Epreuve préalable d'admission en préparation au concours de professeurs des écoles
29 mars 2008

1 -
A : faux, ce nombre contient 3 108 225 centièmes
B: faux, ce nombre contient 31 082 unités
C : vrai, ce nombre contient 310 centaines
D : faux, c'est le chiffre des unités qui est 0
E : vrai, le premier chiffre après la virgule est bien 2

2 – Notons L la longueur du rectangle initial et l sa largeur.
L'aire du nouveau rectangle est égale à $(1{,}5\ L) \times (0{,}5\ l) = 0{,}75\ L \times l$, alors que l'aire du rectangle initial est égale à $L \times l$.
A : faux, car $0{,}75 \neq 1$
B : vrai, car $0{,}75 < 1$
Le périmètre du nouveau rectangle est égal à $2 \times 1{,}5\ L + 2 \times 0{,}5\ l = 3\ L + l$, alors que le périmètre du rectangle initial est égal à $2\ L + 2\ l$.
E : faux, puisque le rectangle initial n'est pas un carré (auquel cas on aurait $l = L$ et donc $3\ L + l = 2\ L + 2\ l$)
D : vrai, car $L > l$, donc $3\ L + l > 2\ L + 2\ l$
C : faux, puis qu'on vient de voir que le périmètre a diminué
Remarque : on n'est pas obligé d'examiner les propositions dans l'ordre où elles sont données.

3 -
B : $2 \times (2 + 3)^2 = 2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$

4 – Convertissons toutes les mesures données en cm (par exemple) :
$150\ mm \times 5\ dm \times 60\ cm = 15\ cm \times 50\ cm \times 60\ cm = (15 \times 50 \times 60)\ cm^3 = 45\ 000\ cm^3 = 45\ 000\ ml = 45\ l$
Réponse : E.

5 -
A : faux, car $2^9 + 2^9 = 2 \times 2^9 = 2^{10}$
B : vrai, car $2^9 \times 2^9 = (2 \times 2)^9$
C : vrai (voir A)
D : vrai, c'est la formule permettant de calculer le produit de deux puissances d'un même nombre
E : faux (voir A et C)

6 – Ce nombre s'écrit en chiffres : 32 000 097 052.
A : vrai
B : faux, il y en a 6
C : faux, il y en a 5
D : vrai
E : faux

7 – Si l'on considère les carreaux formés par quatre points,du quadrillage, l'aire grisée est constituée de : 4 carreaux entiers, 4 demi-carreaux, 2 moitiés de rectangles constitués de deux carreaux, soit en tout l'équivalent de 8 carreaux.
Réponse : B.

8 -
Les diviseurs positifs de 6 sont 1 (ne l'oublions pas), 2, 3 et 6 lui-même (ne l'oublions pas non plus),

dont la somme est bien 12.
Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12, dont la somme est $28 \neq 24$.
Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24, dont la somme est $60 \neq 48$.
Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28, dont la somme est $56 = 2 \times 28$.
L'affirmation étudiée est donc vraie pour les nombres 6 et 28. Comme on sait qu'il y a deux réponses, il n'est pas besoin d'examiner le dernier nombre proposé. Faisons-le quand même ici.
Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36, dont la somme est $91 \neq 72$.
Réponses : A et D.

9 – Le mieux est de simplifier ce calcul en utilisant le fait que diviser par un nombre rationnel revient à multiplier par son inverse :
½ : (¾ : (5/4 : (5/6))) = ½ : (¾ : (5/4 × 6/5) = ½ : (¾ : (5 × 6)/(4 × 5)) = ½ : (¾ : 6/4) = ½ : (¾ : 3/2) = ½ : (¾ × 2/3) = ½ : ((3 × 2)/(4 × 3)) = ½ : 2/4 = ½ : ½ = 1
Réponse : C.

