INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Compléments sur les fonctions

Aimé Lachal

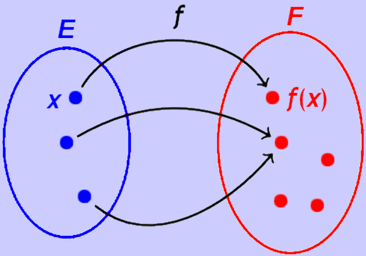
Cours de mathématiques
1^er^ cycle, 1^re^ année

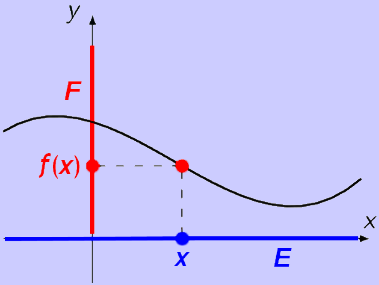
Sommaire

Sommaire

Définition 1.1 (Applications/Fonctions)

1. *Une **application** f d'un ensemble E dans un ensemble F est une correspondance qui à tout élément x de E associe un élément noté $f(x)$ appartenant à F.*
   - *Les ensembles E et F sont respectivement appelés **ensemble de départ** et **ensemble d'arrivée** de l'application f.*
   - *Pour tout élément $x \in E$, l'élément $f(x)$ est **l'image** de x par f.*

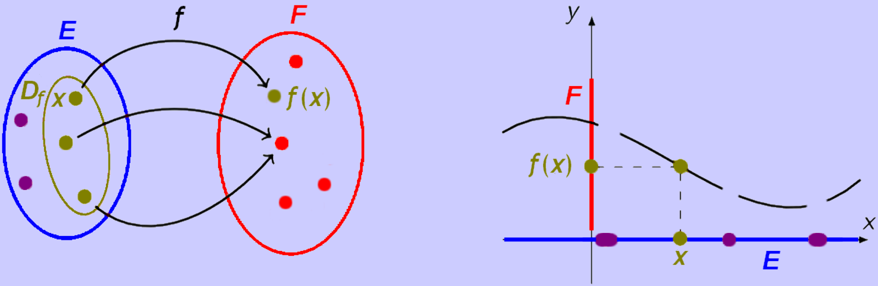




Définition 1.1 (Applications/Fonctions)

2. *Une **fonction** f de E dans F est une application d'une partie $\mathcal{D}_f$ d'un ensemble E dans un ensemble F. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est alors appelé **ensemble de définition** de la fonction f.*
*En d'autres termes, une **fonction** de E dans F est une correspondance qui à tout élément de E associe **au plus** un élément de F.*

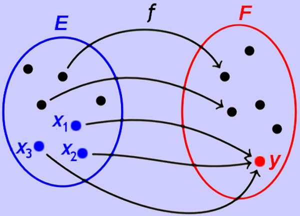
   - *Les ensembles E et F sont respectivement appelés **ensemble de départ** et **ensemble d'arrivée** de la fonction f.*
   - *Pour tout élément $x \in \mathcal{D}_f$, l'élément $f(x)$ est **l'image** de x par f.*

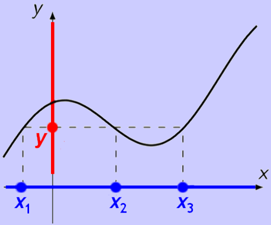


Définition 1.2 (Antécédents)

Soit $f : E \to F$ une fonction.

1. *Pour tout élément $y \in F$, s'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$, l'élément x est* ***un antécédent*** *de y par f.*

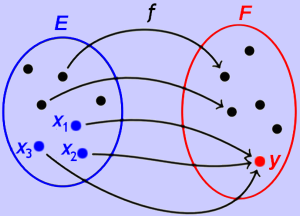


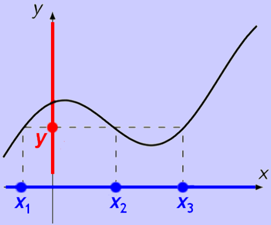


Définition 1.2 (Antécédents)

Soit $f : E \to F$ une fonction.

1. *Pour tout élément $y \in F$, s'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$, l'élément x est **un antécédent** de y par f.*



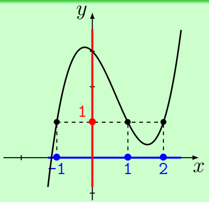


Exemple 1.3

Soit l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)(x-1)(x-2)+1 \end{array}$.

Les antécédents de 1 sont $-1, 1, 2$:

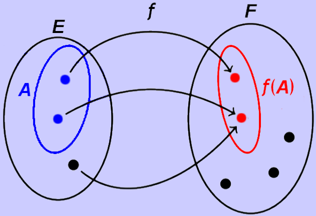
$$f(-1) = f(1) = f(2) = 1.$$

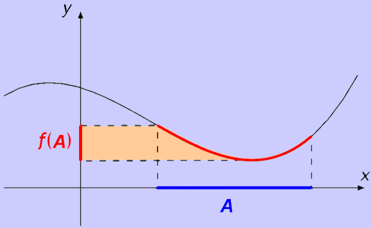


Définition 1.4 (Image directe)

Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E.

2. *L'**image directe** de A par f est l'ensemble noté $f(A)$ constitué des images par f des éléments de A :* $$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

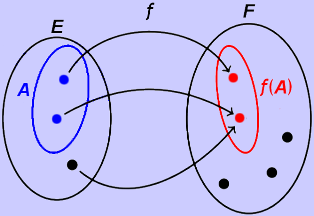


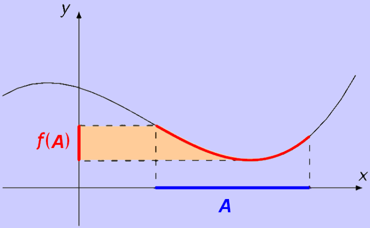


Définition 1.4 (Image directe)

Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E.

2. *L'**image directe** de A par f est l'ensemble noté $f(A)$ constitué des images par f des éléments de A :* $$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

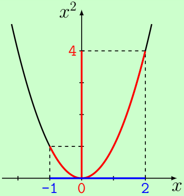




Exemple 1.5 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

On a $f([-1, 2]) = [0, 4]$.

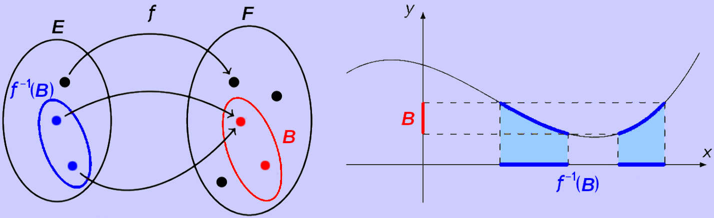


Définition 1.6 (Image réciproque)

Soit $f : E \to F$ une application et B une partie de F.

3. *L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ constitué des antécédents par f des éléments de B :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

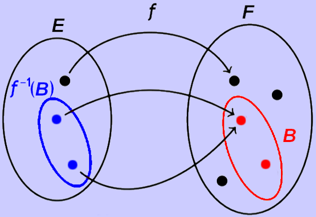


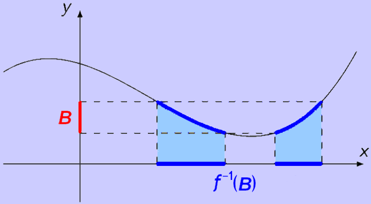
Définition 1.6 (Image réciproque)

Soit $f : E \to F$ une application et B une partie de F.

③ *L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ constitué des antécédents par f des éléments de B :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

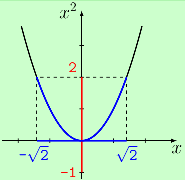




Exemple 1.7 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

On a $f^{-1}([-1, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.



