Répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et substitutions

Boris Adamczewski

Institut de Mathématiques de Luminy

Abstract. For certain pairs $(\alpha,\beta)\in(0,1)^2$ (α quadratic and $\beta\in\mathbb{Q}(\alpha)$), we are interested in the distribution of the sequence $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ with respect to the interval $[0,\beta)$. More precisely, we study the asymptotic behaviour of the sum

$$\Delta_N^*(\alpha,\beta)=\left|\sum_{n=0}^{N-1}\left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\})-\beta\right)\right|.$$

We also show that the distribution of these sequences satisfy a strong irregularity property in the sense of V. T. Sós [27]. We deduce from this a result about the star discrepancy of certain particular sequences $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. This work is based on the study of a class of symbolic sequences defined over a binary alphabet wich was considered in [1].

Résumé. Nous nous intéressons à la répartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à l'intervalle $[0,\beta[$, pour certains couples $(\alpha,\beta)\in[0,1[^2$ (α quadratique et $\beta\in\mathbb{Q}(\alpha)$). Plus précisément, nous étudions le comportement asymptotique de la somme

$$\Delta_N^*(\alpha,\beta)=\left|\sum_{n=0}^{N-1}\left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\})-\beta\right)\right|.$$

Nous montrons que la répartition de ces suites satisfait une propriété de forte irrégularité au sens de V. T. Sós [27]. Nous déduisons ensuite de cette étude un résultat sur la discrépance à l'origine de suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ particulières. Ce travail est basé sur l'étude d'une classe de suites symboliques définies sur un alphabet binaire que nous considérons dans [1].

1 Introduction

Il est connu depuis les travaux de H. Weyl [29], P. Bohl [5] et W. Sierpinski [25, 26], que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si α est irrationnel. Etant donné un nombre irrationnel α, $\alpha\in[0,1[$, on définit la discrépance à l'origine de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$D_N^*(\alpha)=\sup_{\beta\in[0,1[}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\})-\beta\right)\right|.$$

Cette quantité mesure la déviation de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à une répartition idéale. (Ici $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionaire de x.) De nombreux auteurs ont étudié $D_N^*(\alpha)$ pour α irrationnel, notamment pour les plus récents citons : C. Baxa [2, 3], C. Baxa et J. Schoissengeier [4], Y. Dupain [9], Y. Dupain et V. T. Sós [11], J. Lesca [14], L. Ramshaw [19], H. Niederreiter [15], J. Schoissengeier [23, 24], V. T Sós [27]. De nombreuses références complémentaires pourront être trouvées dans l'ouvrage de L. Kuipers et H. Niederreiter [13] et plus récemment dans celui de M. Drmota et R. F. Tichy [6].

Si $\beta \in [0, 1[$, on définit également la quantité

$$\Delta_N^*(\alpha, \beta) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta \right) \right|,$$

que nous appellerons discrépance locale à l'origine de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ en β. Les principaux résultats concernant l'étude de la discrépance locale des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ont été obtenus par H. Kesten [12], Y. Dupain [8], Y. Dupain et V. T. Sós [10]. Plus récemment C. Pinner [17, 18], a obtenu des résultats similaires en étudiant certaines sommes liées à la discrépance des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons que :

$$D_N^*(\alpha) = \sup_{\beta\in[0,1[} (\Delta_N^*(\alpha, \beta)).$$

De façon générale, les résultats de discrépance sur les suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ont été obtenus en utilisant le développement en fractions continues du nombre α et des systèmes de numérations directement issus de ce développement, comme le système de numération d'Ostrowski [16].

Notre but est d'étudier le comportement asymptotique de $\Delta_N^*(\alpha, \beta)$ lorsque α est un nombre quadratique et $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Pour cela, nous n'utilisons pas les systèmes de numérations classiques évoqués précédemment. Nous basons notre travail sur l'étude, menée dans [1], d'une classe particulière de suites symboliques définies sur un alphabet binaire. Dans le paragraphe 4, nous introduisons un système de numération généralisé associé à une substitution, introduit par G. Rauzy [22], J-M. Dumont et A. Thomas [7]. Cet outil est fondamental pour notre étude, il remplace en quelque sorte le système de numération d'Ostrowski utilisé habituellement.

Le travail que nous présentons ici est fondé sur une idée introduite, à travers un exemple, par G. Rauzy [21, 22]. Un des intérêts de cette nouvelle approche est d'obtenir ultérieurement des résultats de répartition pour des suites multi-dimensionnelles. En effet, l'absence de bon équivalent multi-dimensionnel au développement en fractions continues constitue un frein important à la compréhension des suites de Kronecker par des méthodes généralisant directement celles utilisées usuellement en dimension 1. De plus, les seuls exemples connus d'ensembles non triviaux à restes bornés pour les suites de Kronecker sont obtenus à l'aide du système de numération que nous utilisons au paragraphe 4. Ces ensembles sont à frontière fractale et possèdent de nombreuses propriétés géométriques, ergodiques et combinatoires. Le plus célèbre d'entre eux est étudié par G. Rauzy [20], il est connu sous le nom de fractal de Rauzy.

2 Résultats et notations

Considérons un couple (α, β), $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Introduisons la quantité suivante :

$$\omega_N^+(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right).$$

Alors :

$$\Delta_N^*(\alpha, \beta) = |\omega_N^+(\alpha, \beta)|.$$

L'intervalle $[0, \beta[$ sera dit à restes majorés (respectivement minorés) si la suite $(\omega_N^+(\alpha, \beta))_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée). Il sera dit à restes bornés s'il est à la fois à restes majorés et à restes minorés, ce qui revient à dire que la suite $(\Delta_N^*(\alpha, \beta))_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il est déjà connu, d'après un résultat de H. Kesten [12], que la suite $(\Delta_N^*(\alpha, \beta))_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

Dans le paragraphe 5, nous démontrons les résultats suivants :

Théorème 1 *Soit $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$, tel que α soit un nombre quadratique et $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Nous exhibons un algorithme calculant les quantités :*

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n},$$

$$\liminf_{n\to\infty} \tfrac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n}$$

$$\textit{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \tfrac{\Delta_n^*(\alpha,\beta)}{\log n}.$$

De plus, l'intervalle $[0, \beta[$ est à restes majorés (respectivement minorés) pour la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = 0$ (respectivement $\liminf_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = 0$).

Corollaire *Considérons un couple $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$ pour lequel α désigne un nombre irrationnel quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Il existe alors une constante c strictement positive, calculable explicitement, telle que :*

$$\frac{\Delta_N^*(\alpha, \beta)}{\log N} > c,$$

pour une infinité d'entiers N.

Rappelons que V. T. Sós [27] a montré que la conclusion du corollaire précédent est en fait vérifiée par presque tout β au sens de la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$. Nous proposons donc une réalisation effective, pour certains β, du résultat métrique de V. T. Sós.

Dans le paragraphe 6, nous obtenons également, en appliquant notre méthode dans le cas d'un exemple précis, le résultat suivant :

Théorème 2

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2})}{\log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2})}{\log n}.$$

Dans la suite, nous ferons appel à certaines définitions et notations classiques en dynamique symbolique, que nous rappelons donc ici.