10 – Là aussi on commence par simplifier en réduisant les deux derniers termes au même dénominateur :
2 + ¼ + 6/5 = 2 + 5/20 + 24/20 = 2 + 29/20
On voit donc déjà que la réponse D est vraie et également que la réponse A est fausse, puisque 29/20 > 1 et 7/9 < 1.
On continue la simplification : 2 + 29/20 = 40/20 + 29/20 = 69/20 = (69 × 5)/(20 × 5) = 345/100 = 3,45 (on peut aussi obtenir ce résultat en posant la division de 69 par 20).
On voit donc ici que la réponse E est fausse et que la réponse C est vraie (l'écriture décimale de ce nombre comporte une partie décimale finie).
La réponse B est également vraie, puisque ce nombre peut s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers.
Réponses : B, C et D.

11 – Le nombre 10 figure parmi les nombres compris entre 1 et 2008. Le nombre obtenu comporte donc un nombre entier de dizaines. Il se termine donc nécessairement par un zéro.
Réponse : A.

12 - Le nombre 100 figure parmi les nombres compris entre 1 et 2008. Le nombre obtenu comporte donc un nombre entier de centaines. Il se termine donc nécessairement par deux zéros.

13 – Le périmètre d'un carré est égal à quatre fois la longueur de ce carré. Cette longueur est donc ici égale à 120/4 = 30 m.
Chacun des trois rectangles superposables découpés dans le carré a donc une longueur de 30 m et une largeur de 30/3 = 10 m. Son périmètre est donc égal à 2 × 30 + 2 × 10 = 60 + 20 = 80 m.
Réponse : E.

14 – 1 000 000 correspond à 1 000 000/500 = 1000 × (1 000/500) = 2 000 fois 500 feuilles.
L'épaisseur d'une ramette d'un million de feuilles serait donc 2 000 fois l'épaisseur d'une ramette de 500 feuilles soit 2 000 × 5 = 10 000 cm = 100 m.
Réponse : D.

15 – 90 % des élèves jouent au basket ou au tennis (ceux qui font les deux étant inclus dans ce total). Il reste donc 10 % d'élèves qui ne jouent ni au basket, ni au tennis.
Réponse : B.

16 – La moitié de l'huile contenue dans le bidon correspond donc à une masse de 9 kg. Il y a donc 18 kg d'huile dans le bidon plein.

Du fait que 10 cl pèsent 90 g, on déduit que 1 l (= 100 cl d'huile) pèse 900 g. Donc 9 kg d'huile représentent un volume de 10 l et les 18 kg d'huile contenus dans le bidon plein représentent un volume de 20 l.
Réponse : D.

17 – La somme des aires des trois terrains est égale à 1 200 + 8 000 + 800 = 10 000 m².
Le premier terrain correspond donc à 1 200/10 000 = 12/100 = 12 % du total.
Le deuxième terrain correspond à 8 000/10 000 = 80/100 = 80 % du total.
Le troisième terrain correspond à 800/10 000 = 8/100 = 8 % du total.
1 % de 1 800 € étant égal à 18 €, le premier voisin paiera donc 12 × 18 = 216 €.
On voit donc déjà que la seule réponse possible est la réponse D.
On peut vérifier que le second voisin paie 80 × 18 = 1 440 € et le troisième 8 × 18 = 144 €.
Réponse : D.

18 – Le nombre 10^{32} est un nombre de 33 chiffres dont le premier est 1 et les suivants 32 zéros. Si l'on enlève 32 à ce nombre, on obtiendra un nombre de 32 chiffres avec 68 sur les deux derniers chiffres et des 9 sur les 30 premiers chiffres (faites 1 000 – 32 ou 10 000 – 32 pour vous en convaincre).
La somme des chiffres de ce nombre sera donc égale à 30 × 9 + 6 + 8 = 270 + 14 = 284.
Réponse : B.

