Epreuve préalable d'admission en préparation au concours de professeurs des écoles
1er avril 2006

1 – $(4 \times (4 \times (4 \times 3) + 2) + 3 = (4 \times (4 \times 12 + 2) + 3 = (4 \times (48 + 2) + 3 = 4 \times 50 + 3 = 200 + 3 = 203$
Réponse : C.

2 – Le périmètre de cette figure mesure $12 \times 6 = 72$ cm.
Réponse : B.

3 – $x \times y = 15 \times 10^{-3} \times 0{,}3 \times 10^4 = 15 \times 0{,}3 \times 10^{-3} \times 10^4 = (15 \times 0{,}3) \times (10^{-3} \times 10^4) = 4{,}5 \times 10^{-3+4} = 4{,}5 \times 10^1 = 4{,}5 \times 10 = 45$
Réponse : A.

4 – On utilise le théorème de Thalès dans les triangles ABC et CDE : les droites (AB) et (DE) étant parallèles, on CA/CE = CB/CD = AB/DE.
Donc AB = DE × CA/CE = 12 × 6/8 = 72/8 = 9 cm
Réponse : C.

5 -
A : fausse, car il y aurait alors quatre bonnes réponses, alors qu'il nous est dit qu'il n'y en a que deux.
B : $4 \times 0{,}3 = 1{,}2$; B est donc vraie
C : $10 \times 0{,}9 \times 0{,}3 = 9 \times 0{,}3 = 2{,}7$; C est donc vraie
Ayant trouvé les deux réponses correctes, on peut s'arrêter ici. Continuons quand même.
D : $(4 + 2{,}25) \times 3 = 6{,}25 \times 3 = 18{,}75$; D est donc fausse
E : $10^{-3} \times 1\,000\,000 = 0{,}001 \times 1\,000\,000 = 1\,000$; E est donc fausse.
Remarque : la proposition A est bien fausse, puisqu'on n'a trouvé que deux réponses correctes.

6 – La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. La somme des mesures des angles $\widehat{ACB}$ et ABC est donc égale à 180 – 40 = 140°. Comme le triangle ABC est isocèle, ces deux angles ont même mesure, soit 140/2 = 70°. La bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ le partage donc en deux angles de mesure 35°. Dans le triangle ACI, l'angle en C mesure donc 35°, l'angle en A mesure 40°. La mesure de l'angle $\widehat{AIC}$ est donc de 180 – 35 – 40 = 180 – 75 = 105°.
Réponse : B.

7 – $10^8 = 100\,000\,000$ et, pour multiplier par ce nombre, on décale donc la virgule de 8 chiffres vers la droite. On obtient donc 543210000 ou 543 210 000.
On peut aussi considérer qu'en multipliant un nombre proche de 5 par cent millions, on obtient un nombre de l'ordre de cinq cent millions ou 500 000 000.
Réponse : D.

8 – On enlève ce qui est commun aux deux côtés de la balance et on constate qu'un quart de la brique est équilibré par la moitié d'un kilogramme. La brique a donc une masse égale à quatre demi-kilogrammes, soit deux kilogrammes.
Réponse : C.

9 -
A : faux, car $3^8/3^4 = 3^{8-4} = 3^4$
B : faux, c'est $5^6 \times 5^7$ qui est égal à $5^{6+7} = 5^{13}$
C : faux, par exemple 12 est divisible par 6 ($12 = 2 \times 6$) et par 4 ($12 = 3 \times 4$), mais pas par 24
D : vraie, car $2^5 + 2^3 = 32 + 8 = 40$

Ayant trouvé la bonne réponse, on pourrait s'arrêter ici.
E : faux, car $5^2 \times 4^3 = 25 \times 64 = 25 \times 4 \times 16 = 100 \times 16 = 1\,600$, alors que $20^5 = 20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 = 400 \times 20 \times 20 \times 20 = 8\,000 \times 20 \times 20$: inutile de poursuivre, car on a déjà dépassé 1 600.