Définition 1.8 (Restriction/Prolongement)

Soit une application $f : E \to F$.

1. *Si A est une partie de E, on appelle **restriction** de f à A l'application de A dans F, notée $f_{|A}$, définie par $\forall\, x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$;*

Définition 1.8 (Restriction/Prolongement)

Soit une application $f : E \to F$.

1. *Si A est une partie de E, on appelle **restriction** de f à A l'application de A dans F, notée $f_{|A}$, définie par $\forall\, x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$;*
2. *Si G est un ensemble contenant E, on appelle **prolongement** de f à G toute application g de G dans F dont la restriction à E est f : $g_{|E} = f$.*

Définition 1.8 (Restriction/Prolongement)

Soit une application $f : E \to F$.

1. *Si A est une partie de E, on appelle **restriction** de f à A l'application de A dans F, notée $f_{|A}$, définie par $\forall\, x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$;*
2. *Si G est un ensemble contenant E, on appelle **prolongement** de f à G toute application g de G dans F dont la restriction à E est f : $g_{|E} = f$.*

Exemple 1.9

On considère la **fonction** $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \end{array}$

Définition 1.8 (Restriction/Prolongement)

Soit une application $f : E \to F$.

1. *Si A est une partie de E, on appelle* ***restriction*** *de f à A l'application de A dans F, notée $f_{|A}$, définie par $\forall\, x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$;*
2. *Si G est un ensemble contenant E, on appelle* ***prolongement*** *de f à G toute application g de G dans F dont la restriction à E est f : $g_{|E} = f$.*

Exemple 1.9

On considère la **fonction** $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \end{array}$

- **Ensemble de définition** de f :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

Définition 1.8 (Restriction/Prolongement)

Soit une application $f : E \to F$.

1. *Si A est une partie de E, on appelle* ***restriction*** *de f à A l'application de A dans F, notée $f_{|A}$, définie par $\forall\, x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$;*
2. *Si G est un ensemble contenant E, on appelle* ***prolongement*** *de f à G toute application g de G dans F dont la restriction à E est f : $g_{|E} = f$.*

Exemple 1.9

On considère la **fonction** $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \end{array}$

- **Ensemble de définition** de f :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

- La **restriction** $\varphi = f_{|\mathcal{D}_f}$ de f à $\mathcal{D}_f$ est l'**application** définie par

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+3 \end{array}$$

Définition 1.8 (Restriction/Prolongement)

Soit une application $f : E \to F$.

1. *Si A est une partie de E, on appelle* ***restriction*** *de f à A l'application de A dans F, notée $f_{|A}$, définie par $\forall\, x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$;*
2. *Si G est un ensemble contenant E, on appelle* ***prolongement*** *de f à G toute application g de G dans F dont la restriction à E est f : $g_{|E} = f$.*

Exemple 1.9

On considère la **fonction** $f \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \end{array}$

- **Ensemble de définition** de f :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$$

- La **restriction** $\varphi = f_{|\mathcal{D}_f}$ de f à $\mathcal{D}_f$ est l'**application** définie par

$$\varphi \colon \begin{array}{rcl} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+3 \end{array}$$

- Les **prolongements** de φ à $\mathbb{R}$ sont les applications g_a, $a \in \mathbb{R}$, définies par

$$g_a \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x+3 & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

Définition 1.8 (Restriction/Prolongement)

Soit une application $f : E \to F$.

1. *Si A est une partie de E, on appelle* ***restriction*** *de f à A l'application de A dans F, notée $f_{|A}$, définie par $\forall\, x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$;*
2. *Si G est un ensemble contenant E, on appelle* ***prolongement*** *de f à G toute application g de G dans F dont la restriction à E est f : $g_{|E} = f$.*

Exemple 1.9

On considère la **fonction** $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \end{array}$

- **Ensemble de définition** de f :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

- La **restriction** $\varphi = f_{|\mathcal{D}_f}$ de f à $\mathcal{D}_f$ est l'**application** définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+3 \end{array}$$

- Les **prolongements** de φ à $\mathbb{R}$ sont les applications g_a, $a \in \mathbb{R}$, définies par

$$g_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x+3 & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

- Un prolongement privilégié est donné par

$$g_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+3 \end{array}$$

C'est le **prolongement par continuité** de f en 1.

Définition 1.10 (Composition)

Soit $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *deux applications.*

- *On appelle* ***composée*** *de* f *par* g *l'application de* E *dans* G *notée* $g \circ f$ *(se lisant « g rond f ») définie par* $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$*. Schématiquement :*

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Définition 1.10 (Composition)

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- *On appelle **composée** de f par g l'application de E dans G notée $g \circ f$ (se lisant « g rond f ») définie par $\forall x \in E$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Schématiquement :*

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f : & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 1.11 (Associativité)

*La loi de composition des applications est **associative** mais **non commutative**.*
Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ sont trois applications, alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Définition 1.10 (Composition)

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- *On appelle **composée** de f par g l'application de E dans G notée $g \circ f$ (se lisant « g rond f ») définie par $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Schématiquement :*

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f : & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 1.11 (Associativité)

*La loi de composition des applications est **associative** mais **non commutative**.*
Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ sont trois applications, alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Exemple 1.12 (Applications affines, non commutativité)

Fixons quatre réels a, b, c, d et considèrons les **applications affines**

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax + b \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & cx + d \end{array}$$

Définition 1.10 (Composition)

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- *On appelle **composée** de f par g l'application de E dans G notée $g \circ f$ (se lisant « g rond f ») définie par $\forall x \in E$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Schématiquement :*

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f : & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 1.11 (Associativité)

*La loi de composition des applications est **associative** mais **non commutative**.*
Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ sont trois applications, alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Exemple 1.12 (Applications affines, non commutativité)

Fixons quatre réels a, b, c, d et considèrons les **applications affines**

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax + b \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & cx + d \end{array}$$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = (ac)x + (bc + d)$$
$$(f \circ g)(x) = (ac)x + (ad + b)$$

En général $ad + b \neq bc + d$ et $f \circ g \neq g \circ f$.

Définition 1.10 (Composition)

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- *On appelle **composée** de f par g l'application de E dans G notée $g \circ f$ (se lisant « g rond f ») définie par $\forall x \in E$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Schématiquement :*

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 1.11 (Associativité)

*La loi de composition des applications est **associative** mais **non commutative**.*
Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ sont trois applications, alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Exemple 1.12 (Applications affines, non commutativité)

Fixons quatre réels a, b, c, d et considérons les **applications affines**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cx+d \end{array}$$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = (ac)x + (bc+d)$$
$$(f \circ g)(x) = (ac)x + (ad+b)$$

En général $ad + b \neq bc + d$ et $f \circ g \neq g \circ f$.

- Lorsque $b = d = 0$, les applications f et g sont **linéaires** et **commutent** :

$$f \circ g = g \circ f.$$

Définition 1.13 (Injectivité)

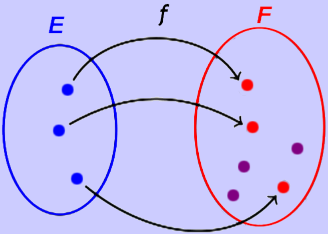
Soit $f : E \to F$ une application.

