

Mathématiques Générales 3  
TD n° 3

**Exercice 1**

Le taux d'alcoolémie  $\varphi(t)$  en (g/litre) d'une personne ayant absorbée à jeun une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle

$$(E) : y'(t) + y(t) = ae^{-t},$$

où  $t$  est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et  $a$  est une constante qui dépend des conditions expérimentales.

- (1) Calculer la solution générale de l'équation (E).
- (2) Donner l'expression de  $\varphi(t)$  en fonction de  $a$  et  $t$ .
- (3) On pose  $a = 5$ . Déterminer le taux d'alcoolémie maximum et le temps au bout duquel il est atteint. Donner le délai (à une heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 g/l.

**Exercice 2**

On considère l'équation différentielle (Equation de Gompertz)

$$(G) : y'(t) = -ay(t) \ln \frac{y(t)}{K}$$

où  $K > 0$  et  $a$  sont des constantes. Elle modélise l'évolution d'une population (autorégulée). On pose  $z(t) = \ln \frac{y(t)}{K}$ . Montrer que  $z(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$(E) : z'(t) + az(t) = 0.$$

Donner la solution générale de (E) puis celle de (G). Calculer la solution  $y(t)$  de (G) vérifiant la condition initiale  $y(0) = N$ . Calculer la limite de  $y(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 3**

- (1) Trouver les réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{1+t^2}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt}{t^2-1}$ .
- (2) Sur  $]1, +\infty[$ , intégrer l'équation :

$$y' - \frac{1+t^2}{t(t^2-1)}y = 2.$$

**Exercice 4**

Intégrer les équations suivantes :

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y'' + 2y' + y = 0, \quad y'' + 2y' + 5y = 0.$$

**Exercice 5**

Intégrer l'équation suivante :

$$y'' - y = \frac{1}{e^t + e^{-t}}.$$

(Indication : on pourra chercher une solution particulière de la forme  $\theta(t) = A(t)e^t + B(t)e^{-t}$  telle que  $A'(t)e^t + B'(t)e^{-t} = 0$ ).