On appelle alphabet un ensemble $\mathcal{A}$, fini et non vide. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés lettres. Un mot (fini) sur $\mathcal{A}$ est une suite finie de lettres de $\mathcal{A}$ et un mot infini sur $\mathcal{A}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ indexée par $\mathbb{N}$. La longueur d'un mot fini w, notée $|w|$, est le nombre de lettres le composant. Le mot vide, noté ε, est l'unique mot de longueur 0. On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots de longueur finie sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites sur $\mathcal{A}$. Si $w = w_0 w_1 \dots w_n$ est un mot sur $\mathcal{A}$, on appelle préfixe (respectivement préfixe strict) de w tout mot de la forme $w_0 \dots w_k$ avec $0 \le k \le n$ (respectivement $0 \le k < n$), ou vide. Si $U = u_0 u_1 \dots u_n \dots$ est un mot infini sur $\mathcal{A}$, on appelle préfixe de U tout mot (fini) de la forme $u_0 u_1 \dots u_k$ avec k entier, ou vide.

Soit $U = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite symbolique définie sur un alphabet $\mathcal{A}$. On appelle facteur de U tout mot fini de la forme $u_i u_{i+1} \dots u_j$, $0 \le i \le j$. Une suite dans laquelle tout facteur admet une infinité d'occurrences est dite **récurrente**. Lorsque ces occurences ont de plus lieu à lacunes bornées, la suite est dite **uniformément récurrente**. Si w est un facteur de U et a une lettre de $\mathcal{A}$, alors $|w|_a$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot w. L'application classique de décalage (shift en anglais), notée $\mathcal{S}$, associe à une suite $U = (u_k)_{k\ge 0}$ la suite $\mathcal{S}(U) = (u_k)_{k\ge 1}$.

On définit sur $\mathcal{A}^*$ une opération, dite de concaténation, qui consiste simplement à juxtaposer deux mots. Muni de cette opération, l'ensemble $\mathcal{A}^*$ est un monoïde libre dont l'élément neutre est ε. Une application de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$, appelée **substitution** sur l'alphabet $\mathcal{A}$, se prolonge par concaténation en un endomorphisme du monoïde $\mathcal{A}^*$ puis en une application de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même. Etant donnée une substitution ξ définie sur $\mathcal{A}$, on appelle **matrice d'incidence** de ξ la matrice $M_\xi = (|\xi(j)|_i)_{(i,j)\in\mathcal{A}^2}$. La substitution ξ est dite **primitive** s'il existe un entier k tel que pour tout élément a de $\mathcal{A}$ et tout élément b de $\mathcal{A}$, b soit facteur de $\xi^k(a)$. Le fait qu'une substitution soit primitive est équivalent au fait que sa matrice d'incidence admette une puissance strictement positive.

3 Liens entre problèmes de répartition et suites symboliques

Etant donné un nombre irrationnel α, $\alpha \in [0,1[$, nous nous intéressons aux problèmes de répartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à un intervalle $[0,\beta[$, où $\beta \in [0,1[$. Plus précisément, nous cherchons à comprendre le comportement asymptotique des quantités $\omega_N^+(\alpha,\beta)$ et donc $\Delta_N^*(\alpha,\beta)$, introduites aux paragraphes 1 et 2. Nous montrons, dans ce paragraphe, que cette étude est intimement liée à la bonne compréhension de certaines suites symbolique. Nous exhibons parmi ces suites symboliques celles faisant intervenir des phénomènes d'autosimilarité.

Considérons donc un couple $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Introduisons alors la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'alphabet binaire $\{a,b\}$ par :

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0,\beta[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Cette suite symbolique contient exactement l'information nécessaire et suffisante pour évaluer les quantités que nous désirons étudier. En effet, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \big(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\big) = |u_0u_1\dots u_{N-1}|_a - N\beta.$$

Remarquons que le codage U de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être vu comme une opération de simplification, en ce sens qu'il paraît plus aisé d'étudier une suite définie sur un alphabet fini qu'une suite à valeurs dans l'intervalle $[0,1[$. Nous devons donc à présent comprendre l'évolution du nombre de a apparaissant dans un préfixe arbitraire de U. Lorsque la suite U fait intervenir des phénomènes d'autosimilarité, c'est-à-dire si U est liée à un point fixe de substitution, nous verrons au paragraphe 4 qu'il existe un outil puissant pour mener cette étude.

Nous avons précédemment montré le résultat suivant :

Théorème 3.1 [1] *Soit $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$, un couple tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$, $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ et U la suite définie sur l'alphabet $\{a,b\}$ à partir du couple (α,β), comme en (3.1). Alors :*
si $\alpha \le \beta$ (respectivement $\alpha \ge \beta$), il existe un morphisme de monoïde libre ϕ de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ et une substitution ξ sur $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$U = \phi(X_\xi) \text{ (respectivement } U = a\mathcal{S}(\phi(X_\xi))),$$

où $X_\xi = \lim_{n\to\infty} \xi^n(1)$ est point fixe non périodique de ξ et $\mathcal{S}$ désigne le shift usuel sur $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$.

De plus, dans les deux cas, ξ vérifie :
i) ξ est une substitution primitive, $\xi(1)$ commence par 1 et $|\xi(1)| \geq 2$,
ii) la matrice d'incidence de ξ admet trois valeurs propres simples réelles θ, 1 et $\frac{1}{\theta}$, avec $\theta > 1$.

Dans [1], nous remarquons qu'une suite U associée à un couple (α, β) comme en (3.1) est intimement liée à un échange de trois intervalles. Nous montrons, par un raisonnement d'induction, qu'il est possible d'obtenir cette suite en itérant quatre substitutions définies sur l'alphabet $\{1,2,3\}$ à partir de la lettre 1 puis en projetant la suite ainsi obtenue à l'aide d'un morphisme de monoïde libre de $\{1,2,3\}^*$ vers $\{a,b\}^*$. L'ordre d'itération des substitutions est déterminé par un algorithme de type "fractions continues" développant les paramètres α et β. Nous montrons que cet algorithme vérifie un théorème de type Lagrange, le développement associé au couple (α, β) étant ultimement périodique si et seulement si α et β appartiennent à un même corps quadratique . Les conditions imposées sur les paramètres (α, β) dans le théorème précédent sont donc équivalentes au fait que le développement de type "fractions continues" associé aux paramètres soit ultimement périodique. Notons que ce développement nous permet de déterminer les applications ϕ, ξ (et donc la valeur de θ) introduites dans le théorème 3.1.

Dans toute la suite les couples (α, β) considérés vérifieront les hypothèses du théorème 3.1.