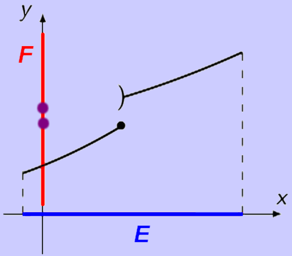
1. *On dit que f est **injective** (ou que f est une **injection**) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **au plus** un antécédent dans E. Autrement dit :*

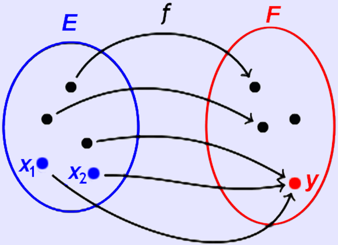
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad [x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)],$$

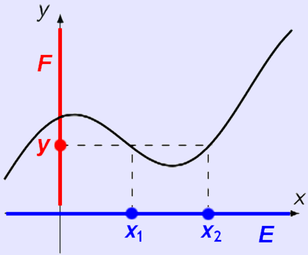
ou encore :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad [f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2].$$



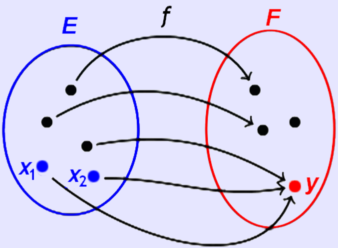


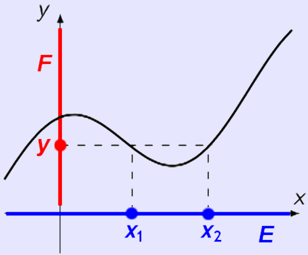




Une application **non injective** :

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2, \quad [x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad f(x_1) = f(x_2)].$$





Une application **non injective** :

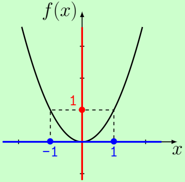
$$\exists (x_1, x_2) \in E^2, \quad [x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad f(x_1) = f(x_2)].$$

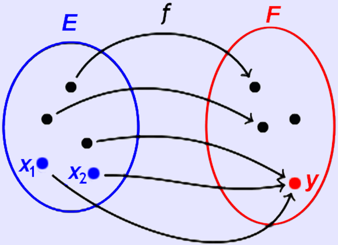
Exemple 1.14 (Fonction « carré »)

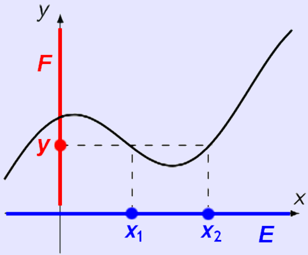
1. Soit l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

   On a $-1 \neq 1$ et $(-1)^2 = (1)^2$.

   Donc f n'est **pas injective**.







Une application **non injective** :

$$\exists\,(x_1, x_2) \in E^2, \quad [x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad f(x_1) = f(x_2)].$$

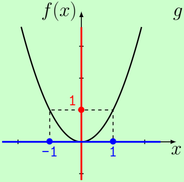
Exemple 1.14 (Fonction « carré »)

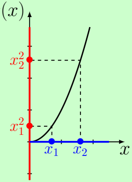
1. Soit l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

   On a $-1 \neq 1$ et $(-1)^2 = (1)^2$.
   Donc f n'est **pas injective**.

2. Soit l'application $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. $(g = f_{|\mathbb{R}^+})$

   On a $\forall\,(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow (x_1)^2 \neq (x_2)^2$.
   Donc g est **injective**.





Définition 1.15 (Surjectivité)

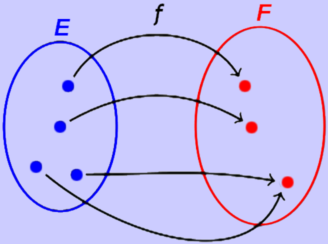
Soit $f : E \to F$ une application.

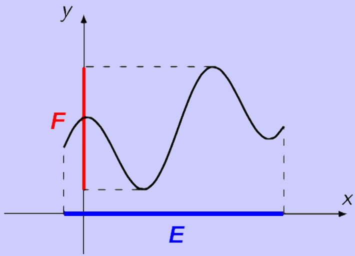
❷ *On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection**) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **au moins** un antécédent dans E :*

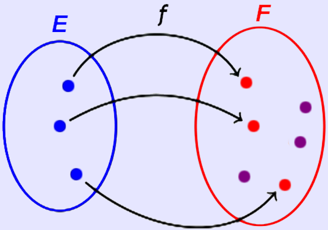
$$\forall y \in F, \quad [\exists x \in E, y = f(x)].$$

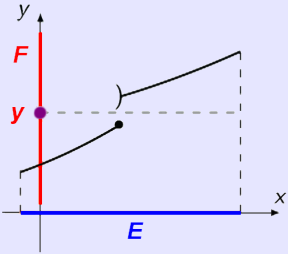
Autrement dit :

$$f(E) = F.$$



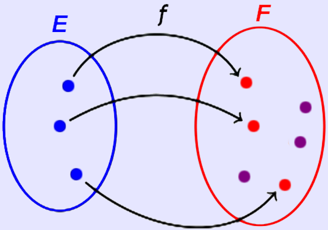


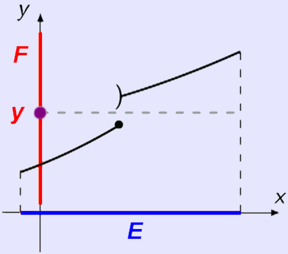




Une application **non surjective** :

$$\exists\, y \in F, \quad [\forall\, x \in E,\ y \neq f(x)].$$





Une application **non surjective** :

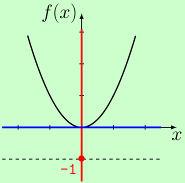
$$\exists y \in F, \quad [\forall x \in E,\ y \neq f(x)].$$

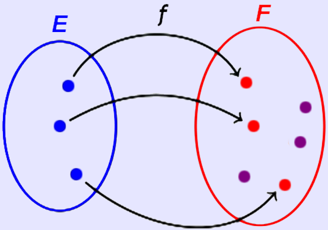
Exemple 1.16 (Fonction « carré »)

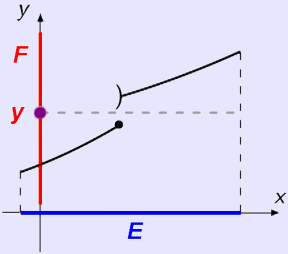
1. Soit l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

   On a $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$.

   Donc f n'est **pas surjective**.







Une application **non surjective** :

$$\exists y \in F, \quad [\forall x \in E,\, y \neq f(x)].$$

Exemple 1.16 (Fonction « carré »)

1. Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

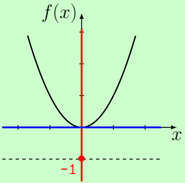
   On a $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$.

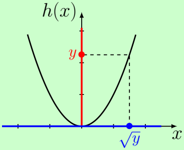
   Donc f n'est **pas surjective**.

2. Soit l'application $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

   On a $\forall y \in \mathbb{R}^+,\ \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$.

   Donc h est **surjective**.





Définition 1.17 (Bijectivité/Réciprocité)

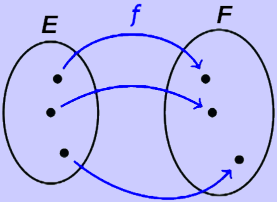
Soit $f : E \to F$ une application.

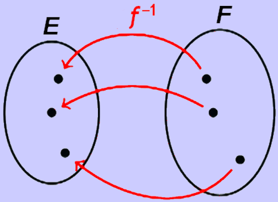
3. *On dit que f est **bijective** (ou que f est une **bijection**) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **exactement** un antécédent dans E, c'est-à-dire lorsqu'elle est à la fois **injective et surjective** :*

$$\forall y \in F, \quad [\exists!\, x \in E,\, y = f(x)].$$

*On note alors $x = f^{-1}(y)$, ce qui définit une application f^{-1} de F dans E appelée **bijection réciproque** de f (ou plus simplement réciproque de f). Elle est caractérisée par*

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad [y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)].$$





Remarque 1.18 (Bijectivité et image réciproque)

Attention à ne pas confondre les écritures $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(\{y\})$:

- $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des **antécédents** de y par f :
$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E : f(x) = y\}.$$
Cette notation a un sens même lorsque f n'est pas bijective ;
- lorsque f est **bijective**, on a $\forall\, y \in F,\ f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Remarque 1.18 (Bijectivité et image réciproque)

Attention à ne pas confondre les écritures $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(\{y\})$:

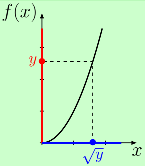
- $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des **antécédents** de y par f :
$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E : f(x) = y\}.$$
Cette notation a un sens même lorsque f n'est pas bijective ;
- lorsque f est **bijective**, on a $\forall\, y \in F,\ f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Exemple 1.19 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

On a $\forall\, y \in \mathbb{R}^+,\ \exists! x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = y$. En effet : $x = \sqrt{y}$.