10 – Le tiers de 1500 est 1500/3 = 500 ; 2/3 de 1500 font donc 1000 : il y a donc 1000 étudiants en sciences. Un quart de 1000 est égal à 1000/4 = 250 ; ¾ de 1000 font donc 750 étudiants : il y a donc 750 étudiants de sciences en licence. Un dixième de 750 est égal à 750/10 = 75 ; 3/10 de 750 font donc $3 \times 75 = 225$: le nombre d'étudiants en sciences qui sont en licence et qui suivent l'option anglais est donc de 225.
Réponse : B.

11 -
A : vraie, un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange
B : faux, les diagonales d'un parallélogramme quelconque se coupent en leur milieu commun : cela ne suffit donc pas à caractériser un losange
C : vraie, les côtés opposés d'un parallélogramme étant de même longueur 2 à 2, si de plus deux côtés consécutifs ont même longueur, alors les quatre côtés ont même longueur et on a donc un losange
A priori, il est inutile d'examiner les propositions suivantes. Faisons-le quand même.
D : faux, cela est vrai dès que ABCD est un parallélogramme et ne suffit donc pas à caractériser un losange
E : faux, cela caractériserait un rectangle

12 – Le plus simple est de déterminer les aires de ces figures. On procède par découpage et recomposition. On obtient A = 5, B = 4 et C = 4. Les réponses A, C et E sont donc vraies.

13 – Sur la carte, 1 cm correspondra à 150/30 = 5 km dans la réalité. Or 1 km = 1 000 m et 1 m = 100 cm, donc 1 km = $1\,000 \times 100$ = 100 000 cm. 1 cm sur la carte correspondra donc à 500 000 cm dans la réalité. L'échelle de la carte doit donc être de 1/500 000.
Réponse : D.

14 – 11 et 13 étant tous deux premiers et inférieurs à 15, le premier critère de permet pas de discriminer les nombres proposés.
Le chiffre des milliers de ces cinq nombres étant toujours 1, le troisième critère nous assure que le chiffre des unités doit être 3 : il reste donc les propositions A, B et E.
On applique le second critère donné : parmi les nombres 110, 130 et 132, seul ce dernier est multiple de 12 ($132 = 11 \times 12$). Le nombre recherché est donc 1323.
Réponse : B.

15 – Un euro valant plus d'un dollar, la somme en euros doit être inférieure à la somme en dollars : cela exclut les réponses C, D et E.
On peut alors procéder de deux façons :
- multiplier par 1,61 les deux nombres 1500 et 1950 et voir lequel donne 2415.
- diviser 2415 par 1,61 et constater que l'on obtient 1500 (cette dernière méthode peut en fait être utilisée directement dès le début).
Réponse : A.

16 – Le volume d'une boule est donné par la formule $(4/3) \times \pi \times R^3$ où R est le rayon de la boule.
Si R est le rayon de la boule initiale, le rayon de la cavité intérieure est donc R/2 et le volume de celle-ci est donc égal à $(4/3) \times \pi \times (R/2)^3 = (4/3) \times \pi \times R^3/2^3 = ((4/3) \times \pi \times R^3)/2^3 = ((4/3) \times \pi \times R^3)/8$, soit 1/8 du volume de la boule initiale. Le volume de la boule évidée, égal au volume de la

boule pleine auquel on enlève le volume de la cavité, est donc égal à 1 – 1/8 = 7/8 du volume de la boule pleine initiale.
Réponse : C.

17 – L'aire de la feuille initiale est égale à 27 × 12 = 324 cm². L'aire de la partie restante doit donc être égale à (¾) × 324 = 3 × (324/4) = 3 × 81 = 243 cm². La pièce carrée enlevée a donc une aire de 324 – 243 = 81 cm². La longueur du côté de ce carré doit donc être égale à 9 cm, car 9^2 = 81 cm².
Réponse : B.