19 -
A : vraie, une hauteur est une droite passant par un sommet d'un triangle et perpendiculaire au côté opposé, donc (BH) qui passe par B et qui est perpendiculaire au côté [AC] est une hauteur du triangle ABC
B : faux, si tel était le cas, la droite (CH) étant perpendiculaire à (BH) serait aussi perpendiculaire à (CK) et la droite (BK) étant perpendiculaire à (CK) serait aussi perpendiculaire à (BH) (en vertu du résultat selon lequel une droite perpendiculaire à une droite donnée est aussi perpendiculaire à toute droite parallèle à celle-ci) ; le quadrilatère BKCH serait alors un rectangle (ayant quatre angles droits) et ses côtés(BK) et (CH) serait donc parallèles, ce qui n'est pas le cas, puisque ces deux droites se coupent en A
C : vraie, car les sommets d'un triangle rectangle sont sur le cercle de diamètre l'hypoténuse de ce triangle rectangle (i.e. le côté opposé à l'angle droit) : ici, le triangle BCH étant rectangle en H, le point H est sur le cercle de diamètre le segment [BC] et de même, le triangle BCK étant rectangle en K, le point K appartient au cercle de diamètre [BC] ; les quatre points B, C, H et K sont donc tous sur le cercle de diamètre [BC]
D : vraie, car (CK) passe par C sommet du triangle ABC et est perpendiculaire au côté opposé (AB) de ce triangle
E : faux, les triangles BHA et BHC n'étant pas symétriques, les angles ABH et CBH ne sont pas de même mesure

20 – Le temps total mis par ces trois employés pour réaliser ce travail est donc égal à 3 fois 9 h 45 min, soit 27 h et 135 min, donc 29 h et 15 min.
Cinq employés mettront donc, pour accomplir la même quantité de travail, chacun 29 h 15 min divisées par 5, soit 5,8 h et 3 min, donc 5 h 48 min + 3 min = 5 h 51 min.
Autres méthodes possibles :
- on peut convertir 29 h 15 min en minutes : on obtient 29 × 60 + 15 = 1755 min ; chacun des cinq employés travaille donc 1755/5 = 351 min = 5 h 51 min
- on peut raisonner en disant qu'un nombre d'employés 5/3 fois plus important accomplira le même travail en 5/3 fois moins de temps ; le temps mis par cinq employés sera donc égal aux 3/5 du temps mis par trois employés et 3/5 de 9 h 45 min = 3/5 de (9 × 60 + 45) = 585 min = 3 × 585/5 = 3 × 117 = 351 min = 5 h 51 min

Réponse : B.

21 – L'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon, donc de son diamètre. L'aire d'un disque de 3,2 cm de diamètre est donc $3{,}2^2$ 10,24 fois plus grande que l'aire d'un disque de 1 cm de diamètre. Ce disque de 3,2 cm de diamètre représente donc une population de $10{,}24 \times 5\,000 = 51\,200$ habitants.
Réponse : D.

22 – Raisonnons par exemple à partir d'un prix initial de 100. Après la première augmentation de 25 %, le prix est de 100 + 25 % de 100 = 100 + 25 = 125. Après la deuxième augmentation de 28 %, le prix sera de 125 + 28 % de 125 = $125 + 28\times125/100 = 125 + 7\times4\times25\times5/100 = 125 + 7\times100\times5/100 = 125 + 7 \times 5 = 125 + 35 = 160$. L'augmentation totale est donc de 60 % et le prix initial représente $100/160 = 0{,}625$ = 62,5 % du prix final.
Réponses : A et E.

23 -
A : faux, APCQ est plus petit que ABCD
B : vrai, on a enlevé les triangles ADQ et BCP, moitiés respectives des parallélogrammes APQD et BCQP, soit au total la moitié du parallélogramme ABCD (on peut aussi utiliser la formule qui donne l'aire d'un parallélogramme : $b \times h$, où b est la base du parallélogramme et h sa hauteur, et constater que le parallélogramme APCQ a la même hauteur que ABCD et que sa base DQ est la moitié de DC).
C : faux, l'angle PAQ a toujours une mesure strictement inférieure à celle de l'angle PAD, donc si ce dernier est droit, le premier ne peut l'être
D : faux, on peut partir de APCQ carré et construire les points B et D de façon à ce que les triangles ADQ et BCP soient rectangles isocèles en P et Q respectivement (il suffit tout simplement de prolonger les côtés [AP] et [CQ] au-delà de P et Q d'une longueur égale à AP = CQ)
E : vrai, les côtés opposés [AB] et [CD] du parallélogramme ABCD étant parallèles et de même longueur, les côtés opposés [AP] et [CQ] du parallélogramme APCQ sont également parallèles et de même longueur = AB/ 2 (= CD/2)