Donc f est **bijective** de réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.



Remarque 1.18 (Bijectivité et image réciproque)

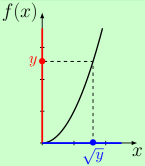
Attention à ne pas confondre les écritures $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(\{y\})$:

- $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des **antécédents** de y par f :
$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E : f(x) = y\}.$$
Cette notation a un sens même lorsque f n'est pas bijective ;
- lorsque f est **bijective**, on a $\forall\, y \in F$, $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Exemple 1.19 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

On a $\forall\, y \in \mathbb{R}^+$, $\exists! x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 = y$. En effet : $x = \sqrt{y}$.
Donc f est **bijective** de réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.



Proposition 1.20 (Bijectivité et composition)

*Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux **bijections**.*

*Alors $g \circ f : E \to G$ est une **bijection** et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- Le code génétique est un ensemble de règles permettant de **traduire** les informations contenues dans le génome des cellules vivantes afin de synthétiser les protéines.

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- Le code génétique est un ensemble de règles permettant de **traduire** les informations contenues dans le génome des cellules vivantes afin de synthétiser les protéines. Il établit une correspondance entre le **génotype** et le **phénotype** d'un organisme, soit, entre d'une part, des **triplets de nucléotides**, appelés **codons**, sur l'ARN messager et d'autre part, les **acides aminés** protéinogènes incorporés dans les protéines synthétisées lors de la phase de **traduction** de l'ARN messager par les ribosomes.

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- Le code génétique est un ensemble de règles permettant de **traduire** les informations contenues dans le génome des cellules vivantes afin de synthétiser les protéines. Il établit une correspondance entre le **génotype** et le **phénotype** d'un organisme, soit, entre d'une part, des **triplets de nucléotides**, appelés **codons**, sur l'ARN messager et d'autre part, les **acides aminés** protéinogènes incorporés dans les protéines synthétisées lors de la phase de **traduction** de l'ARN messager par les ribosomes.
- Un **ARN** est une molécule constituée de nucléotides de quatre types :
  adénine (A), **cytosine** (C), **guanine** (G), **uracile** (U).

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- Le code génétique est un ensemble de règles permettant de **traduire** les informations contenues dans le génome des cellules vivantes afin de synthétiser les protéines.
  Il établit une correspondance entre le **génotype** et le **phénotype** d'un organisme, soit, entre d'une part, des **triplets de nucléotides**, appelés **codons**, sur l'ARN messager et d'autre part, les **acides aminés** protéinogènes incorporés dans les protéines synthétisées lors de la phase de **traduction** de l'ARN messager par les ribosomes.

- Un **ARN** est une molécule constituée de nucléotides de quatre types :
  adénine (A), **cytosine** (C), **guanine** (G), **uracile** (U).
  Les différents **acides aminés** sont listés dans le tableau ci-dessous :

Acide aminé	Symbole
Alanine	**A**
Cystéine	**C**
Acide aspartique	**D**
Acide glutamique	**E**
Phénylalanine	**F**
Glycine	**G**
Histidine	**H**
Isoleucine	**I**
Lysine	**K**
Leucine	**L**

Acide aminé	Symbole
Méthionine	**M**
Asparagine	**N**
Proline	**P**
Glutamine	**Q**
Arginine	**R**
Sérine	**S**
Thréonine	**T**
Valine	**V**
Tryptophane	**W**
Tyrosine	**Y**

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- Le code génétique est un ensemble de règles permettant de **traduire** les informations contenues dans le génome des cellules vivantes afin de synthétiser les protéines. Il établit une correspondance entre le **génotype** et le **phénotype** d'un organisme, soit, entre d'une part, des **triplets de nucléotides**, appelés **codons**, sur l'ARN messager et d'autre part, les **acides aminés** protéinogènes incorporés dans les protéines synthétisées lors de la phase de **traduction** de l'ARN messager par les ribosomes.

- Un **ARN** est une molécule constituée de nucléotides de quatre types :

  adénine (A), **cytosine** (C), **guanine** (G), **uracile** (U).

  Les différents **acides aminés** sont listés dans le tableau ci-dessous :

Acide aminé	Symbole
Alanine	**A**
Cystéine	**C**
Acide aspartique	**D**
Acide glutamique	**E**
Phénylalanine	**F**
Glycine	**G**
Histidine	**H**
Isoleucine	**I**
Lysine	**K**
Leucine	**L**

Acide aminé	Symbole
Méthionine	**M**
Asparagine	**N**
Proline	**P**
Glutamine	**Q**
Arginine	**R**
Sérine	**S**
Thréonine	**T**
Valine	**V**
Tryptophane	**W**
Tyrosine	**Y**

  On introduit alors les ensembles $\mathcal{A} = \{A, C, G, U\}$ et

  $$\mathcal{M} = \{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Y}, *\}$$

  le symbole $*$ désignant un codon de ***«terminaison»*** (codon STOP).

Exemple 1.21 (Le code génétique)

La phase de traduction peut être représentée par la correspondance

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{A}^3 = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (A_1, A_2, A_3) & \longmapsto & A_1 A_2 A_3 \end{array}$$

1re base	2e base: A		C		G		U		3e base
A	AAA	K	ACA	T	AGA	R	AUA	I	A
	AAC	N	ACC	T	AGC	S	AUC	I	C
	AAG	K	ACG	T	AGG	R	AUG	M	G
	AAU	N	ACU	T	AGU	S	AUU	I	U
C	CAA	Q	CCA	P	CGA	R	CUA	L	A
	CAC	H	CCC	P	CGC	R	CUC	L	C
	CAG	Q	CCG	P	CGG	R	CUG	L	G
	CAU	H	CCU	P	CGU	R	CUU	L	U
G	GAA	E	GCA	A	GGA	G	GUA	V	A
	GAC	D	GCC	A	GGC	G	GUC	V	C
	GAG	E	GCG	A	GGG	G	GUG	V	G
	GAU	D	GCU	A	GGU	G	GUU	V	U
U	UAA	*	UCA	S	UGA	*	UUA	L	A
	UAC	Y	UCC	S	UGC	C	UUC	F	C
	UAG	*	UCG	S	UGG	W	UUG	L	G
	UAU	Y	UCU	S	UGU	C	UUU	F	U

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- f est une **application** : un codon code l'information pour exactement un acide aminé, on dit que le code génétique est ***«cohérent»*** ou ***«non ambigu»*** ;

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- f est une **application** : un codon code l'information pour exactement un acide aminé, on dit que le code génétique est ***«cohérent»*** ou ***«non ambigu»*** ;
- f est **surjective** : par définition, tous les acides aminés sont codés à l'aide de codons ;

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- f est une **application** : un codon code l'information pour exactement un acide aminé, on dit que le code génétique est ***«cohérent»*** ou ***«non ambigu»*** ;
- f est **surjective** : par définition, tous les acides aminés sont codés à l'aide de codons ;
- Tableau des antécédents des acides aminés par f :

Symbole	Codons
A	*GCU, GCC, GCA, GCG*
C	*UGU, UGC*
D	*GAU, GAC*
E	*GAA, GAG*
F	*UUU, UUC*
G	*GGU, GGC, GGA, GGG*
H	*CAU, CAC*
I	*AUU, AUC, AUA*
K	*AAA, AAG*
L	*UUA, UUG, CUU, CUC, CUA, CUG*