18 – On n'est pas obligé de traiter les propositions dans l'ordre.
A : vrai, les axes de symétrie sont les deux axes vertical et horizontal passant par le centre de la figure
E : vrai, il s'agit de l'axe vertical passant par les milieux des côtés horizontaux de la figure
Ayant trouvé deux réponses justes, il n'est pas besoin d'examiner les autres propositions. Faisons-le tout de même.
B : faux, la figure 3 possède deux axes de symétrie comme la figure 4 (un troisième axe de symétrie serait nécessairement oblique par rapport aux deux premiers, ce qui est manifestement impossible)
D : faux, en mathématiques on applique le principe selon lequel « qui peut le plus peut le moins », donc toute figure ayant deux axes de symétrie (voire plus) possède un axe de symétrie ; ici on a déjà trouvé au moins trois figures (2, 3 et 4) possédant un axe de symétrie
C : faux, les seuls axes de symétrie possibles par rapport au rectangle formant les bords extérieurs de la figure serait les deux axes vertical et horizontal passant par le centre de ce rectangle, mais ces deux axes ne sont pas axes de symétrie pour la diagonale du rectangle (les symétries correspondantes l'échangeraient contre l'autre diagonale)

19 – Partons d'un prix initial de 100 € pour simplifier les calculs. Après une baisse de 20 %, le nouveau prix est de 100 – 20 % de 100 = 100 – (20/100) × 100 = 100 – 20 = 80. Sophie obtient une baisse de 5 % **sur ce nouveau prix**. Elle paie donc 80 – 5 % de 80 = 80 – (5/100) × 80 = 80 – (5 × 80)/100 = 80 – 400/100 = 80 – 4 = 76 €.
Elle paie donc au final 76 % du prix initial. Si elle paie 304 €, c'est que 304 = (76/100) du prix initial, qui est donc égal à (100/76) × 304 = (100 × 304)/76 = (100 × 4 × 76)/76 = 100 × 4 = 400 €.
On pourrait aussi considérer que le rabais de 5 % est fait **par rapport au prix initial**. Sophie paierait donc 75 % du prix initial qui serait alors égal à (100/75) × 304 = 405,33 € après arrondi au centime, mais ce résultat ne figure pas dans les propositions qui nous sont faites.
Réponse : C.

20 – Après un demi-heure, un tiers des élèves avaient résolu l'énigme. Un quart d'heure après, la moitié des élèves l'ont résolu : elle a donc été résolue entretemps par ½ – 1/3 = 3/6 – 2/6 – 1/6 des élèves. Le sixième des élèves représente donc 4 élèves. L'effectif de la classe est donc de 6 × 4 = 24 élèves.
Réponse : D.

21 -
A : faux, ce nombre contient 2 083 141 centièmes
B : vrai, ce nombre contient 208 centaines
C : faux, c'est le chiffre des centaines qui est 8
D : vrai, ce nombre contient 208 314 dixièmes
E : faux, ce nombre contient 20 831 412 millièmes

22 – Le volume d'un cylindre est donné par la formule V = B × h où h est la hauteur du cylindre et B l'aire de sa base. Cette base étant formée par un disque, son aire B est donné par la formule B = π × R² où R est le rayon du disque.

Ici on passe d'un cylindre de rayon R à un cylindre de rayon 2R. La base de ce dernier sera donc B' = $\pi \times (2R)^2 = \pi \times 2^2 \times R^2 = 4 \times \pi \times R^2 = 4 \times B$. L'aire de la base du nouveau cylindre est donc égale à quatre fois l'aire de la base du cylindre initial. Le volume d'eau étant le même, on $V = B \times h = B' \times h'$. La hauteur h' de l'eau dans le nouveau cylindre est donc donnée par $h' = (B \times h)/B' = (B \times h)/4B = h/4$, soit le quart de la hauteur d'eau initiale. Celle-ci étant de 24 cm, la hauteur de l'eau dans le second vase est donc égale à 6 cm.
Réponse : A.

23 – La voiture aura rattrapé le vélo lorsqu'ils auront parcouru tous deux la même distance, puisqu'ils partent tous deux du même endroit. Notons x le temps (exprimé en h) depuis lequel la voiture aura alors roulé. Elle aura donc parcouru une distance, exprimée en km, égale à 50 x. Le vélo aura alors roulé pendant x + 1,5 (il est parti une heure et demi plus tôt) et aura donc parcouru une distance égale à 20 (x + 1,5) (en km). On trouvera alors x en écrivant que 20 (x + 1,5) = 50 x, ou 20 (x + 3/2) = 50 x.
Réponse : C.