24 – En réduisant au même dénominateur les deux termes du membre de droite de l'égalité proposée, on obtient : $(3 – 4x)/4x = 2/3x$.
On simplifie alors par x les deux membres de cette égalité : $(3 – 4x)/4 = 2/3$
On écrit alors le produit en croix : $3(3 – 4x) = 2\times4$
$9 – 12x = 8$
$12x = 9 – 8 = 1$
$x = 1/12$
Réponse : D.

25 – Pour connaître les deux derniers chiffres de cette somme, il suffit d'additionner les deux derniers chiffres de ces 60 nombres, les chiffres précédents représentant au minimum des centaines. On se retrouve donc à calculer $1 + 59 \times 11 = 1 + 649 = 650$. Le chiffre des dizaines cherché est donc 5.
Réponse : C.

26 – Tous les angles d'un triangle équilatéral ont une mesure égale à 60°.
La mesure de l'angle CBE est égale à la différence entre celle de l'angle ABE et celle de l'angle ABC, soit 90 – 60 = 30°.
L'angle EBD mesurant 60°, l'angle CBD a donc une mesure égale à la somme des mesures des angles CBE et EBD, soit 30 + 60 = 90°.
Bien que ce ne soit pas clairement dit dans l'énoncé, on suppose que les mesures des côtés des deux

triangles équilatéraux ABC et BDE sont égales, faute de quoi on ne peut rien conclure. On a alors BC = BD et le triangle BCD est donc isocèle en B. Les angles BCD (c'est à dire x) et BDE sont donc de même mesure et, la somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à 180°, cette mesure commune est égale à (180 – mes(CBD))/2 = (180 – 90)/2 = 90/2 = 45°.
Réponse : B.

27 – Le trajet de la fourmi peut être modélisé comme suit (les lettres majuscules indiquant les sommets du cube et les lettres minuscules indiquant la gauche ou la droite) :
H D d C g B g A d E g H d G
Réponse : E.

28 – C'est non seulement le mobile dans son ensemble qui est en équilibre, mais aussi chacune de ses sous-parties.
Si on considère la petite barre à droite, elle est équilibrée par deux objets ronds dont on sait que l'un pèse 30 g. L'autre objet rond pèse donc aussi 30 g.
Ces deux objets ronds équilibre l'objet trapézoïdal accroché à leur gauche, qui pèse donc 60 g.
L'ensemble des objets accrochés sur la partie droite du mobile ont donc une masse totale de 120 g. Il en est donc de même de l'ensemble des objets accrochés sur la partie gauche du mobile. Les deux objets carrés et les deux objets en forme de coeur ont donc ensemble une masse de 120 g. Si on suppose que les objets de même forme ont la même masse, on peut dons en déduire qu'un objet carré et un objet en forme de coeur pèsent ensemble 60 g.
On remarque que, un objet en forme de coeur étant accroché directement à la barre de moyenne longueur de la partie gauche, les objets accrochés aux deux petites barres s'équilibrent. Les deux objets carrés ont donc la même masse qu'un objet en forme de coeur.
On sait donc qu'un objet carré pèse deux fois moins qu'un objet en forme de coeur et que les deux réunis pèsent 60 g. L'objet en forme de coeur pèse donc 40 g et l'objet carré 20 g.
Réponse : D.

29 -
A : faux, si on place N au milieu de [CD], l'aire du triangle ADN sera le quart de l'aire du carré ABCD
L'aire du carré est égale à $CD \times AD = AD^2$ et l'aire d'un triangle est donnée par la formule $(b \times h)/2$ où b est la base du triangle et h sa hauteur.
Si CN = 1/3 CD, l'aire du du triangle ADN est alors égale à $(DN \times AD)/2 = (2/3\ CD \times AD)/2 = (CD \times AD)/3 = AD^2/3$, soit le tiers de l'aire du carré ABCD.
On prouve de même que, si CM = 1/3 CB, l'aire du triangle ABM est le tiers de l'aire du carré ABCD.
La bonne réponse est donc B.