Symbole	Codons
M	*AUG*
N	*AAU, AAC*
P	*CCU, CCC, CCA, CCG*
Q	*CAA, CAG*
R	*CGU, CGC, CGA, CGG, AGA, AGG*
S	*UCU, UCC, UCA, UCG, AGU, AGC*
T	*ACU, ACC, ACA, ACG*
V	*GUU, GUC, GUA, GUG*
W	*UGG(UGA)*
Y	*UAU, UAC*
$*$	*UAG, UAA, UGA*

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- f est une **application** : un codon code l'information pour exactement un acide aminé, on dit que le code génétique est ***«cohérent»*** ou ***«non ambigu»*** ;
- f est **surjective** : par définition, tous les acides aminés sont codés à l'aide de codons ;
- Tableau des antécédents des acides aminés par f :

Symbole	Codons
A	*GCU, GCC, GCA, GCG*
C	*UGU, UGC*
D	*GAU, GAC*
E	*GAA, GAG*
F	*UUU, UUC*
G	*GGU, GGC, GGA, GGG*
H	*CAU, CAC*
I	*AUU, AUC, AUA*
K	*AAA, AAG*
L	*UUA, UUG, CUU, CUC, CUA, CUG*

Symbole	Codons
M	*AUG*
N	*AAU, AAC*
P	*CCU, CCC, CCA, CCG*
Q	*CAA, CAG*
R	*CGU, CGC, CGA, CGG, AGA, AGG*
S	*UCU, UCC, UCA, UCG, AGU, AGC*
T	*ACU, ACC, ACA, ACG*
V	*GUU, GUC, GUA, GUG*
W	*UGG(UGA)*
Y	*UAU, UAC*
$*$	*UAG, UAA, UGA*

Par exemple, les antécédents de l'alanine, l'arginine et l'asparagine sont donnés par

$$f^{-1}(\mathbf{A}) = \{(G,C,U),(G,C,C),(G,C,A),(G,C,G)\}$$
$$f^{-1}(\mathbf{R}) = \{(C,G,U),(C,G,C),(C,G,A),(C,G,G),(A,G,A),(A,G,G)\}$$
$$f^{-1}(\mathbf{N}) = \{(A,A,U),(A,A,C)\}$$

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- f est une **application** : un codon code l'information pour exactement un acide aminé, on dit que le code génétique est ***«cohérent»*** ou ***«non ambigu»*** ;
- f est **surjective** : par définition, tous les acides aminés sont codés à l'aide de codons ;
- Tableau des antécédents des acides aminés par f :

Symbole	Codons
A	*GCU, GCC, GCA, GCG*
C	*UGU, UGC*
D	*GAU, GAC*
E	*GAA, GAG*
F	*UUU, UUC*
G	*GGU, GGC, GGA, GGG*
H	*CAU, CAC*
I	*AUU, AUC, AUA*
K	*AAA, AAG*
L	*UUA, UUG, CUU, CUC, CUA, CUG*

Symbole	Codons
M	*AUG*
N	*AAU, AAC*
P	*CCU, CCC, CCA, CCG*
Q	*CAA, CAG*
R	*CGU, CGC, CGA, CGG, AGA, AGG*
S	*UCU, UCC, UCA, UCG, AGU, AGC*
T	*ACU, ACC, ACA, ACG*
V	*GUU, GUC, GUA, GUG*
W	*UGG(UGA)*
Y	*UAU, UAC*
$*$	*UAG, UAA, UGA*

  Par exemple, les antécédents de l'alanine, l'arginine et l'asparagine sont donnés par

$$f^{-1}(\mathbf{A}) = \{(G,C,U),(G,C,C),(G,C,A),(G,C,G)\}$$
$$f^{-1}(\mathbf{R}) = \{(C,G,U),(C,G,C),(C,G,A),(C,G,G),(A,G,A),(A,G,G)\}$$
$$f^{-1}(\mathbf{N}) = \{(A,A,U),(A,A,C)\}$$

- f **n'est pas injective** : on dit que le code génétique est ***«redondant»*** ou ***«dégénéré»***.

Proposition 1.22 (Réciprocité)

Notons Id_A *l'application (dite* ***identité****) qui va d'un ensemble* A *dans lui-même définie par* $\forall\, x \in A,\ \mathrm{Id}_A(x) = x$*. Pour toute application* $f : E \to F$ ***bijective****, on a :*

- $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ *et* $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ *;*
- f^{-1} *est bijective et* $(f^{-1})^{-1} = f$*.*

Proposition 1.22 (Réciprocité)

*Notons Id_A l'application (dite **identité**) qui va d'un ensemble A dans lui-même définie par $\forall x \in A$, $\mathrm{Id}_A(x) = x$. Pour toute application $f : E \to F$ **bijective**, on a :*

- $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ *et* $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ *;*
- f^{-1} *est bijective et* $(f^{-1})^{-1} = f$*.*

Remarque 1.23 (Réciprocité (facultatif))

1. Si $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ sont deux applications telles que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$, alors φ est **injective** et ψ est **surjective**.
2. Soit $f : E \to F$ une application.
   S'il existe deux applications $g_1 : F \to E$ et $g_2 : F \to E$ telles que $g_1 \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_F$ alors $g_1 = g_2$ et f est **bijective** de **réciproque** g_1 : $f^{-1} = g_1 = g_2$.

Proposition 1.22 (Réciprocité)

*Notons Id_A l'application (dite **identité**) qui va d'un ensemble A dans lui-même définie par $\forall x \in A$, $\mathrm{Id}_A(x) = x$. Pour toute application $f : E \to F$ **bijective**, on a :*

- $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ *et* $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$;
- f^{-1} *est bijective et* $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque 1.23 (Réciprocité (facultatif))

1. Si $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ sont deux applications telles que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$, alors φ est **injective** et ψ est **surjective**.
2. Soit $f : E \to F$ une application.
   S'il existe deux applications $g_1 : F \to E$ et $g_2 : F \to E$ telles que $g_1 \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_F$ alors $g_1 = g_2$ et f est **bijective** de **réciproque** g_1 : $f^{-1} = g_1 = g_2$.

Exemple 1.24 (Équipotence de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$)

Soit les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ 2|n| - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Proposition 1.22 (Réciprocité)

*Notons Id_A l'application (dite **identité**) qui va d'un ensemble A dans lui-même définie par $\forall x \in A$, $\mathrm{Id}_A(x) = x$. Pour toute application $f : E \to F$ **bijective**, on a :*

- $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ *et* $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$;
- f^{-1} *est bijective et* $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque 1.23 (Réciprocité (facultatif))

1. Si $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ sont deux applications telles que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$, alors φ est **injective** et ψ est **surjective**.
2. Soit $f : E \to F$ une application.
   S'il existe deux applications $g_1 : F \to E$ et $g_2 : F \to E$ telles que $g_1 \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_F$ alors $g_1 = g_2$ et f est **bijective** de **réciproque** g_1 : $f^{-1} = g_1 = g_2$.

Exemple 1.24 (Équipotence de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$)

Soit les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ 2|n| - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On a $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
Donc f et g sont des bijections **réciproques** l'une de l'autre : $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$.

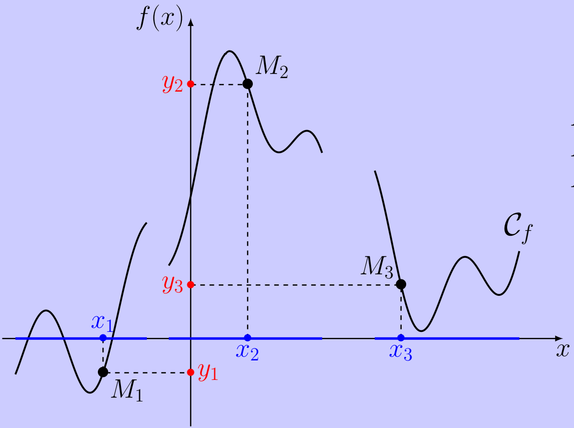
Sommaire

Définition 2.1 (Graphe/Courbe)

Soit une application $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$.