24 – On écrit le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles ABC et CDE :
On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9 + BC^2$ et $EC^2 = ED^2 + CD^2 = 49 + CD^2$.
Or AC = CE, donc $AC^2 = CE^2$ et donc $9 + BC^2 = 49 + CD^2$, soit $BC^2 - CD^2 = 49 - 9 = 40$.
On utilise alors l'identité remarquable $BC^2 - CD^2 = (BC + CD) \times (BC - CD)$. Or BC + CD = BD = 20 cm. Donc $20 \times (BC - CD) = 40$, ce qui nous donne BC – CD = 2 cm.
Les deux nombres BC et CD sont donc tels que leur somme vaut 20 et leur différence 2 : il s'agit donc des nombres 11 et 9 : BC = 11 cm et CD = 9 cm.
Et le théorème de Pythagore nous donne alors : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 11^2 = 9 + 121 = 130$.
et donc $AC = \sqrt{130}$ (en cm).
Réponse : B.

25 – Le cycliste parcourt les 18 premiers kilomètres à la vitesse de 15 km/h, soit en 18/15 = 1,2 h, puis les 9 suivants à la vitesse de 10 km/h, soit en 9/10 = 0,9 h. Il a donc mis en tout pour monter 1,2 + 0,9 = 2,1 h, soit 2 heures et 1/10 d'heure, donc 2 heures et 6 minutes (on peut aussi convertir à mesure : 1,2 h en 1 h et $0,2 \times 60$ = 1 h et 12 min et 0,9 h = $0,9 \times 60$ = 54 min ; on retrouve bien 2 h et 6 min). Il arrive donc au sommet à 12 h 06.
Il s'arrête 10 minutes et repart donc à 12 h 16.
Il va trois fois plus vite en moyenne à la descente qu'à la montée; Il parcourt donc la même distance en trois fois moins de temps, soit le tiers de 2 heures et 6 minutes (= $2 \times 60 + 6 = 126$ min), donc en 42 minutes. Il arrive donc en bas du col à 12 h 58.
Réponse : C.

26 – Le total des points obtenus par ces 20 copies est de $11 \times 14 + 9 \times 12 = 154 + 108 = 262$. La moyenne sur l'ensemble des 20 copies est donc 262/20 = 13,1.
Réponse : C.

27 – Reprenons les opérations effectuées dans l'autre sens. La division euclidienne par 12 donne un quotient de 33 et un reste de 10, le dividende est donc égal à $12 \times 33 + 10 = 10 \times 33 + 2 \times 33 + 10 = 330 + 66 + 10 = 406$. Il nous faut alors ajouter 100 : 406 + 100 = 506, puis diviser par 5 : 506/5 = 101,2.
Réponse : D.

28 – Dans le cas le plus défavorable, on peut avoir trois personnes nées lors de chacun des mois de l'année, soit 36 personnes. Il faudra donc une 37ème personne pour être sûr d'avoir un mois où sont nées quatre personnes.

29 – L'aire du triangle BCD est égale à la moitié de A, aire du carré ABCD. L'aire du triangle CIJ est égale au quart de l'aire du triangle BCD (sa longueur et sa base mesurent la moitié de celles de BCD), soit 1/8 de A. L'aire du quadrilatère BDIJ est donc égale à (1/2-1/8) A = (4/8 – 1/8) A = 3/8 A. Enfin, l'aire de DOFI est la moitié de celle de BDIJ, soit (3/8)/2 = 3/16 A.
Réponse : B.

30 – L'aire du triangle ABD est la moitié de l'aire du carré ABCD, soit ½ A. L'aire du triangle ABO est la moitié de l'aire du triangle ABD, soit ¼ A.
On a vu que l'aire du quadrilatère DOFI est 3/16 A.
Les aires des triangles EFO, EFJ et BEJ sont égales entre elles et égales à un tiers de l'aire du quadrilatèreBOFJ, laquelle est la même que l'aire de DOFI, soit 3/16 A. L'aire de EFO est donc égale à 1/16 A.
L'assemblage des pièces 2,4 et 6 a donc une aire égale à (¼ + 3/16 + 1/16) A = (4/16 + 3/16 + 1/16) A = 8/16 A = ½ A.
Réponse : E.

