TLM046V (équations différentielles) • Année 2008/2009 • Série d'exercices n°1

Les exercices facultatifs, repérés par le symbole ♡, ne seront a priori pas traités en TD.

Rappels : si f est une fonction **continue** d'un intervalle I dans un e.v.n. E de dimension finie alors
- pour tout $a \in I$ la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(s)\,ds$ est de classe C^1 sur I et $F' = f$ sur I
- pour tous $a, b \in I$, $a \leq b \Rightarrow \left\| \int_a^b f(s)\,ds \right\| \leq \int_a^b \|f(s)\|\,ds$ ("inégalité de la moyenne")
- si $f \in C^1(I)$ alors : $\forall a, b \in I$, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)\,ds$ ("théorème fondamental" du calcul différentiel).

1.1. *(démonstration du lemme de Gronwall - forme élémentaire)*

Soit $T \in]0, +\infty]$. $[0, T)$ désignera l'un des intervalles $[0, T]$ et $[0, T[$.

On considère deux fonctions y et φ continues, positives de $[0, T)$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un réel $C \geq 0$ pour lequel :

$$(\bigstar) \qquad \forall t \in [0, T),\ 0 \leq y(t) \leq C + \int_0^t \varphi(s) y(s)\,ds.$$

On se propose de vérifier qu'alors :

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \forall t \in [0, T),\ 0 \leq y(t) \leq C\, e^{\int_0^t \varphi(s)ds}.$$

1) On suppose ici que $C > 0$.

Vérifier que la fonction $A : t \mapsto \int_0^t \varphi(s) y(s) ds$ est de classe C^1 sur $[0, T)$ et : $\forall u \in [0, T)$, $\dfrac{A'(u)}{C + A(u)} \leq \varphi(u)$.

Intégrer cette relation et en déduire $(**)$ dans ce cas.

2) On suppose ici que $C = 0$. Déduire du résultat de 1) que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T),\ 0 \leq y(t) \leq \frac{1}{n+1}\, e^{\int_0^t \varphi(s)ds}$. En déduire $(**)$ dans ce cas.

♡1.2. Soit $q : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement positive et croissante.

1) On considère une solution y sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + q(t) y = 0$$

i.e. une fonction deux fois dérivable de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall s \in [0, +\infty[,\ y''(s) + q(s) y(s) = 0$.
i) Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[,\ y'^2(t) = y'(0) + 2 \int_0^t q(s) y(s) y'(s)\,ds$.
ii) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall t \in [0, +\infty[,\ y'^2(t) + q(t) y^2(t) = C + \int_0^t q'(s) y(s)\ ds$ où $C = y'(0) + q(0) y(0)^2$.
iii) En déduire, à l'aide du lemme de Gronwall : $\forall t \in [0, +\infty[,\ q(t) y^2(t) \leq C\, e^{\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}\,ds}$.
2) Montrer que toute solution de (E) sur $[0, +\infty[$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

1.3. *(une forme "plus évoluée" du lemme de Gronwall)*

Soit $T \in]0, +\infty]$. $[0, T)$ désignera l'un des intervalles $[0, T]$ et $[0, T[$.

On considère trois fonctions y, θ et φ continues de $[0, T)$ dans $\mathbb{R}$ telles que φ est **positive** sur $[0, T)$ et

$$(\clubsuit) \qquad \forall t \in [0, T),\ y(t) \leq \theta(t) + \int_0^t \varphi(s) y(s)\,ds.$$

On se propose de vérifier qu'alors :

$$(\clubsuit\clubsuit) \qquad \forall t \in [0, T),\ y(t) \leq \theta(t) + \int_0^t \theta(s)\varphi(s). \exp\left(\int_s^t \varphi(u)\,du\right) ds.$$

1) Montrer que les fonctions $F : t \mapsto \int_0^t \varphi(u)y(u)du$ et $G : t \mapsto F(t)\exp(-\int_0^t \varphi(u)du)$ sont de classe C^1 sur $[0,T)$ et vérifient

$$\begin{aligned}
(1)\ \forall s &\in [0,T)\,,\ F^{'}(s) - \varphi(s)F(s) \leq \theta(s)\varphi(s),\\
(2)\ \forall s &\in [0,T)\,,\ G^{'}(s) \leq \theta(s)\varphi(s).\exp(-\int_0^s \varphi(u)\,du),\\
(3)\ \forall t &\in [0,T)\,,\ G(t) \leq \int_0^t \theta(s)\varphi(s).\exp(-\int_0^s \varphi(u)\,du)\,ds.
\end{aligned}$$

2) Conclure.
♡ 3) Retrouver le résultat de l'exercice 1.1.

1.4. *(une autre forme du lemme de Gronwall, notamment utile en analyse numérique)*

On considère un e.v.n. E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $T \in \,]0, +\infty]$. $[0,T)$ désignera l'un des intervalles $[0,T]$ et $[0,T[$.
On considère une fonction $y : [0,T) \to E$ de classe C^1 sur $[0,T)$ et deux réels $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ tels que

$$(\blacktriangle) \qquad \forall t \in [0,T)\,,\ \left\| y^{'}(t) \right\| \leq \beta + \alpha \left\| y(t) \right\|.$$

On se propose de vérifier qu'alors :

$$(\blacktriangle\blacktriangle) \qquad \forall t \in [0,T)\,,\ \left\| y(t) \right\| \leq \left\| y(0) \right\| e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right).$$

1) Montrer que :

$$\forall t \in [0,T)\,,\ \left\| y(t) - y(0) \right\| \leq \beta t + \alpha \int_0^t \left\| y(s) \right\| ds.$$

2) En déduire, à l'aide de l'exercice 1.3, que

$$\forall t \in [0,T)\,,\ \left\| y(t) \right\| \leq \left\| y(0) \right\| + \beta t + \alpha \int_0^t \left(\left\| y(0) \right\| + \beta s\right) e^{\alpha(t-s)} ds.$$

3) Conclure en calculant cette dernière intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

1.5. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad t^2 y^{'} + |t|\,y = \tfrac{(t+|t|)}{2}\sin t.$$

On admettra provisoirement que la théorie permet d'assurer l'existence de solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ mais ne permet pas de prévoir a priori s'il existe des solutions sur $]-\infty, +\infty[$.

1)i) Vérifier que sur $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle (E) peut se mettre sous la forme : $\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{t}\right) = 0$.
En déduire que les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ vérifient : $\exists a \in \mathbb{R}, \forall t \in \,]-\infty, 0[\,,\ y(t) = at$.
ii) Vérifier que sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E) peut se mettre sous la forme : $\frac{d}{dt}\left(ty(t)\right) = \sin t$.
En déduire la forme des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

2)i) Montrer que **si** il existe une solution y de (E) sur $]-\infty, +\infty[$ **alors** y est continue et dérivable sur $]-\infty, +\infty[$ et il existe deux réels a et b tels que

$$(*) \qquad y(t) = \begin{cases} at \text{ si } t < 0 \\ y(0) \text{ si } t = 0 \\ \frac{b - \cos t}{t} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

En étudiant la continuité et la dérivabilité de la fonction donnée par $(*)$ montrer que **si** il existe une solution y de (E) sur $]-\infty, +\infty[$ **alors** elle vérifie

$$(**) \qquad y(t) = \begin{cases} -t/2 \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{1 - \cos t}{t} \text{ si } t > 0 \end{cases}.$$

ii) Réciproquement montrer que la fonction donnée par $(**)$ est bien une solution de (E) sur $]-\infty, +\infty[$.

3) Trouver les solutions maximales de (E).