*On appelle **graphe** ou **courbe représentative** de f l'ensemble des points $M(x, f(x))$ du plan repéré lorsque x décrit D. On notera par la suite $\mathcal{C}_f$ cette courbe.*

$y_1 = f(x_1)$
$y_2 = f(x_2)$
$y_3 = f(x_3)$



$M_1 = M(x_1, y_1)$
$M_2 = M(x_2, y_2)$
$M_3 = M(x_3, y_3)$

Définition 2.2 (Croissance/Décroissance)

Soient D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

1. *On dit que f est* ***croissante*** *(resp.* ***décroissante****) sur D si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\ (\textit{resp. } f(x_1) \geqslant f(x_2))]$$

ou encore

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0\ (\textit{resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant 0)].$$

Définition 2.2 (Croissance/Décroissance)

Soient D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

1. *On dit que f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur D si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\ (\textit{resp. } f(x_1) \geqslant f(x_2))]$$

ou encore

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0\ (\textit{resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant 0)].$$

2. *On dit que f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**)sur D si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (\textit{resp. } f(x_1) > f(x_2))$$

ou encore

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\ (\textit{resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0)].$$

Définition 2.2 (Croissance/Décroissance)

Soient D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

1. *On dit que f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur D si :*
$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\ (\textit{resp. } f(x_1) \geqslant f(x_2))]$$
ou encore
$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0\ (\textit{resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant 0)].$$

2. *On dit que f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**)sur D si :*
$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (\textit{resp. } f(x_1) > f(x_2))$$
ou encore
$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\ (\textit{resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0)].$$

3. *On dit qu'une fonction est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur D lorsqu'elle est **croissante sur D** ou **décroissante sur D** (resp. **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur D).*

Définition 2.3 (Suites)

Une ***suite à valeurs réelles*** *est une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *On la note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.3 (Suites)

*Une **suite à valeurs réelles** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 2.4 (Croissance/Décroissance)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.*
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.*

Définition 2.3 (Suites)

*Une **suite à valeurs réelles** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 2.4 (Croissance/Décroissance)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.*
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.*
3. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante, la stricte monotonie correspondant à des inégalités strictes au lieu d'inégalités larges.*

Définition 2.3 (Suites)

Une ***suite à valeurs réelles*** *est une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *On la note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.4 (Croissance/Décroissance)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles.*

1. *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***croissante*** *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***décroissante*** *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
3. *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***monotone*** *lorsqu'elle est croissante ou décroissante, la stricte monotonie correspondant à des inégalités strictes au lieu d'inégalités larges.*

Proposition 2.5 (Variations et composition)

Soit D *et* D' *deux parties de* $\mathbb{R}$ *et* $f : D \to D'$, $g : D' \to \mathbb{R}$ *deux applications.*
Alors l'application $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ *est :*

- ***croissante*** *si* f *et* g *sont de* ***même monotonie*** *(i.e. toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes) ;*

Définition 2.3 (Suites)

*Une **suite à valeurs réelles** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 2.4 (Croissance/Décroissance)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.*
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.*
3. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante, la stricte monotonie correspondant à des inégalités strictes au lieu d'inégalités larges.*

Proposition 2.5 (Variations et composition)

Soit D et D' deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \to D'$, $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications.
Alors l'application $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ est :

- ***croissante** si f et g sont de **même monotonie** (i.e. toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes) ;*
- ***décroissante** si f et g sont de **monotonie contraires.***

Définition 2.6 (Parité)

*Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application dont l'ensemble de définition D est **symétrique** par rapport à 0 (i.e. $\forall x \in D$, $-x \in D$).*

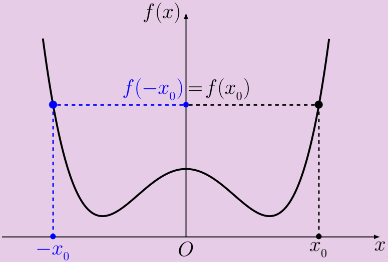
1. *On dit que f est une fonction **paire** lorsque $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$.*
2. *On dit que f est une fonction **impaire** lorsque $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.*

Définition 2.6 (Parité)

*Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application dont l'ensemble de définition D est **symétrique** par rapport à 0 (i.e. $\forall\, x \in D,\ -x \in D$).*

1. *On dit que f est une fonction **paire** lorsque $\forall\, x \in D,\ f(-x) = f(x)$.*
2. *On dit que f est une fonction **impaire** lorsque $\forall\, x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.*

Proposition 2.7 (Parité et symétries)



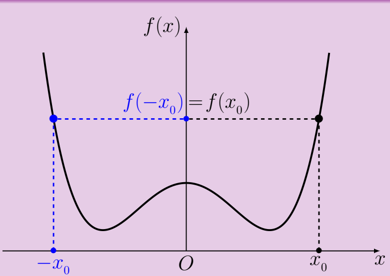
*Si f est **paire** alors $\mathcal{C}_f$ est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.*

Définition 2.6 (Parité)

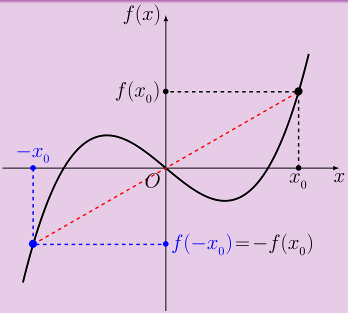
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application dont l'ensemble de définition D est ***symétrique*** *par rapport à 0 (i.e. $\forall x \in D,\ -x \in D$).*

1. *On dit que f est une fonction* ***paire*** *lorsque $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.*
2. *On dit que f est une fonction* ***impaire*** *lorsque $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.*

Proposition 2.7 (Parité et symétries)



Si f est ***paire*** *alors $\mathcal{C}_f$ est* ***symétrique*** *par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.*



Si f est ***impaire*** *alors $\mathcal{C}_f$ est* ***symétrique*** *par rapport à l'origine du repère.*

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D **symétrique** par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont **paires** (resp. **impaires**), alors $f + g$ est **paire** (resp. **impaire**).*

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D **symétrique** par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont **paires** (resp. **impaires**), alors $f + g$ est **paire** (resp. **impaire**).*
   - *Si f et g ont **même parité**, alors $f \times g$ est **paire** ;*
*si f et g ont des **parités contraires**, alors $f \times g$ est **impaire**.*
Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D* ***symétrique*** *par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont* ***paires*** *(resp.* ***impaires****), alors $f + g$ est* ***paire*** *(resp.* ***impaire****).*
   - *Si f et g ont* ***même parité****, alors $f \times g$ est* ***paire*** *;*
     si f et g ont des ***parités contraires****, alors $f \times g$ est* ***impaire****.*
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0.*
   - *Si f est* ***paire****, alors $g \circ f$ est* ***paire****.*

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D* ***symétrique*** *par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont* ***paires*** *(resp.* ***impaires****), alors $f + g$ est* ***paire*** *(resp.* ***impaire****).*
   - *Si f et g ont* ***même parité****, alors $f \times g$ est* ***paire*** *;*
     si f et g ont des ***parités contraires****, alors $f \times g$ est* ***impaire****.*
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0.*
   - *Si f est* ***paire****, alors $g \circ f$ est* ***paire****.*
   - *Si f est* ***impaire****, alors $g \circ f$ a la* ***même parité*** *que g.*