Supposons que $\alpha \leq \beta$. D'après le théorème 3.1, la suite U est alors obtenue comme image du point fixe de la substitution ξ par la projection ϕ. Soit $U_n = u_0 u_1 \ldots u_{n-1}$ le préfixe de longueur n de la suite U. Si $X_k = x_0 x_1 \ldots x_{k-1}$ désigne le préfixe de longueur k de la suite X_ξ, il existe alors un unique entier N_n tel que $\phi(x_0 x_1 \ldots x_{N_n - 1})$ soit un préfixe de $u_0 u_1 \ldots u_{n-1}$ et $u_0 u_1 \ldots u_{n-1}$ soit un préfixe strict de $\phi(x_0 x_1 \ldots x_{N_n})$.
Posons :

$$S_n(U) = \#\{0 \leq k < n, u_k = a\} + \frac{\beta}{\beta - 1} \#\{0 \leq k < n, u_k = b\}.$$

Alors :

$$S_n(U) = \frac{\omega_n^+(\alpha, \beta)}{1 - \beta}.$$

Ainsi, en associant respectivement les "poids" 1 et $\frac{\beta}{\beta-1}$ aux lettres a et b, le poids $S_n(U)$ du préfixe de longueur n de la suite U est un multiple de $\omega_n^+(\alpha, \beta)$. Nous allons maintenant montrer qu'en associant les "bons poids" aux lettres 1, 2 et 3, les poids des préfixes du point fixe de la substitution ξ nous renseigneront sur $\omega_n^+(\alpha, \beta)$. Cette étape nous permettra de travailler directement avec la suite X_ξ et d'oublier ensuite la projection ϕ. Pour cela, nous introduisons l'application f définie de $\{1,2,3\}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(i) = |\phi(i)|_a + \frac{\beta}{\beta-1}|\phi(i)|_b, \text{ pour } i \in \{1,2,3\}. \tag{3.2}$$

Si $m \in \{1,2,3\}^*$, on pose

$$S^{(f)}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^{k} f(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \dots a_k, a_j \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Alors, comme $\beta - 1 < 0$:

$$S^{(f)}(X_{N_n}) + C\frac{\beta}{\beta-1} < S_n(U) < S^{(f)}(X_{N_n}) + C,$$

où $C = \max\{|\phi(1)|, |\phi(2)|, |\phi(3)|\}$. On obtient donc :

$$(1-\beta)S^{(f)}(X_{N_n}) - C\beta < \omega_n^+(\alpha,\beta) < (1-\beta)S^{(f)}(X_{N_n}) + C(1-\beta)$$

et ainsi

$$\omega_n^+(\alpha,\beta) = (1-\beta)S^{(f)}(X_{N_n}) + O(1). \tag{3.3}$$

On remarquera de plus que $N_n \leq n \leq C(N_n+1)$, et du fait que la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend toutes les valeurs entières, nous pouvons déduire les égalités suivantes :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = (1-\beta)\limsup_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_n})}{\log N_n} = (1-\beta)\limsup_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_n)}{\log n} \tag{3.4}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = (1-\beta)\liminf_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_n})}{\log N_n} = (1-\beta)\liminf_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_n)}{\log n}. \tag{3.5}$$

D'après [15] les quantités introduites dans les deux équations précédentes sont finies dès que α est à quotients partiels bornés, ce qui est bien sûr le cas lorsque α est quadratique.

Remarque 3.2 *Le théorème 3.1 implique que les égalités (3.3), (3.4) et (3.5) sont vérifiées même si $\alpha \geq \beta$.*

Il est déjà connu, d'après un résultat de H. Kesten [12], que la suite $(\Delta_N^*(\alpha,\beta))_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. C'est pourquoi, il ne faut pas voir la condition $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ comme trop restrictive pour notre étude.

D'après l'équation 3.3, l'intervalle $[0,\beta[$ est un intervalle à restes majorés (respectivement minorés) pour la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si la suite $(S^{(f)}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée).

4 Système de numération généralisé et substitution

Nous voilà ainsi conduits à évaluer une somme liée à un point fixe de substitution primitive. Pour cela, nous allons utiliser un système de numération associé à la substitution $\xi\cdot$ Ce système est introduit par J. M. Dumont et A. Thomas [7] sous une forme classique. Dans [22], G. Rauzy en donne une version plus visuelle à l'aide de l'automate des préfixes. C'est ce point de vue que nous avons choisi d'adopter.

Définition 4.1 *Considérons une substitution σ sur un alphabet $\mathcal{A}$, telle que $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a)$ commence par a et $|\sigma(a)| \geq 2$. Le sous ensemble de $\mathcal{A}^*$ formé des préfixes stricts des images par σ des éléments de $\mathcal{A}$ sera noté $Pref$ ou $Pref_\sigma$ si une confusion est possible. L'automate des préfixes associé à l'unique point fixe de σ commençant par a est défini par :*

- *$\mathcal{A}$ est l'ensemble des états de l'automate,*
- *$Pref$ est l'ensemble des étiquettes,*
- *il existe une flèche de l'état a vers l'état b étiquetée par le mot m si mb est un préfixe de $\sigma(a)$.*

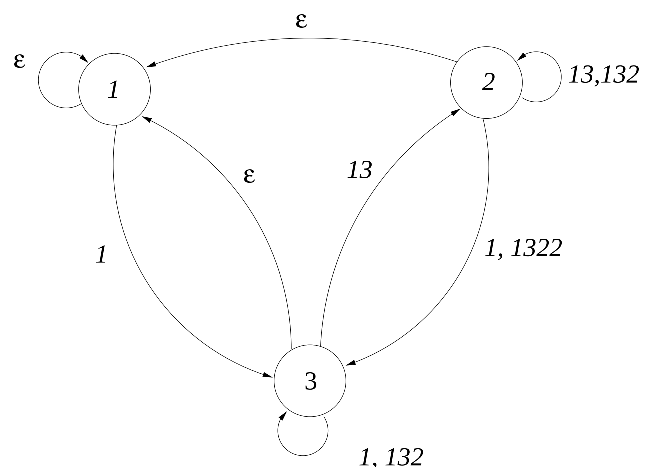

FIG. 4.1 – Exemple d'automate des préfixes dans le cas de la substitution $1 \longmapsto 13\,, 2 \longmapsto 13223\,, 3 \longmapsto 1323$.

Définition 4.2 *Un chemin étiqueté $\mathcal{C}$ reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ sera noté sous la forme*

$$((i_0, i_1, E_0), (i_1, i_2, E_1), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))\,,$$

$i_j \in \mathcal{A}$ pour $0 \leq j \leq n$, $E_j \in Pref_\sigma$ pour $0 \leq j \leq n-1$. L'entier n désigne la longueur du chemin.
On appellera suite des états associée au chemin $\mathcal{C}$ la suite $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ et

suite des étiquettes associée au chemin $\mathcal{C}$ la suite $(E_0, E_1, \ldots, E_{n-1})$.
L'ensemble des chemins étiquetés de longueur n reconnaissables par l'automate des préfixes associé à σ sera noté $\mathcal{C}_\sigma^n$.
On appellera chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ, une suite $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, $i_j \in \mathcal{A}$ pour $0 \le j \le n$, pour laquelle il existe un chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à σ dont la suite des états est $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$.

