. J. Kempner, On transcendental numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **17** (1916), 476–482.

[Kh49] A. Ya. Khintchine, *Continued fractions*, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Theor. Lit. Moscow-Leningrad, 2nd edition, 1949.

[KZ01] M. Kontsevich and D. Zagier, Periods, in *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pp. 771–808, Springer-Verlag, 2001.

[Lan60] Lang, Serge Integral points on curves, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **6** (1960), 27–43.

[Lan65] S. Lang, Report on diophantine approximations, *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), 177–192.

[Lan95] S. Lang, *Introduction to Diophantine Approximations*, Springer-Verlag (1995).

[Las00] A. Lasjaunias, Quartic power series in $\mathbf{F}_3((T^{-1}))$ with bounded partial quotients, *Acta Arith.* **95** (2000), 49–59.

[Las08] A. Lasjaunias, Algebraic continued fractions in $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ and recurrent sequences in $\mathbb{F}_q$, *Acta Arith.* **133** (2008), 251–265.

[Lec53] C. Lech. A note on recurring series, *Ark. Mat.* **2** (1953), 417–421.

[Le56] W. J. LeVeque, *Topics in number theory*, vol. 1, 2, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1956.

[Lé36] P. Lévy, Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard, *Compositio Math.* **3** (1936), 286–303.

[Li1844] J. Liouville, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **18** (1844) 883–885 ; 910-911.

[Li68] J. E. Littlewood, *Some problems in real and complex analysis*, D. C. Heath and Co. Raytheon Education Co., Lexington, Mass., 1968.

[LW92] L. Lorentzen and H. Waadeland, *Continued fractions with applications*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.

[Lo97] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Lo02] M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **90**, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Lo05] M. Lothaire, *Applied combinatorics on words.*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **105**, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[LvdP77] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, Arithmetic properties of certain functions in several variables. III., *Bull. Austral. Math. Soc.* **16** (1977), 15–47.

[LvdP82] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations, *J. Reine Angew. Math.* **330** (1982), 159–172.

[LvdP88] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, Arithmetic properties of automata : regular sequences, *J. Reine Angew. Math.* **392** (1988), 57–69.

[Mah29] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Math. Annalen* **101** (1929), 342–366. Corrigendum **103** (1930), 532.

[Mah32] K. Mahler, Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. I, II, *J. Reine Angew. Math.* **166** (1932), 118–150.

[Mah33] K. Mahler, Zur Approximation algebraischer Zahlen, I. (Über den grössten Primteiler binärer Formen), *Math. Ann.* **107** (1933), 691–730.

[Mah35] K. Mahler, Eine arithmetische Eigenshaft der Taylor-Koeffizienten rationaler Funk- tionen, *Proc. Kon. Nederlandsche Akad. v. Wetenschappen* **38** (1935), 50–60.

[Mah37a] K. Mahler, Über die Dezimalbruchentwicklung gewisser Irrationalzahlen, *Mathematica 4B (Zutphen)* (1937), 15 pp.

[Mah37b] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen, *Proc. Akad. v. Wetensch.* **40** (1937), 421–428.

[Mah56] K. Mahler, On the Taylor coefficients of rational functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **52** (1956), 39–48.

[Mah57]] K. Mahler, Addendum to the paper "On the Taylor coefficients of rational functions", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), 544.

[Mah76] K. Mahler, On a class of transcendental decimal fractions, *Comm. Math. Pure Appl. Math.* **29** (1976), 717–725.

[Mah84] K. Mahler, Some suggestions for further research, *Bull. Austral. Math. Soc.* 29 (1984), 101–108.

[Mai1906] E. Maillet, *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1906.

[Mar00] G. A. Margulis, *Problems and conjectures in rigidity theory*, Mathematics : frontiers and perspectives, pp. 161–174. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[Mas99] D. W. Masser, Algebraic independence properties of the Hecke-Mahler series, *Quart. J. Math. Oxford* **50** (1999), 207–230.