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D* ***symétrique*** *par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont* ***paires*** *(resp.* ***impaires****), alors $f + g$ est* ***paire*** *(resp.* ***impaire****).*
   - *Si f et g ont* ***même parité****, alors $f \times g$ est* ***paire*** *;*
     si f et g ont des ***parités contraires****, alors $f \times g$ est* ***impaire****.*
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0.*
   - *Si f est* ***paire****, alors $g \circ f$ est* ***paire****.*
   - *Si f est* ***impaire****, alors $g \circ f$ a la* ***même parité*** *que g.*
3. *Soit $f : D \to D'$ une* ***bijection impaire*** *entre deux ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0. Alors f^{-1} est* ***impaire****.*

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D* ***symétrique*** *par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont* ***paires*** *(resp.* ***impaires****), alors $f + g$ est* ***paire*** *(resp.* ***impaire****).*
   - *Si f et g ont* ***même parité****, alors $f \times g$ est* ***paire*** *;*
     si f et g ont des ***parités contraires****, alors $f \times g$ est* ***impaire****.*
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0.*
   - *Si f est* ***paire****, alors $g \circ f$ est* ***paire****.*
   - *Si f est* ***impaire****, alors $g \circ f$ a la* ***même parité*** *que g.*
3. *Soit $f : D \to D'$ une* ***bijection impaire*** *entre deux ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0. Alors f^{-1} est* ***impaire****.*

Exemple 2.9

1. Pour tout entier **pair** (resp. **impair**) p, la fonction $x \longmapsto x^p$ (définie sur $\mathbb{R}$ si $p \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ si $p \in \mathbb{Z}^*_-$) est **paire** (resp. **impaire**).

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D* ***symétrique*** *par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont* ***paires*** *(resp.* ***impaires****), alors $f + g$ est* ***paire*** *(resp.* ***impaire****).*
   - *Si f et g ont* ***même parité****, alors $f \times g$ est* ***paire*** *;*
     si f et g ont des ***parités contraires****, alors $f \times g$ est* ***impaire****.*
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0.*
   - *Si f est* ***paire****, alors $g \circ f$ est* ***paire****.*
   - *Si f est* ***impaire****, alors $g \circ f$ a la* ***même parité*** *que g.*
3. *Soit $f : D \to D'$ une* ***bijection impaire*** *entre deux ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0. Alors f^{-1} est* ***impaire****.*

Exemple 2.9

1. Pour tout entier **pair** (resp. **impair**) p, la fonction $x \longmapsto x^p$ (définie sur $\mathbb{R}$ si $p \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ si $p \in \mathbb{Z}_-^*$) est **paire** (resp. **impaire**).
2. La fonction cos est **paire** et la fonction sin est **impaire.**

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D* ***symétrique*** *par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont* ***paires*** *(resp.* ***impaires****), alors $f + g$ est* ***paire*** *(resp.* ***impaire****).*
   - *Si f et g ont* ***même parité****, alors $f \times g$ est* ***paire*** *;*
     si f et g ont des ***parités contraires****, alors $f \times g$ est* ***impaire****.*
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0.*
   - *Si f est* ***paire****, alors $g \circ f$ est* ***paire****.*
   - *Si f est* ***impaire****, alors $g \circ f$ a la* ***même parité*** *que g.*
3. *Soit $f : D \to D'$ une* ***bijection impaire*** *entre deux ensembles D et D'* ***symétriques*** *par rapport à 0. Alors f^{-1} est* ***impaire****.*

Exemple 2.9

1. Pour tout entier **pair** (resp. **impair**) p, la fonction $x \longmapsto x^p$ (définie sur $\mathbb{R}$ si $p \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ si $p \in \mathbb{Z}_-^*$) est **paire** (resp. **impaire**).
2. La fonction cos est **paire** et la fonction sin est **impaire.**
3. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une application.
   - L'application $x \longmapsto f(\cos x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est **paire**.

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D **symétrique** par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont **paires** (resp. **impaires**), alors $f + g$ est **paire** (resp. **impaire**).*
   - *Si f et g ont **même parité**, alors $f \times g$ est **paire** ;*
     *si f et g ont des **parités contraires**, alors $f \times g$ est **impaire**.*
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D' **symétriques** par rapport à 0.*
   - *Si f est **paire**, alors $g \circ f$ est **paire**.*
   - *Si f est **impaire**, alors $g \circ f$ a la **même parité** que g.*
3. *Soit $f : D \to D'$ une **bijection impaire** entre deux ensembles D et D' **symétriques** par rapport à 0. Alors f^{-1} est **impaire**.*

Exemple 2.9

1. Pour tout entier **pair** (resp. **impair**) p, la fonction $x \longmapsto x^p$ (définie sur $\mathbb{R}$ si $p \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ si $p \in \mathbb{Z}_-^*$) est **paire** (resp. **impaire**).
2. La fonction cos est **paire** et la fonction sin est **impaire.**
3. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une application.
   - L'application $x \longmapsto f(\cos x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est **paire**.
   - Si f est **paire** (resp. **impaire**), l'application $x \longmapsto f(\sin x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est **paire** (resp. **impaire**).

Définition 2.10 (Périodicité)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application et T un réel positif non nul.
*On dit que f est **périodique de période** T (ou qu'elle est T-périodique) lorsque*

$$\forall x \in D,\ x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

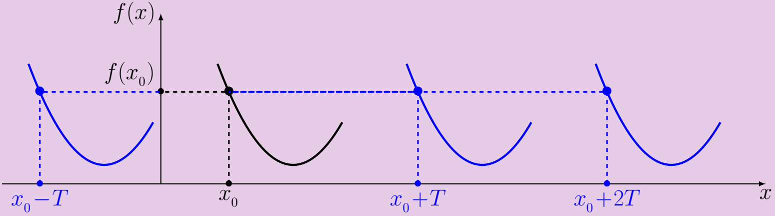
Définition 2.10 (Périodicité)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application et T un réel positif non nul.
*On dit que f est **périodique de période** T (ou qu'elle est T-périodique) lorsque*

$$\forall x \in D,\ x+T \in D \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Proposition 2.11 (Périodicité et symétries)

*Si f est **périodique** alors $\mathcal{C}_f$ est la répétition à l'infini du même motif tracé sur une période.*



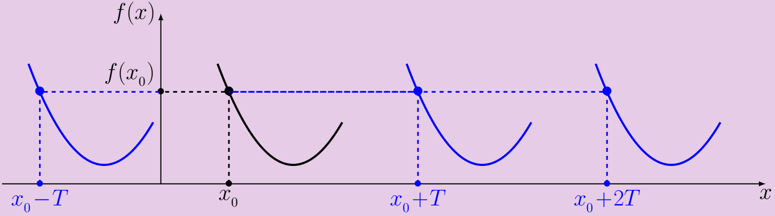
Définition 2.10 (Périodicité)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application et T un réel positif non nul.
*On dit que f est **périodique de période** T (ou qu'elle est T-périodique) lorsque*

$$\forall x \in D,\ x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Proposition 2.11 (Périodicité et symétries)

*Si f est **périodique** alors $\mathcal{C}_f$ est la répétition à l'infini du même motif tracé sur une période.*



Remarque 2.12

Une fonction T-périodique est également nT-périodique pour n'importe quel entier non nul n. "La" période T n'est donc pas unique et pas nécessairement minimale.

Proposition 2.13 (Périodicité et opérations)

Soit T un réel positif non nul.

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications T-**périodiques.***
   - *Alors $f + g$ et $f \times g$ sont T-**périodiques.***
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

   *Autrement dit, si f et g admettent une période **commune**, $f+g$ et $f \times g$ sont périodiques.*

Proposition 2.13 (Périodicité et opérations)

Soit T un réel positif non nul.