Le principal théorème concernant l'automate des préfixes associé à un point fixe de substitution est le suivant :

Théorème 4.3 (Dumont et Thomas [7], Rauzy [22]) *Conservons les notations de la définition 4.1 et notons X_σ l'unique point fixe de σ commençant par a.*
i) Pour tout entier N, il existe un unique chemin étiqueté reconnaissable par l'automate des préfixes associé à X_σ, partant de a et étiqueté par la suite $(E_0, E_1 \ldots E_n)$ tel que $E_0 \neq \varepsilon$ et $X_N = \sigma^n(E_0)\sigma^{n-1}(E_1)\ldots E_n$, où X_N désigne le préfixe de longueur N de la suite X_σ.
ii) Inversement, à un tel chemin correspond un unique préfixe non vide de X_σ, donné par la formule précédente.
iii) De plus, $|\sigma^n(a)| \le N < |\sigma^{n+1}(a)|$.

Revenons pour l'instant à notre substitution ξ. Pour $m \in \{1,2,3\}^*$, notons $L(m) = (|m|_i)_{i\in\{1,2,3\}}$. Alors

$$L(\xi(m)) = M_\xi(L(m)).$$

Donc, si i et j sont fixés dans $\{1,2,3\}$, la suite $(|\xi^n(j)|_i)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence dont les coefficients sont ceux du polynôme minimal de M_ξ. Ainsi il existe des reéls $\lambda_{i,j}$, $\lambda'_{i,j}$ et $\lambda''_{i,j}$ tels que pour tout entier n :

$$|\xi^n(j)|_i = \lambda_{i,j}\theta^n + \lambda'_{i,j} + \lambda''_{i,j}(\frac{1}{\theta})^n, \tag{4.1}$$

car, d'après le théorème 3.1, M_ξ admet trois valeurs propres simples réelles qui sont θ, 1 et $\frac{1}{\theta}$, avec $\theta > 1$. De plus, ces coefficients sont déterminés par la relation :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i,j} \\ \lambda'_{i,j} \\ \lambda''_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta & 1 & \frac{1}{\theta} \\ \theta^2 & 1 & (\frac{1}{\theta})^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |\xi^0(j)|_i \\ |\xi(j)|_i \\ |\xi^2(j)|_i \end{pmatrix}.$$

Par primitivité de ξ, la suite positive $(|\xi^n(j)|_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée. On a donc $\lambda_{i,j} > 0$. D'après (4.1), il vient

$$|\xi^n(j)| = \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_{i,j}\right)\theta^n + \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda'_{i,j}\right) + \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda''_{i,j}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)^n \tag{4.2}$$

et

$$\begin{array}{rll} S^{(f)}(\xi^n(j)) & = \sum_{i=1}^3 |\xi^n(j)|_i f(i) & \\ & = \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j} f(i)\right)\theta^n & + \left(\sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j} f(i)\right) \\ & & + \left(\sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j} f(i)\right)(\frac{1}{\theta})^n. \end{array}$$

D'après l'équation (4.2), on obtient :

$$\begin{array}{rl} S^{(f)}(\xi^n(j)) = & \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j} f(i)\right)\left(\frac{|\xi^n(j)| - (\sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j}) - (\sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j})(\frac{1}{\theta})^n}{(\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j})}\right) \\ & + \sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j} f(i) + \left(\sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j} f(i)\right)(\frac{1}{\theta})^n. \end{array}$$

Or, de l'équirépartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{n} = 0$$

et donc que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S^{(f)}(\xi^n(j))}{|\xi^n(j)|} = 0.$$

Il suit que, pour tout $j \in \{1,2,3\}$, $\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_{i,j} f(i)\right) = 0$.

Ainsi $S^{(f)}(\xi^n(j)) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^3 \lambda'_{i,j} f(i)\right)}_{\lambda'(j)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^3 \lambda''_{i,j} f(i)\right)}_{\lambda''(j)}(\frac{1}{\theta})^n$. Finalement, pour tout $j \in \{1,2,3\}$, il existe deux nombres réels calculables explicitement, $\lambda'(j)$ et $\lambda''(j)$, tels que pour tout entier n on ait :

$$S^{(f)}(\xi^n(j)) = \lambda'(j) + \lambda''(j)(\frac{1}{\theta})^n. \tag{4.3}$$

Posons maintenant pour $m \in \{1,2,3\}^*$:

$$\lambda'(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^k \lambda'(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \ldots a_k,\ a_j \in \{1,2,3\}, \end{cases}$$

et

$$\lambda''(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \varepsilon, \\ \sum_{j=1}^k \lambda''(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \ldots a_k,\ a_j \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Pour tout $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ tel que la suite (i,j) est un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ, on pose :

$$M_{(i,j)} = \max\left\{\lambda'(E),\ \text{où (i,j,E)} \in \mathcal{C}_\xi^1\right\}$$

et

$$m_{(i,j)} = \min\left\{\lambda'(E),\ \text{où (i,j,E)} \in \mathcal{C}_\xi^1\right\}.$$

Nous allons à présent introduire deux nouveaux automates associés à la substitution ξ et construits à partir de l'automate des préfixes associé à ξ.

Définition 4.4 *Nous appellerons $\mathcal{A}_{max\xi}$ associé à X_ξ, l'automate défini par :*

- $\{1, 2, 3\}$ *est l'ensemble des états de l'automate,*
- *l'ensemble des étiquettes est formé des nombres $M_{(i,j)}$ introduits ci-dessus,*
- *il existe une flèche de l'état i vers l'état j, s'il existe $m \in Pref_\xi$ tel que mj soit un préfixe de $\xi(i)$; cette flèche est alors étiquetée par le mot $M_{(i,j)}$.*

Définition 4.5 *Nous appellerons $\mathcal{A}_{min\xi}$ associé à X_ξ, l'automate défini par :*

- $\{1, 2, 3\}$ *est l'ensemble des états de l'automate,*
- *l'ensemble des étiquettes est formé des nombres $m_{(i,j)}$ introduits ci-dessus,*
- *il existe une flèche de l'état i vers l'état j, s'il existe $m \in Pref_\xi$ tel que mj soit un préfixe de $\xi(i)$; cette flèche est alors étiquetée par le mot $m_{(i,j)}$.*

Remarque 4.6 *Par construction de $\mathcal{A}_{max\xi}$ et $\mathcal{A}_{min\xi}$, on est assuré que les ensembles des chemins (non étiquetés) reconnaissables par chacun des trois automates que nous avons définis sont identiques. En fait $\mathcal{A}_{max\xi}$ et $\mathcal{A}_{min\xi}$ peuvent être vus comme deux "sous-automates" de l'automate des préfixes associé à ξ, en ce sens que tout chemin (non étiqueté) reconnaissable par l'un de ces deux automates est un chemin (non étiqueté) reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ.*

On peut remarquer que dans les deux automates définis précédemment, une flèche de l'état i vers l'état j est nécessairement étiquetée par le nombre $M_{(i,j)}$ dans le premier automate et $m_{(i,j)}$ dans le second. Nous pourrons donc confondre les notions de chemin et de chemin étiqueté reconnaissable par ces automates. On notera ainsi $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, pour chacun de ces deux automates, l'unique chemin (étiqueté) de longueur n dont la suite des états est $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$. Compte tenu de cette nouvelle notation et de la remarque 4.6, nous pouvons définir les deux quantités suivantes pour tout chemin $(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}) \in \mathcal{C}_\xi^{n+1}$:

$$P_M(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} M_{i_k, i_{k+1}},$$

et

$$P_m(i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} m_{i_k, i_{k+1}}.$$

Nous devons à présent définir une notion très utile pour obtenir des résultats précis à l'aide de ce type d'automates.