31 – Raisonnons à partir des quatre carreaux qui forment la figure.
Avec un carreau, on peut former :
- 4 triangles correspondant à un quart de carreau, soit 16 triangles ;
- 4 triangles formés par un demi-carreau (moitiés supérieure gauche, supérieure droite, inférieure gauche, inférieure droite), soit 16 triangles et 32 triangles jusqu'ici.

Avec deux carreaux, on peut former deux triangles formés par deux moitiés contigües de l'un et de l'autre ; comme quatre paires de carreaux adjacents, cela fait 8 nouveaux triangles, soit un total de 40 jusqu'ici.
Avec l'ensemble de la figure, on peut former quatre triangles correspondant chacun à une moitié de celle-ci (moitiés supérieure gauche, supérieure droite, inférieure gauche, inférieure droite), soit 4 triangles supplémentaires et donc un total final de 44 triangles.
Réponse : B.

32 – Le cube de départ à six faces et on enlève une pyramide à chacun des huit sommets de ce cube, ce qui crée huit faces nouvelles. Le solide ibtenu a donc 14 faces.
Réponse : D.

33 – Le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = (B \times h)/3$ où B est l'aire de la base de la pyramide et h la hauteur de celle-ci. Les trois longueurs AI, AJ et AK étant toutes trois égales et les triangles AIJ, AIK et AJK étant tous trois rectangles en A, on a $B = (h \times h)/2 = h^2/2$ et donc $V = ((h^2/2) \times h)/3 = h^3/6$.
On sait enfin que AI, AJ et AK sont toutes trois égales à a/2 où a est la longueur de l'arête du cube. Le volume de la pyramide AIJK est donc $V = (a/2)^3/6 = (a^3/8)/6 = a^3/48$.
On a enlevé 8 telles pyramides, soit un volume de $8 \times a^3/48 = a^3/6$, au cube dont le volume est a^3. Le volume du solide obtenu est donc égal à $a^3 – a^3/6 = 6a^3/6 – a^3/6 = 5a^3/6$, soit les cinq sixièmes du volume du cube initial.
Réponse : B.

34 -
A : vraie, car les côtés opposés de APMQ sont parallèles deux à deux
B : faux, car, les triangles BPM et MQC étant isocèles, on PM = PB et QM = QC, et donc, pour le périmètre de APMQ : AP + PM + QM + AQ = AP + PB + QC + AQ = AB + AC qui ne dépend pas de la position du point M
Ayant trouvé la réponse fausse annoncée, il n'est donc pas besoin d'aller plus loin. Allons-y quand même.
C : vraie, en vertu du théorème de Thalès, les droites (QM) et (AB) étant parallèles, les rapports

CM/CB, CQ/CA et QM/AB sont égaux, ce qui signifie que les dimensions du triangle CMQ sont proportionnelles aux dimensions correspondantes du triangle CBA, autrement dit ces deux triangles sont semblables
D : vraie, les droites (PM) et (AC) étant parallèles, les angles correspondants BMP et MCQ ont même mesure et, le triangle CMQ étant isocèle, les angles CMQ et MCQ sont de même mesure, d'où on déduit que BMP et CMQ ont même mesure
E : vraie, par exemple si on place M au milieu du segment [BC], l'aire du parallélogramme APMQ est égale à la moitié de l'aire du triangle ABC, alors que si on met M au point C (ou très proche de celui-ci), on voit que l'aire de APMQ tend vers 0
Réponse : B.