[Mas04] D.W. Masser, Mixing and linear equations over groups in positive caracteristic, *Israel J. Math.* **142** (2004), 189–204.

[Mat03] B. de Mathan, Conjecture de Littlewood et récurrences linéaires, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13** (2003), 249–266.

[Me80] M. Mendès France, Sur les décimales des nombres algébriques réels, in *Sémin. Théor. Nombres Bordeaux (1979–1980)*, Exp. No. 28, 7 pp., Univ. Bordeaux I, Talence, 1980.

[Mih04] P. Mihăilescu, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, *J. reine angew. Math.* **572** (2004), 167–195.

[MR86] W. Mills and D. Robbins, Continued fractions for certain algebraic power series, *J. Number Theory* **23** (1986), 388–404.

[MP66] M. Minsky and S. Papert, Unrecognizable set of numbers, *J. Assoc. Comput. Mach.* **13** (1966), 281–286.

[Mo21] M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **22** (1921) 84–100.

[MH38] M. Morse and G. A. Hedlund, Symbolic dynamics, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 815–866.

[MH40] M. Morse and G. A. Hedlund, Symbolic dynamics II, *Amer. J. Math.* **62** (1940), 1–42.

[Ni91] Ku. Nishioka, Algebraic independence measures of the values of Mahler's functions, *J. Reine Angew. Math.* **420** (1991), 203–214.

[Ni96] Ku. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics **1631** Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Pa08] M. Papanikolas, Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms, *Invent. Math.* **171** (2008), 123–174.

[Pe08] F. Pellarin, Aspects de l'indépendance algébrique en caractéristique non nulle (d'après Anderson, Brownawell, Denis, Papanikolas, Thakur, Yu, et al.), Séminaire Bourbaki 2006/2007, exposé no. 973, *Astérisque* **317** (2008), 205–242.

[Py02] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics **1794**, Springer, 2002.

[PV00] A. D. Pollington and S. Velani, On a problem in simultaneous Diophantine approximation: Littlewood's conjecture, *Acta Math.* **185** (2000), 287–306.

[PS91] A. J. van der Poorten and H. P. Schlickewei, Additive relations in fields, *J. Austr. Math. Soc.* **51** (1991), 154–170.

[Qu98] M. Queffélec, Transcendance des fractions continues de Thue-Morse, *J. Number Theory* **73** (1998), 201–211.

[Qu00] M. Queffélec, Irrational numbers with automaton-generated continued fraction expansion, in *Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998)*, 190–198, World Sci. Publ., 2000.

[Qu02] M. Queffélec, Approximations diophantiennes des nombres sturmiens, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **14** (2002), 613–628.

[Rat78] M. Ratliff, The Thue–Siegel–Roth–Schmidt Theorem for algebraic functions, *J. Number Theory* **10** (1978), 99–126.

[Rau82] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 147–178.

[Ré57] A. Rényi, Representations for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 477–493.

[Rid57] D. Ridout, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **4** (1957), 125–131.

[Rit63] R. W. Ritchie, Finite automata and the set of squares, *J. Assoc. Comput. Mach.* **10** (1963), 528–531.

[Rot55] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 1–20 ; corrigendum, 169.

[Roy03] D. Roy, Approximation to real numbers by cubic algebraic integers, II, *Annals of Math.* **158** (2003), 1081–1087.

[Roy04] D. Roy, Approximation to real numbers by cubic algebraic integers, I, *Proc. London Math. Soc.* **88** (2004), 42–62.

[Sa86] O. Salon, Suites automatiques à multi-indices, *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (1)* exposé numéro 4 (1986-1987), 4.01-4.36 (avec un appendice de J. Shallit).

[Sa87] O. Salon, Suites automatiques à multi–indices et algébricité, *C. R. Acad. Sci. Paris* **305** (1987), 501–504.

[Sc76] H. P. Schlickewei, On products of special linear forms with algebraic coefficients, *Acta Arith.* **31** (1976), 389–398.