Définition 4.7 *Etant donné un automate dont l'ensemble des états est noté $\mathcal{A}$, on appelle boucle élémentaire tout chemin étiqueté reconnaissable par l'automate de la forme $((i_0, i_1, E_0), \ldots, (i_{n-1}, i_n, E_{n-1}))$, $(i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{A}^{n+1}$, satisfaisant les deux conditions suivantes :*
- $i_o = i_n$
- $i_k \neq i_j$, $\forall\ 0 \leq j, k < n$.
On notera $\mathcal{E}l$ l'ensemble des boucles élémentaires de l'automate.

Remarque 4.8 *Comme les deux automates, $\mathcal{A}_{max\xi}$ et $\mathcal{A}_{min\xi}$, ne comportent que trois états puisque ξ est définie sur un alphabet à trois lettres et que chacune de leurs flèches ne porte qu'une seule étiquette, ils ne peuvent compter plus de 8 boucles élémentaires, à état de départ près. Ces boucles sont, si elles existent :*

$$(1,1), (2,2), (3,3), (1,2,1), (1,3,1), (2,3,2), (1,2,3,1), (1,3,2,1).$$

Dans le cas de l'automate de la figure 4.1, les boucles élémentaires sont :

$$(1,1), (2,2), (3,3), (1,3,1), (2,3,2), (1,3,2,1).$$

5 Les principaux résultats

On introduit les quantités suivantes :
$M = \max\left\{\frac{P_M(B)}{|B|},\ B \in \mathcal{E}l\right\}$,
$m = \min\left\{\frac{P_m(B)}{|B|},\ B \in \mathcal{E}l\right\}$,
$A = \max\{|M|, |m|\}$.
Nous rappelons que θ est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de ξ introduite dans le théorème 3.1.

Théorème 5.1 *Avec les notations précédentes, les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = \frac{(1-\beta)}{\log\theta} M,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n} = \frac{(1-\beta)}{\log\theta} m$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\alpha,\beta)}{\log n} = \frac{(1-\beta)}{\log\theta} A.$$

Remarque 5.2 *Soit $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$, un couple tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$, $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Le théorème 5.1 nous dit que l'on peut* *alors calculer algorithmiquement les quantités*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n},$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\omega_n^+(\alpha,\beta)}{\log n}$$

$$et \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\alpha,\beta)}{\log n},$$

à l'aide de l'algorithme développé dans [1] qui, partant du développement ultimement périodique d'un couple de paramètres (α, β), produit la substitution ξ et la projection ϕ définie dans le théorème 3.1 .

Dans le lemme suivant, nous montrons que les poids $P_M(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ et $P_m(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ associés à un chemin $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ peuvent être obtenus, à une constante près indépendante de n, en sommant des poids de boucles élémentaires. Ce résultat traduit simplement que, d'une part, le petit nombre d'états des automates contraint tout chemin à repasser régulièrement par les mêmes états et donc à effectuer des boucles, et que d'autre part, l'addition des poids commute avec la concaténation.

Lemme 5.3 *Il existe une constante $C' > 0$, telle que pour tout chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à X_ξ dont la suite des états est $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, il existe $(B_1, B_2, \ldots, B_k) \in (\mathcal{E}l)^k$, k éventuellement nul, tels que :*

i) $\left| P_M(i_0, i_1, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^k P_M(B_i) \right| \leq C'$,

ii) $\left| P_m(i_0, i_1, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^k P_m(B_i) \right| \leq C'$,

iii) $\left| n - \sum_{i=1}^k |B_i| \right| \leq 1$.

Preuve. Raisonnons par récurrence sur la longueur n du chemin. Posons $C' = \max\left\{\max\{|P_M(i,j)|, |P_m(i,j)|\}, (i,j) \in \{1,2,3\}^2\right\}$. Considérons un chemin de longueur 1, (i_0, i_1). Alors $|P_M(i_0, i_1) - 0| \leq C'$ et $|P_m(i_0, i_1) - 0| \leq C'$. La propriété est donc vérifiée pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Supposons que pour tout chemin de longueur k, $k < n$, la propriété soit vérifiée. Considérons un chemin de longueur n, reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ et dont la suite des états est $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$. On distingue alors deux cas.
Supposons dans un premier temps que $n = 2$.

Si $i_0 \neq i_1 \neq i_2$, on approche alors le chemin (i_0, i_1, i_2) par la boucle élémentaire (i_0, i_1, i_2, i_0). On a donc :

$$|P_M(i_0, i_1, i_2) - P_M(i_0, i_1, i_2, i_0)| = |P_M(i_2, i_0)| \leq C',$$

$$|P_m(i_0, i_1, i_2) - P_m(i_0, i_1, i_2, i_0)| = |P_m(i_2, i_0)| \leq C'$$

et

$$|n - |(i_0, i_1, i_2, i_0)|| = |2 - 3| \leq 1.$$

Sinon il existe $(l,h) \in \{0,1,2\}^2$, $l < h$, tel que $i_l = i_h$. Nous pouvons alors poser $h' = min\,\{m,\ m > l, \text{ tel que } i_m = i_l\}$. Ainsi $(i_l, \ldots, i_{h'})$ est une boucle élémentaire de longueur 1 ou 2, vérifiant :

$$|P_M(i_0, i_1, i_2) - P_M(i_l, \ldots, i_{h'})| \leq C',$$

$$|P_m(i_0, i_1, i_2) - P_m(i_l, \ldots, i_{h'})| \leq C'$$

et

$$|2 - |(i_l, \ldots, i_{h'})|| \leq 1.$$

Supposons à présent que $n \geq 3$. Alors comme $(i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2,3\}$, on est assuré qu'il existe $(l,h) \in \{0,1,2,3\}^2$, $l < h$, tel que $i_l = i_h$. Notons à nouveau $h' = min\,\{m,\ m > l, \text{ tel que } i_m = i_l\}$. Alors $(i_l, \ldots, i_{h'})$ est une boucle élémentaire et $(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n)$ est un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ dont la longueur est strictement inférieure à n. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(B_1, B_2, \ldots, B_k) \in (\mathcal{E}l)^k$, k pouvant être éventuellement nul, tel que :

$$\left| P_M(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^{k} P_M(B_i) \right| \leq C',$$

$$\left| P_m(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^{k} P_m(B_i) \right| \leq C'$$

et

$$\left| (n - (h' - l)) - \sum_{i=1}^{k} |B_i| \right| \leq 1.$$

Or

$$P_M(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_M(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n) + P_M(i_l, \ldots, i_{h'})$$

et

$$P_m(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_m(i_0, \ldots, i_l, i_{h'+1}, \ldots, i_n) + P_m(i_l, \ldots, i_{h'}).$$

