

Algèbre bilinéaire  
Feuille d'exercices n° 1

Rappels

**Exercice 1**

1) Calculer les déterminants suivant :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

2) Calculer, sous forme factorisée, les déterminants suivants :

$$A = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 2**

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

- 1) Pour quelles valeurs du paramètre réel  $a$ , la matrice  $M$  est-elle inversible ?
- 2) Calculer dans ce cas son inverse.

**Exercice 3**

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \alpha \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 4

1) Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 2m-1 \\ m-1 & 0 & 1 & m-1 \\ 2m-1 & 1 & m & 1 \\ m-1 & 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

2) En déduire, selon les valeurs de  $m$  et en fonction des paramètres  $a, b, c$  et  $d$ , l'ensemble des solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x + my + (2m-1)t = a \\ (m-1)x + z + (m-1)t = b \\ (2m-1)x + y + mz + t = c \\ (m-1)x + (m-1)t = d \end{cases}$$

#### Travail personnel

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  et

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-2 & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2\alpha & 2(\alpha+1) & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer  $\det(M_\alpha)$ .

2) Déterminer l'ensemble  $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{C} ; M_\alpha \text{ est inversible}\}$ . Calculer  $M_\alpha^{-1}$ , pour  $\alpha \in \Lambda$ .

3) Déterminer, suivant les valeurs de  $\alpha$ , le rang de  $M_\alpha$ .

4) En déduire, selon les valeurs de  $\alpha$  et en fonction des paramètres  $a, b$  et  $c$ , l'ensemble des solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} (\alpha-2)x + 2y - z = a \\ 2x + \alpha y + 2z = b \\ 2\alpha x + 2(\alpha+1)y + (\alpha+1)z = c \end{cases}$$