[Sc77] H. P. Schlickewei, The $\mathfrak{p}$-adic Thue–Siegel–Roth–Schmidt theorem, *Arch. Math. (Basel)* **29** (1977), 267–270.

[K. Sch80] K. Schmidt, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers, *Bull. London Math. Soc.* **12** (1980), 269–278.

[K. Sch01] K. Schmidt, The dynamics of algebraic Z^d-actions, in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progress in Mathematics 201, pp. 543–553, Birkhäuser, Basel, 2001.

[SW93] K. Schmidt and T. Ward, Mixing automorphisms of compact groups and a theorem of Schlickewei, *Invent. Math.* **111** (1993), 69–76.

[W. Sch65] W. M. Schmidt, Über simultane Approximation algebraischer Zahlen durch Rationale, *Acta Math.* **114** (1965), 159–206.

[W. Sch70a] W. M. Schmidt, Simultaneous approximations to algebraic numbers by rationals, *Acta Math.* **125** (1970), 189–201.

[W. Sch70b] W. M. Schmidt, *T-numbers do exist*, in Symposia Math. IV, Inst. Naz. di Alta Math., Rome 1968, pp. 3–26, Academic Press, 1970.

[W. Sch72] W. M. Schmidt, Norm form equations, *Annals of Math.* **96** (1972), 526–551.

[W. Sch80] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics **785**, Springer, Berlin, 1980.

[W. Sch90] W. M. Schmidt, *Diophantine approximations and Diophantine equations*, Lecture Notes in Mathematics **1467**, Springer, Berlin, 1990.

[Se79] J.-P. Serre, Local Fields, Springer–Verlag, 1979.

[SS89] J. Shallit and J. Stolfi, Two methods for generating fractals, *Comput. & Graphics* **13** (1989), 185–191.

[Si21] C. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, *Math. Z.* **10** (1921), 173–213.

[Sk34] T. Skolem, *Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen*, in Comptes rendus du congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm, 1934 (1935), 163–188.

[SW88] H. Sharif and C. F. Woodcock, Algebraic functions over a field of positive characteristic and Hadamard products, *J. London Math. Soc.* **37** (1988), 395–403.

[Ta08] T. Tao, *Structure and randomness, Pages from year one of a mathematical blog*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Tha96] D. Thakur, Transcendence of gamma values for $F_q[T]$, *Annals of Math.* **144** (1996), 181–188.

[Tha99] D. Thakur, Diophantine approximation exponents and continued fractions for algebraic power series, *J. Number Theory* **79** (1999), 284–291.

[Thue09] A. Thue, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* **135** (1909), 284–305.

[Thue12] A. Thue, Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen, *Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl.* **1** (1912) 1–67; reprinted in *Selected Mathematical Papers of Axel Thue*, T. Nagell, ed., Universitetsforlaget, Oslo, 1977, pp. 413–478.

[Thur89] W. P. Thurston, *Groups, tilings and finite state automata*, Lectures notes distributed in conjunction with the Colloquium Series, in AMS Colloquium Lectures, 1989.

[Tu37] A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.* **42** (1937), 230–265.

[Vo98] J. F. Voloch, The equation $ax + by = 1$ in characteristic p, *J. Number Theory* **73** (1998), 195–200.

[Wa00] M. Waldschmidt, Un demi-siècle de transcendance, in *Development of mathematics 1950–2000*, pp. 1121–1186, Birkhäuser, Basel, 2000.

[Wa06] M. Waldschmidt, Diophantine analysis and words, in *Diophantine analysis and related fields 2006*, 203–221, Sem. Math. Sci. **35** Keio Univ., Yokohama, 2006.

[Wa09] M. Waldschmidt, Words and transcendence, in *Analytic number theory*, pp. 449–470, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[Wi60] E. Wirsing, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, *J. Reine Angew. Math.* **206** (1960), 67–77.

[Za03] U. Zannier, *Some Applications of Diophantine Approximation to Diophantine Equations (with special emphasis on the Schmidt Subspace Theorem)*, Forum, Udine, 2003.