Ainsi, en posant $B_{k+1} = (i_l, \ldots, i_{h'})$, il vient :

$$\left| P_M(i_0, i_1, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^{k+1} P_M(B_i) \right| \leq C',$$

$$\left| P_m(i_0, i_1, \ldots, i_n) - \sum_{i=1}^{k+1} P_m(B_i) \right| \leq C'$$

et

$$\left| n - \sum_{i=1}^{k+1} |B_i| \right| \leq 1,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Preuve du théorème 5.1. Considérons un entier N. D'après le théorème 4.3, il existe un unique chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à X_ξ, partant de 1, étiqueté par $(E_0, E_1, \dots, E_{n_N})$, $E_0 \neq \varepsilon$, et dont la suite des états est $(i_0, i_1, \dots, i_{n_N})$, tel que :

$$X_N = \xi^{n_N}(E_0)\xi^{n_N-1}(E_1)\dots E_{n_N}.$$

On a donc

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} S^{(f)}(\xi^k(E_{n_N-k})).$$

Puis, d'après l'équation (4.3)

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} \lambda'(E_{n_N-k}) + \sum_{k=0}^{n_N} \lambda''(E_{n_N-k})(\frac{1}{\theta})^k.$$

Puisque les E_k appartiennent à l'ensemble fini $Pref_\xi$ et que $\theta > 1$, on peut en déduire que

$$S^{(f)}(X_N) = \sum_{k=0}^{n_N} \lambda'(E_{n_N-k}) + O(1),$$

où la constante dans le O est indépendante de N. Il vient alors :

$$P_m(i_0, i_1, \dots, i_{n_N}) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq P_M(i_0, i_1, \dots, i_{n_N}) + O(1).$$

D'après le lemme 5.3, il existe des boucles élémentaires $B_1, B_2, \dots, B_k$, tels que :

$$\sum_{i=1}^{k} P_m(B_i) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^{k} P_M(B_i) + O(1).$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{|B_i|} \frac{P_m(B_i)}{|B_I|} \right) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{|B_i|} \frac{P_M(B_i)}{|B_I|} \right) + O(1),$$

puis

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{|B_i|} m \right) + O(1) \leq S^{(f)}(X_N) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{|B_i|} M \right) + O(1). \qquad (5.1)$$

De plus, d'après le *iii)* du théorème 4.3, $\xi^{n_N}(1) \leq N < \xi^{n_N+1}(1)$. Ceci implique notamment que

$$n_N \sim \frac{\log N}{\log \theta}, \qquad (5.2)$$

et d'après le *iii*) du lemme 5.3

$$\frac{m}{\log\theta} + o(1) \leq \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \leq \frac{M}{\log\theta} + o(1).$$

On en déduit que :

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \leq \frac{M}{\log\theta}$$

et

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_N)}{\log N} \geq \frac{m}{\log\theta}\,.$$

Finalement, d'après les équations (3.4) et (3.5), il vient

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\omega_N^+(\alpha,\beta)}{\log N} \leq \frac{M(1-\beta)}{\log\theta}$$

et

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\omega_N^+(\alpha,\beta)}{\log N} \geq \frac{m(1-\beta)}{\log\theta}\,.$$

Nous allons maintenant construire deux chemins optimisant les inégalités précédentes. Considérons $(i_0, i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{E}l$ vérifiant

$$\frac{P_M(i_0, i_1, \ldots, i_p)}{|(i_0, i_1, \ldots, i_p)|} = M.$$

La primitivité de ξ impliquant la récurrence de la suite X_ξ, l'automate des préfixes associé à ξ est fortement connexe. Il existe donc un chemin reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ partant de 1 et joignant i_0. Notons $((a_0, a_1, E_0), (a_1, a_2, E_1), \ldots, (a_{l-1}, i_0, E_{l-1}))$ un tel chemin étiqueté, avec donc $E_0 \neq \varepsilon$ et $a_0 = 1$. Pour tout entier k, on considère le chemin étiqueté suivant :

$$\begin{aligned}((a_0, a_1, E_0), (a_1, a_2, E_1), \ldots, (a_{l-1}, i_0, E_{l-1})\ ,&\\ \underbrace{(i_o, i_1, M_{i_0,i_1}), \ldots, (i_{p-1}, i_p, M_{i_{p-1},i_p}))}_{\text{itéré } k \text{ fois}}&\,.\end{aligned}$$

Ce chemin de longueur $l + kp$ est reconnaissable par l'automate des préfixes associé à ξ, commence par 1 et vérifie $E_0 \neq \varepsilon$. D'après le *ii)* du théorème 4.3 et l'étude précédente, il existe un entier N_k tel que :

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + k \sum_{j=0}^{p-1} M_{i_j, i_{j+1}} + O(1),$$

et de plus

$$(l + kp) \sim \frac{\log(N_k)}{\log\theta}.$$

Il vient ainsi

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + kM|(i_0, i_1, \ldots, i_p)| + O(1)$$

et donc

$$S^{(f)}(X_{N_k}) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda'(E_j) + kpM + O(1).$$

Finalement

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_{N_k})}{\log(N_k)} = \frac{M}{\log\theta}.$$

En considérant un chemin $(i'_0, i'_1, \ldots, i'_p) \in \mathcal{E}l$ vérifiant

$$\frac{P_m(i'_0, i'_1, \ldots, i'_p)}{|(i'_0, i'_1, \ldots, i'_p)|} = m,$$

on construirait de façon analogue une suite de préfixe de X_ξ, $(X_{N'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S^{(f)}(X_{N'_k})}{\log(N'_k)} = \frac{m}{\log\theta}.$$

Ceci achève la démonstration d'après les équations (3.4) et (3.5). ■

Le corollaire suivant est à rapprocher des résultats obtenus par Y. Dupain et V. T. Sós [10] et plus récemment par C. Pinner [18].

Corollaire 5.4 *L'intervalle $[0, \beta[$ est à restes majorés (respectivement minorés) si et seulement si $M = 0$ (respectivement $m = 0$).*

Preuve. Ce résultat découle immédiatement de l'équation (5.1), obtenue dans la démonstration du théorème 5.1, et de la remarque 3.2. ■

Remarque 5.5 *Soit $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$, un couple tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Le corollaire 5.4 nous dit que l'on peut alors répondre algorithmiquement, à l'aide de l'algorithme développé dans [1], à la question : l'intervalle $[0, \beta[$ est-il à restes majorés ou minorés pour la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Corollaire 5.6 *Etant donné un couple $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$, si α désigne un nombre irrationnel quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, alors il existe une constante c strictement positive telle que :*

$$\frac{\Delta^*_N(\alpha, \beta)}{\log N} > c,$$

pour une infinité d'entiers N.