35 – Dans une division euclidienne, le reste doit être strictement inférieur au diviseur.
A : vrai, car $501 < 2\,006$
B : faux, car $2014 > 2\,006$
C : faux, on vient de voir que la seconde ne correspond pas à une division euclidienne
Normalement, les deux réponses suivantes doivent être vraies et on pourrait s'arrêter ici.
D : vrai, avec 2 014, on peut faire un « paquet » supplémentaire de 2 006 et il restera 8 (la division euclidienne de 4 509 496 par 2 006 est donc $4\,509\,496 = 2\,006 \times 2\,248 + 8$
E : vrai, car on a aussi $501 < 3\,440$

36 -
A : faux, les nombres 42, 36 et 24 étant divisibles par 3, le nombre $24 \times 42 + 4 \times 36 + 3 \times 24$ le sera aussi
B : faux, car 24×42 et 3×24 sont évidemment divisibles par 24 et $4 \times 36 = 4 \times 6 \times 6 = 24 \times 6$
C : faux, car, 24 et 42 étant tous deux divisibles par 3, leur produit 24×42 est divisible par $3 \times 3 = 9$; de même pour 3×24, 3 et 24 étant tous deux divisibles par 3 ; enfin 36 est multiple de 9, donc 4×36 également
E : vrai, car $24 \times 42 = 24 \times 3 \times 14 = 72 \times 14$
$4 \times 36 = 2 \times 2 \times 36 = 2 \times 72$
$3 \times 24 = 72$
D : faux, car on vient de voir que le nombre de places est divisible par 72
Remarque : on n'est pas obligé d'examiner les cinq propositions dans l'ordre où elles sont données et, si on a un peu de flair, on peut même voir d'emblée que la dernière est vraie.

37 – Pour les quatre premières propositions, il suffit en fait de faire les divisions euclidiennes par 42 des nombres donnés : le quotient donnera le nombre de rangées complètes et le reste la position sur la dernière rangée incomplète.
$317 = 42 \times 7 + 23$: il y a 7 rangées complètes et la place n° 317 est donc au 8ème rang
A est fausse.
$379 = 42 \times 9 + 1$: il y a 9 rangées complètes et la place n° 379 est la première du 10ème rang
B est fausse.
$463 = 42 \times 11 + 1$: il y a donc 11 rangées complètes et les places numérotées 463 et 464 sont sur le 12ème rang.
C est fausse.
$336 = 42 \times 8$, soit 8 rangées complètes : la place n° 336 est donc la dernière d'une rangée et la place n° 337 est donc la première de la rangée suivante ; elles ne sont donc pas côte à côte.
D est vraie.
On peut abstenir d'examiner la proposition E.
E : $1\,007 = 42 \times 23 + 41$: il y a 23 rangs complets et la place n° 1 007 est donc sur le 24ème et dernier rang du parterre.
E est fausse.

38 – Le nombre de carreaux de 30 cm × 30 cm (ou 0,3 m × 0,3 m) nécessaires pour carreler un rectangle de 11 m × 6 m est égal à (11/0,3) × (6/0,3) = 66/0,09 = 6600/9= 2200/3. Il faut ajouter 3 % de ce nombre, soit (3 × 22/3) = 22 carreaux. On obtient donc un total de (2200 + 66)/3 = 2266/3 carreaux. Or 755 < 2266/3 < 756 : il faut donc acheter 756 carreaux entiers, soit 756/12 = 63 boîtes de 12 carreaux.
Réponse : C.

39 – On peut procéder de deux façons :
- L'avion part de Paris le 6 mars à 20 h 37, heure de Paris, et arrive à Montréal 8 h 30 min plus tard, soit le 7 mars à 5 h 07, heure de Paris. C'est alors le 6 mars à 23 h 07 à Montréal.
- L'avion part de Paris le 6 mars à 20 h 37, heure de Paris, soit le 6 mars à 14 h 37, heure de Montréal ; il arrive à Montréal 8 h 30 min plus tard, soit le 6 mars à 23 h 07, heure de Montréal.

Réponse : E.

40 – Idem :
- L'avion se pose à Paris le 21 mars à 7 h 07, heure de Paris, et est parti de Montréal 8 h 30 min plus tôt, soit le 20 mars à 22 h 37, heure de Paris, donc le 20 mars à 16 h 37, heure de Montréal.
- L'avion se pose à Paris le 21 mars à 7 h 07, heure de Paris. C'est alors le 21 mars à 1 h 07 à Montréal. L'avion est donc parti de Montréal 8 h 30 min plus tôt, soit le 20 mars à 16 h 37, heure de Montréal.