30 – On raisonne par rapport au sens selon lequel est représenté l'assemblage initial.
A : peut être obtenu en enlevant le cube du haut et en le posant devant à droite de façon à former un carré au sol ; l'assemblage est ensuite vu depuis l'arrière
B : peut être obtenu en enlevant le cube du haut et en le posant derrière à gauche : l'assemblage est alors vu de l'arrière en tournant la tête vers la droite
C : On enlève le cube situé derrière à droite et on le place sous les trois cubes disposés verticalement ; l'assemblage obtenu est ensuite vu depuis la droite
D : on enlève le cube situé derrière à droite et on le place devant contre le cube du milieu ; l'assemblage est alors vu de face en penchant la tête vers la droite
E : on ne peut obtenir une telle croix en déplaçant un seul cube de l'assemblage initial
Réponse : E.

31 – Le volume de jus d'orange dans le premier verre sphérique, et donc aussi dans les deux autres,

est égal à $V = 2/3\ \pi\ R^3$, avec R = 4,5 cm.
Le volume dans le second verre cylindrique est donc $V = \pi\ R^2\ h$, avec les mêmes valeurs de V et R que ci-dessus. On en déduit donc que $2/3\ \pi\ R^3 = \pi\ R^2\ h$, soit $2/3\ R = h$ et donc $h = 2/3 \times 4{,}5 = 3$ cm.
Le volume dans le troisième verre conique est $V = 1/3\ \pi\ R^2\ H$ avec toujours les mêmes valeurs de V et R que ci-dessus. On en déduit que $2/3\ \pi\ R^3 = 1/3\ \pi\ R^2\ H$ et donc $2\ R = H$, soit $H = 2 \times 4{,}5 = 9$ cm.
Réponse : B.

32 –
A : faux, la somme des âges serait de 30 ans
B : faux, car Alex est plus âgé que Basile (il lui dit « lorsque j'avais ton âge »)
D : faux, si Basile a 16 ans, Alex en a 12 et on retrouve la proposition B
E : faux, car A lex est plus âgé que Basile
La bonne réponse doit donc être la C. Vérifions-le.
Si Alex a 16 ans, la somme de leurs âges étant de 28 ans, Basile a donc 12 ans. Ils ont donc quatre ans d'écart et quand Alex avait l'âge de Basile, soit 12 ans, Basile avait donc 8 ans. Or Alex a bien maintenant $2 \times 8 = 16$ ans.
La réponse c est donc bien la bonne.

33 – Considérons le triangle ACH. Ses côtés sont tous trois des diagonales de faces du cube, elles sont donc toutes trois de même longueur. Le triangle ACH est donc un triangle équilatéral. Ses trois angles aux sommets sont donc tous de mesure 60°.
Réponse : C.

34 – Le triangle formé par le bas du mur et les deux extrémités de l'échelle est un triangle rectangle. Le centre du cercle circonscrit à ce triangle se trouve donc au milieu de son hypoténuse (car un triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle de diamètre le côté opposé au sommet de l'angle droit), donc au milieu de l'échelle. Le point M milieu de l'échelle se trouve donc toujours, par rapport au bas du mur, à une distance constante égale à la moitié de la longueur de l'échelle. Il décrit donc un cercle de centre le bas du mur.
Réponse : A.

35 – Le chemin le plus court pour aller de B à h en restant sur la surface du cube utilise la diagonale d'une face et une arête, dans l'ordre que l'on veut.
L'arête mesure donc a et la diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$ (utiliser Pythagore pour s'en convaincre : si d est la longueur de la diagonale, on $d^2 = a^2 = a^2 = 2a^2$, donc $d = \sqrt{(2a^2)} = \sqrt{2} \times a$).
La longueur du trajet parcourue par la fourmi est donc $a + a\sqrt{2}$.
Réponse : A.