Preuve. D'après le théorème 5.1, il vient avec les notations précédentes :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\alpha,\beta)}{\log n} = \frac{(1-\beta)}{\log\theta} \max\{|M|,|m|\}.$$

Comme $\frac{(1-\beta)}{\log\theta} > 0$, il suffit de montrer que $\max\{|M|,|m|\} > 0$, pour tout couple (α,β) satisfaisant les conditions demandées. Or d'après un théorème de H. Kesten [12], l'intervalle $[0,\beta[$ est à restes bornés si et seulement si $\beta \in \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$. Ainsi, pour les couples (α,β) que nous considérons, l'intervalle $[0,\beta[$ n'est jamais à restes bornés. Nous sommes donc assurés, par le corollaire 5.4, que les quantités m et M ne peuvent être simultanément nulles. Ceci implique donc la stricte positivité de $\max\{|M|,|m|\}$. ■

Le corollaire 5.6 est à rapprocher des résultats métriques obtenus au début des années 80 par V. T. Sós [27] et à ceux plus généraux obtenus par R. Tijdeman et G. Wagner [28].

Théorème 5.7 (Sós [27]) *Soit α un nombre irrationnel. Il existe une constante c, strictement positive et indépendante de α, telle que pour presque tout β au sens de la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$, on ait :*

$$\frac{\Delta_N^*(\alpha,\beta)}{\log N} > c,$$

pour une infinité d'entiers N.

6 Un exemple détaillé

Dans ce paragraphe, et afin de clarifier l'étude précédente, nous détaillons notre méthode dans le cas d'un exemple précis. Nous en déduisons, en utilisant un résultat de J. Schoissengeier [24], une propriété sur la discrépance de certaines suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$.

Considérons le nombre quadratique $\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Nous nous intéressons à la répartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à l'intervalle $[0,\frac{1}{2}[$. Notons $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0,\frac{1}{2}[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme d'induction que nous décrivons dans [1], G. Rauzy [21] montre que :

$$U = \phi(X_\xi),$$

où ϕ est le morphisme de monoïde libre défini par :

$$
\begin{array}{rrcl}
\phi: & \{1,2,3\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \{a,b\}^{\mathbb{N}} \\
& 1 & \longmapsto & a, \\
& 2 & \longmapsto & abb, \\
& 3 & \longmapsto & ab,
\end{array}
$$

et X_ξ est l'unique point fixe commençant par 1 de la substitution primitive ξ définie par :

$$
\begin{array}{rrcl}
\xi: & \{1,2,3\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \{1,2,3\}^{\mathbb{N}} \\
& 1 & \longmapsto & 13, \\
& 2 & \longmapsto & 13223, \\
& 3 & \longmapsto & 1323.
\end{array}
$$

On introduit alors l'application f définie, comme dans l'equation (3.2), par :

$$
\begin{array}{rrcl}
f: & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& 1 & \longmapsto & 1, \\
& 2 & \longmapsto & 1-1-1=-1, \\
& 3 & \longmapsto & 1-1=0.
\end{array}
$$

Nous allons à présent calculer les coefficients $\lambda'(j)$, $j \in \{1,2,3\}$, introduits dans l'équation (4.3). La matrice d'incidence de ξ, notée M_ξ, est donnée par :

$$
M_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Le polynôme caractéristique de M_ξ est le polynôme réciproque suivant :

$$
P_{M_\xi}(t) = -t^3 + 5t^2 - 5t + 1.
$$

On en déduit que M_ξ admet trois valeurs propres simples réelles qui sont

$$
\theta = 2+\sqrt{3},\ 1 \text{ et } \frac{1}{\theta} = 2-\sqrt{3}.
$$

Les coefficients $\lambda'_{i,j}$, $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$, introduits dans l'équation (4.1), sont alors déterminés par les relations :

$$
\begin{pmatrix} \lambda_{i,j} \\ \lambda'_{i,j} \\ \lambda''_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ (2+\sqrt{3})^2 & 1 & (2-\sqrt{3})^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |\xi^0(j)|_i \\ |\xi(j)|_i \\ |\xi^2(j)|_i \end{pmatrix}.
$$

Après calcul, on obtient :

$$
\begin{pmatrix} \lambda'_{1,1} = \frac{1}{2} & \lambda'_{1,2} = -\frac{1}{2} & \lambda'_{1,3} = 0 \\ \lambda'_{2,1} = -\frac{1}{2} & \lambda'_{2,2} = \frac{1}{2} & \lambda'_{2,3} = 0 \\ \lambda'_{3,1} = \frac{1}{2} & \lambda'_{3,2} = -\frac{1}{2} & \lambda'_{3,3} = 0 \end{pmatrix},
$$

puis

$$\lambda'(1) = 1,\ \lambda'(2) = -1 \text{ et } \lambda'(3) = 0, \tag{6.1}$$

car

$$\lambda'(j) = \sum_{i=1}^{3} \lambda'_{i,j} f(i).$$

L'automate des préfixes associé à la substitution ξ est représenté sur la figure 4.1. A partir de ce dernier et de l'équation (6.1), nous sommes en mesure de représenter les deux automates $\mathcal{A}_{max\xi}$ et $\mathcal{A}_{min\xi}$, comme le montrent les figures 6.1 et 6.2.

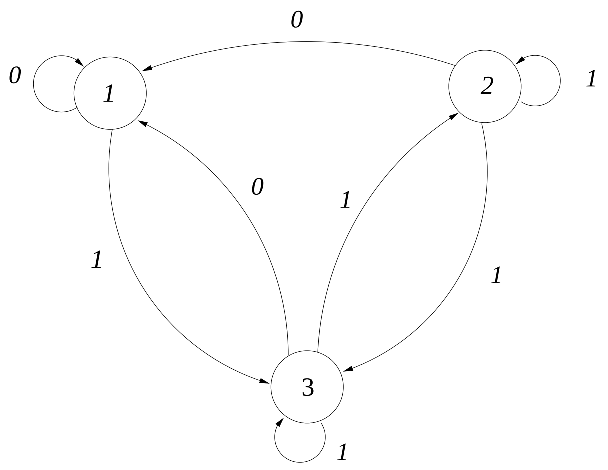

FIG. 6.1 – L'automate $\mathcal{A}_{max\xi}$.

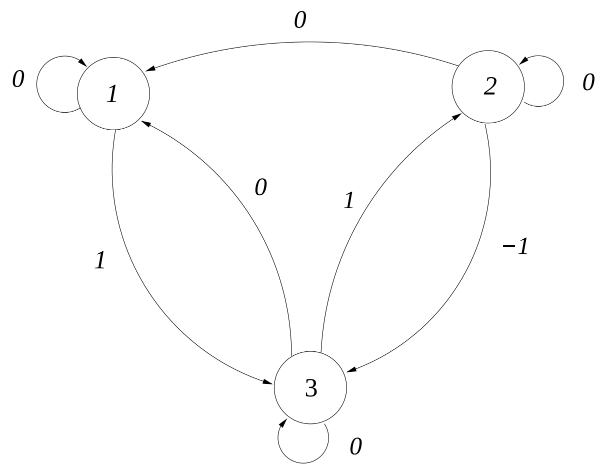

FIG. 6.2 – L'automate $\mathcal{A}_{min\xi}$.

