Université de Pau et des Pays de l'Adour **Année 2008-2009**
Département de Mathématiques

Algèbre bilinéaire - Feuille d'exercices N°3

Exercice 1. Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, déterminer la matrice associée ainsi que son rang, préciser si elle est symétrique et déterminer, éventuellement, la forme quadratique associée.

(1) $f_1(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_3$.
(2) $f_2(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_3$.
(3) $f_3(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 + 2x_3y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_1$.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et soit $B_0 = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de E.

(1) On définit $f : E \times E \to \mathbb{R}$ par $\forall (M, N)\ f(M, N) = tr(MN)$.
  (a) Démontrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.
  (b) Ecrire $M(f, B_0)$ et vérifier que f est non dégénérée. Calculer $f(M, M)$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
(2) Mêmes questions en considérant dans ce cas $g : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (M, N)\ ,\ g(M, N) = tr({}^tMN)$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$ est : $M(f, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

On désigne par q la forme quadratique associée à f.

(1) Démontrer que f est dégénérée et calculer $f(x, y)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer le noyau de q.
(3) Soit $F = Vect\{(1, 0, 1)\}$
  (a) Déterminer $F^\perp$.
  (b) On pose $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (-1, 1, 0)$ et $a_3 = (-3, 0, 1)$. Vérifier que (a_1, a_2, a_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Est-elle orthogonale ?
(4) Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes par la méthode de Gauss. Quelle est la signature de q ? En déduire $\mathcal{C}(q) = \{x \in \mathbb{R}^3\ ;\ q(x) = 0\}$.

Exercice 4. Soit m un réel et $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire dont la matrice dans la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$ est : $M(f, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) f est-elle non dégénérée ?
(2) Soit $F = \mathbb{R}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}, -1\right)$. Déterminer $F^\perp$, F est-il non isotrope ?
(3) On désigne par q la forme quadratique associée à f.
  (a) Décomposer q par la méthode de Gauss.
  (b) En déduire, suivant les valeurs de m, la signature et le rang de q.
(4) On suppose enfin que $m \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 1\}$. Déduire de 3. une base B de $\mathbb{R}^3$ f-orthogonale.

Exercice 5. Pour chacune des formes quadratiques suivantes donner la signature, le rang et le noyau :

(1) $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

(2) $q_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_4^2 + 5x_1x_2 - 3x_1x_4 + 2x_2x_4 - 7x_3x_4$.

(3) $q_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$.

Exercice 6. On considère $E = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2)$ muni de la forme bilinéaire f définie par :

$$\forall (M, N) \in E \times E \ , \ f(M, N) = tr(MN) \quad \text{(cf Exercice 2)}.$$

(1) Décomposer q_f en somme de carrés de la formes linéaires linéairement indépendantes. Quelle est la signature de q_f ?

(2) En déduire une base de E, f-orthogonale. Peut-on trouver une base de E f-orthonormale ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$ est : $M(f, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) Démontrer que f est dégénérée et calculer, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $f(x, y)$.

(2) Déterminer le noyau de q_f.

(3) Décomposer q_f par la méthode de Gauss. Quelle est la signature de q_f ? En déduire $\mathcal{C}_{q_f} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ q_f(x) = 0\}$.

Exercice 8. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + mx_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3,$$

où m est un paramètre réel.

(1) Déterminer la forme polaire f de q et exprimer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

(2) Pour quelle(s) valeur(s) de m la forme bilinéaire f est-elle dégénérée ?

(3) **On se place dans la situation où** $m = \dfrac{1}{2}$.

  (a) Déterminer alors le noyau de q (base et dimension).

  (b) En utilisant la méthode de Gauss, décomposer q en une combinaison linéaire de carrés indépendants. En déduire la signature de q.

  (c) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes.

  (d) Soit $F = Vect\{(1, 1, 1)\}$. Déterminer l'orthogonal $F^{\perp_f}$ du s.e.v. F.

  (e) Utiliser la question d) pour proposer une base f-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

(4) **On se place dans la situation où** $m \neq \dfrac{1}{2}$.

  (a) En utilisant la réduction en carrés de Gauss de q, déterminer une base f-orthogonale de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B}$ cette base.

  (b) Quelle est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$?

  (c) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

  Déterminer la matrice de l'adjoint $u^\star$ de u dans la base $\mathcal{B}$.