36 – La surface du champagne étant parallèle au plan du bord du verre, on peut utiliser le théorème de Thalès dans un triangle correspondant à une section verticale du verre.
La hauteur de champagne étant égale à la moitié de la hauteur du verre (partie conique seulement bien sûr), le rayon du disque formé par la surface du champagne sera donc aussi la moitié du rayon du bord du verre.
Le volume du verre est donné par la formule $V = 1/3\ \pi\ R^2\ h$ (voir question 31) où R et h sont respectivement le rayon et la hauteur du verre.
Le volume de champagne est donc égal à $V' = 1/3\ \pi\ (R/2)^2\ (h/2) = 1/3\ \pi\ (R^2/2^2)\ (h/2) = (1/3\ \pi\ R^2\ h)/8 = V/8$.
Comme on sait que le volume du verre est de 8 cl, le volume de champagne est donc de 1 cl = 10 ml.
Réponse : C.

37 – Pour passer du premier au second carré, on rajoute $2 \times 4 = 8$ allumettes.
Pour passer du 2^{nd} au 3ème carré, on rajoute $3 \times 4 = 12$ allumettes.
Pour passer du 30ème au 31ème carré, on devra donc rajouter $31 \times 4 = 124$ allumettes.
Réponse A.

38 – La seule chose fixe dans tout cela est la distance entre les deux villes. Notons-la D (en km).
L'aller étant parcouru à une vitesse de 30 km/h, le temps mis pour parcourir l'aller est donc égal à D/30 (en h).
Le retour étant parcouru à une vitesse de 20 km/h, le temps mis pour parcourir le retour est donc égal à D/20 (en h).
Le temps total mis pour effectuer le trajet aller-retour est donc égal à $T = D/30 + D/20$.
La vitesse moyenne sur le trajet aller-retour est alors obtenue en divisant la distance totale 2D par ce temps total T, soit $V_m = 2D/T = 2D/(D/30 + D/20) = 2/(1/30 + 1/20)$.
On a donc $V_m/2 = 1/(1/30 + 1/20)$ et donc $2/V_m = 1/30 + 1/20$.
La réponse B est donc vraie.
Poursuivant le calcul, on obtient $2/V_m = 1/30 + 1/20 = 2/60 + 3/60 = 5/60 = 1/12$. Donc $V_m/2 = 12$ et enfin $V_m = 24$ km/h.
Réponses : B et E.

39 – Le plus simple est d'écrire et d'examiner une par une toutes les fractions plus petites que 1 dont le dénominateur est un nombre entier compris entre 1 et 8. Sont indiquées en **gras** celles qui sont comprises strictement entre 1/3 et 4/5.
1/1
½, 2/2
1/3, **2/3**, 3/3
¼, **2/4**, ¾, 4/4
1/5, **2/5**, **3/5**, 4/5, 5/5
1/6, 2/6, **3/6**, **4/6**, 5/6, 6/6
1/7, 2/7, **3/7**, **4/7**, **5/7**, 6/7, 7/7
1/8, 2/8, **3/8**, **4/8**, **5/8**, **6/8**, 7/8, 8/8
Mais 2/4 = ½, 3/6 = ½, 4/6 = 2/3, 4/8 = ½, 6/8 = ¾. Il convient donc de ne pas en prendre en compte les fractions ci-dessus indiquées en rouge.
Il reste donc 10 fractions distinctes.
Réponse : C.

40 -
E : faux, on pourrait en effet répondre alors ni A, ni B et une seule des réponses C et D serait vraie, or il y a deux bonnes réponses.
A : faux, si tel était le cas, la deuxième balance ne serait pas équilibrée.
Une seule des réponses C et D étant vraie, la réponse B doit donc être vraie pour qu'il y ait deux réponses vraies en tout.
B est donc vraie.
Si c'est la bille c qui est différente des autres, elle est plus légère que celles-ci puisque les balances où elle apparaît (la première et la troisième) penchent toutes deux du côté opposé à elle.
D est donc vraie et C est fausse.
Les réponses correctes sont donc B et D.