On obtient immédiatement, M et m désignant les quantités introduites au début du paragraphe 5, que

$$M = 1 \text{ et } m = 0.$$

Finalement, le corollaire 5.4 entraine que l'intervalle $[0, \frac{1}{2}[$ est à restes minorés pour la suite $\left(n(\frac{\sqrt{3}-1}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc que l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1[$ est à restes majorés pour la suite $\left(n(\frac{\sqrt{3}-1}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, d'après le théorème 5.1, on obtient :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2})}{\log n} = \frac{1}{2\log(2+\sqrt{3})}. \tag{6.2}$$

En remarquant que le développement en fractions continues de $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ est $[0; \overline{2, 1}\,]$, un résultat de [24] nous dit que :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2})}{\log n} = \frac{2}{4\log\left(1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\right)}.$$

On en déduit alors, d'après l'égalité (6.2), le résultat suivant :

Théorème 6.1

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2})}{\log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Delta_n^*(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2})}{\log n}.$$

Remarque 6.2 *Le théorème précédent est vérifié pour d'autres couples comme par exemple :*

$$\begin{array}{lll} \alpha = \sqrt{2}-1 & \text{et} & \beta = \frac{1}{2}, \\ \alpha = \sqrt{2}-1 & \text{et} & \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \alpha = \sqrt{2}-1 & \text{et} & \beta = \sqrt{2}-\frac{1}{2}, \\ \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \text{et} & \beta = \frac{\sqrt{5}+5}{10} \dots \end{array}$$

Question *On ne connaît pas pour l'instant d'exemple de couple vérifiant les hypothèses du théorème 5.1 pour lequel les conclusions du théorème 6.1 ne sont pas vérifiées. Les exemples précédents laissent penser que le théorème 6.1 est vérifié par tout couple $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$, tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Il serait donc intéressant de déterminer, α étant fixé, quels sont les éléments β, $\beta \in [0, 1[$, pour lesquels le couple (α, β) vérifie le théorème 6.1.*

Le fait que les conclusions du théorème 6.1 soient vérifiées par tout couple $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$, tel que α soit un nombre quadratique, $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, impliquerait que la constante c intervenant dans le corollaire 5.6

pourrait être choisie indépendamment de β bien sûr, mais également de α. En effet, d'après un résultat de C. Baxa [2], nous savons que :

$$\inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{D_n^*(\alpha)}{\log n}\right)=\limsup_{n\to\infty}\frac{D_n^*(\sqrt{2}-1)}{\log n}>0.$$

Nous serions de plus en mesure d'exhiber une constante optimale donnée donc par :

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{D_n^*(\sqrt{2}-1)}{\log n}=\frac{1}{4\log(1+\sqrt{2})}.$$

Références

[1] B. Adamczewski. Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité. Prépublication 2001-22, Institut de Mathématiques de Luminy.

[2] C. Baxa. On the discrepancy of the sequence $(n\alpha)$. *J. Number Theory*, 55(1) :94–107, 1995.

[3] C. Baxa. Comparing the distribution of $(n\alpha)$-sequences. *Acta Arith.*, 94(4) :345–363, 2000.

[4] C. Baxa and J. Schoissengeier. Minimum and maximum order of magnitude of the discrepancy of $(n\alpha)$. *Acta Arith.*, 68(3) :281–290, 1994.

[5] H. Bohl. Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem. *J. Reine Angew. Math.*, 135 :189–283, 1909.

[6] M. Drmota and R. F. Tichy. *Sequences, discrepancies and applications.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[7] J.-M. Dumont and A. Thomas. Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions. *Theoret. Comput. Sci.*, 65(2) :153–169, 1989.

[8] Y. Dupain. Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 29(3–4) :289–303, 1977.

[9] Y. Dupain. Discrépance de la suite $(\{n\alpha\})$, $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 29(1) :xiv, 81–106, 1979.

[10] Y. Dupain and V. T. Sós. On the one-sided boundedness of discrepancy-function of the sequence $\{n\alpha\}$. *Acta Arith.*, 37 :363–374, 1980.

[11] Y. Dupain and V. T. Sós. On the discrepancy of $(n\alpha)$ sequences. In *Topics in classical number theory, Vol. I, II (Budapest, 1981)*, pages 355–387. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[12] H. Kesten. On a conjecture of Erdős and Szüsz related to uniform distribution mod 1. *Acta Arith.*, 12 :193–212, 1966/1967.

[13] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics.

[14] J. Lesca. Sur la repartition modulo 1 de la suite $n\alpha$. *Acta Arith.*, 20 :345–352, 1972.

[15] H. Niederreiter. Application of Diophantine approximations to numerical integration. In *Diophantine approximation and its applications (Proc. Conf., Washington, D.C., 1972)*, pages 129–199. Academic Press, New York, 1973.

[16] A. Ostrowski. Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen I, II. *Abh. Math. Sem. Hambourg I*, pages 77–98 et 250–251, 1922.

[17] C. Pinner. On sums of fractional parts $\{n\alpha + \gamma\}$. *J. Number Theory*, 65(1) :48–73, 1997.

[18] C. G. Pinner. On the one-sided boundedness of sums of fractional parts $(\{n\alpha + \gamma\} - \frac{1}{2})$. *J. Number Theory*, 81(1) :170–204, 2000.

[19] L. Ramshaw. On the discrepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number. *J. Number Theory*, 13(2) :138–175, 1981.

[20] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2) :147–178, 1982.

[21] G. Rauzy. Des mots en arithmétique. In *Avignon conference on language theory and algorithmic complexity (Avignon, 1983)*, pages 103–113. Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1984.

[22] G. Rauzy. Sequences defined by iterated morphisms. In *Sequences (Naples/Positano, 1988)*, pages 275–286. Springer, New York, 1990.

[23] J. Schoissengeier. On the discrepancy of $(n\alpha)$. *Acta Arith.*, 44(3) :241–279, 1984.

[24] J. Schoissengeier. The discrepancy of $(n\alpha)_{n\geq 1}$. *Math. Ann.*, 296(3) :529–545, 1993.

[25] W. Sierpinski. Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme. *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. (Cracovie)*, A :9–11, 1910.

[26] W. Sierpinski. Sur une propriété caractéristique des nombres rationnels (in polish). *Pr. Mat. Fiz.*, 21 :1–6, 1910.

[27] V. T. Sós. On strong irregularities of the distribution of $\{n\alpha\}$ sequences. In *Studies in pure mathematics*, pages 685–700. Birkhäuser, Basel, 1983.

[28] R. Tijdeman and G. Wagner. A sequence has almost nowhere small discrepancy. *Monatsh. Math.*, 90(4) :315–329, 1980.

[29] H. Weyl. Über die Gleichverteilung mod. Eins. *Math. Ann*, 77 :313–352, 1916.

B. Adamczewski - Institut de Mathématiques de Luminy - CNRS - Case 907 - 163 avenue de Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France - *e-mail* : **adamczew@iml.univ-mrs.fr**