Université de Pau et des Pays de l'Adour — Année 2008-2009
Département de Mathématiques

Mathématiques générales 3
Série n°1

Exercice 1

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1-4x^2}$;
2. $\tan^3 x$, (indication : $\tan^3 x = (1+\tan^2 x)\tan x - \tan x)$;
3. $\sin 4x \cos 2x$;
4. $\cos x \cos 3x$, (indication : on pourra écrire le cosinus sous forme d'exponentielles complexes ou faire une intégration par parties) ;
5. $\dfrac{x+1}{4x^2+4x+1}$.

Exercice 2

En intégrant par parties, calculer les intégrales :

$$\textbf{a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx, \quad \textbf{b)} \int_0^1 \arcsin x dx, \quad \textbf{c)} \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x) dx, \quad \textbf{d)} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{\arcsin(x)} dx.$$

Exercice 3

En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales :

$$\textbf{a)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \quad \textbf{b)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}, \quad \textbf{c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}, \quad \textbf{d)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\tan^2 x}.$$

Exercice 4
Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos x}{(1+\sin x)(3+\sin^2 x)}dx.$$

Exercice 5
Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2x+\sqrt{4-x^2}}.$$

On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. En posant $x = 2\sin t$ comme changement de variable, montrer que I s'écrit comme l'intégrale d'une fonction de $\sin t$ et de $\cos t$.
3. Effectuer un nouveau changement de variable pour se ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle classique.
4. Déterminer la valeur de I.

Exercice 6
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $W_n > 0$, et montrer que $(W_n)_n$ converge.
2. Calculer W_0 et W_1.
3. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, exprimer W_n en fonction de W_{n-2}.
4. En déduire, pour tout entier naturel p, les valeurs de W_{2p} et W_{2p+1}.

Exercice 7
A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 n^2 x^n \ln x dx.$$