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications T-**périodiques.***
   - *Alors $f + g$ et $f \times g$ sont T-**périodiques.***
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

   *Autrement dit, si f et g admettent une période **commune,** $f+g$ et $f\times g$ sont périodiques.*
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications.*
   - *Si f est T-**périodique**, alors $g \circ f$ est T-**périodique**.*

Proposition 2.13 (Périodicité et opérations)

Soit T un réel positif non nul.

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications T-**périodiques.***
   - *Alors $f + g$ et $f \times g$ sont T-**périodiques.***
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

   *Autrement dit, si f et g admettent une période **commune,** $f+g$ et $f\times g$ sont périodiques.*
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications.*
   - *Si f est T-**périodique**, alors $g \circ f$ est T-**périodique**.*

Exemple 2.14

1. Les fonctions cos et sin sont 2π-**périodiques**.

Proposition 2.13 (Périodicité et opérations)

Soit T un réel positif non nul.

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications T-**périodiques.***
   - *Alors $f + g$ et $f \times g$ sont T-**périodiques.***
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

   *Autrement dit, si f et g admettent une période **commune,** $f+g$ et $f\times g$ sont périodiques.*
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications.*
   - *Si f est T-**périodique**, alors $g \circ f$ est T-**périodique**.*

Exemple 2.14

1. Les fonctions cos et sin sont 2π-**périodiques**.
2. Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels.

   La fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ est 2π-**périodique**.

Proposition 2.13 (Périodicité et opérations)

Soit T un réel positif non nul.

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications T-**périodiques.***
   - *Alors $f + g$ et $f \times g$ sont T-**périodiques.***
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

   *Autrement dit, si f et g admettent une période **commune,** $f+g$ et $f\times g$ sont périodiques.*
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications.*
   - *Si f est T-**périodique**, alors $g \circ f$ est T-**périodique**.*

Exemple 2.14

1. Les fonctions cos et sin sont 2π-**périodiques**.
2. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels.

   La fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ est 2π-**périodique**.
3. Soit T un réel positif non nul, p et q des entiers positifs non nuls.
   Soit f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ resp. pT-**périodique** et qT-**périodique.**
   Alors $f + g$ et $f \times g$ sont des applications rT-**périodiques** où $r = \mathrm{ppcm}(p, q)$.

Proposition 2.13 (Périodicité et opérations)

Soit T un réel positif non nul.

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications T-**périodiques.***
   - *Alors $f + g$ et $f \times g$ sont T-**périodiques.***
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

   *Autrement dit, si f et g admettent une période **commune**, $f+g$ et $f \times g$ sont périodiques.*
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications.*
   - *Si f est T-**périodique**, alors $g \circ f$ est T-**périodique**.*

Exemple 2.14

1. Les fonctions cos et sin sont 2π-**périodiques**.
2. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels.
   La fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ est 2π-**périodique**.
3. Soit T un réel positif non nul, p et q des entiers positifs non nuls.
   Soit f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ resp. pT-**périodique** et qT-**périodique**.
   Alors $f + g$ et $f \times g$ sont des applications rT-**périodiques** où $r = \operatorname{ppcm}(p, q)$.

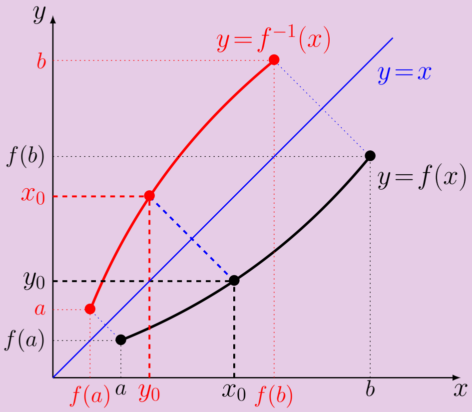
Remarque 2.15 (Périodicité et addition/multiplication (facultatif))

La somme et le produit de deux fonctions périodiques **ne sont** en général **pas** périodiques.
Exemple : pour tout **irrationnel** a, l'application $x \longmapsto \cos(x) + \cos(ax)$ **n'est pas** périodique.

Proposition 2.16 (Bijectivité et symétrie)

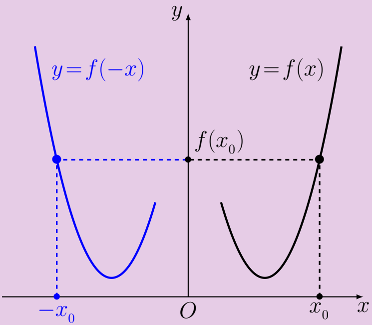
*Soit $f : D \to D'$ une **bijection** où D et D' sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$.*

*Alors sa courbe représentative et celle de sa réciproque dans un repère orthonormal du plan sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée aussi première bissectrice).*



Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

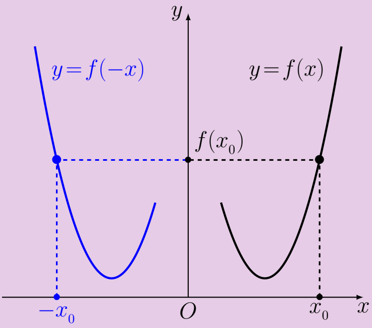
Application $x \mapsto f(-x)$



Le graphe de l'application $x \mapsto f(-x)$ est le ***symétrique*** *de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.*

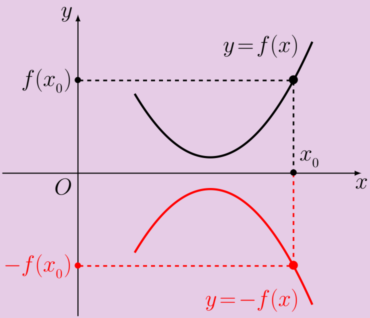
Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(-x)$



Le graphe de l'application $x \mapsto f(-x)$ *est le* ***symétrique*** *de* $\mathcal{C}_f$ *par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.*

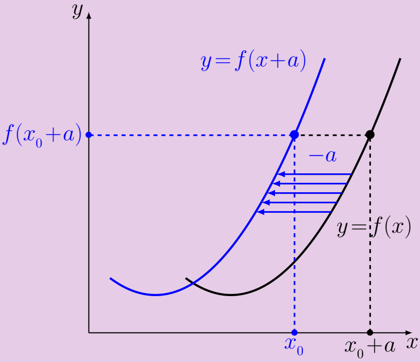
Application $x \mapsto -f(x)$



Le graphe de l'application $x \mapsto -f(x)$ *est le* ***symétrique*** *de* $\mathcal{C}_f$ *par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.*

Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

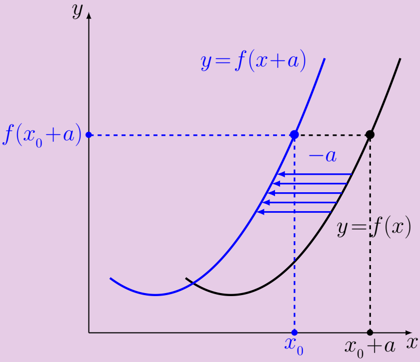
Application $x \mapsto f(x+a)$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *fixé*



Le graphe de l'application $x \mapsto f(x+a)$ *est l'image de* $\mathcal{C}_f$ *par la* ***translation*** *de vecteur* $-a\vec{i}$ *(translation « horizontale »).*

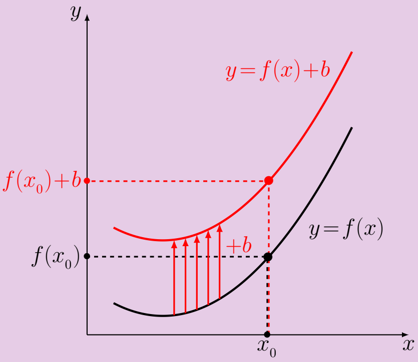
Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(x+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto f(x+a)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la ***translation*** *de vecteur $-a\vec{\imath}$ (translation « horizontale »).*

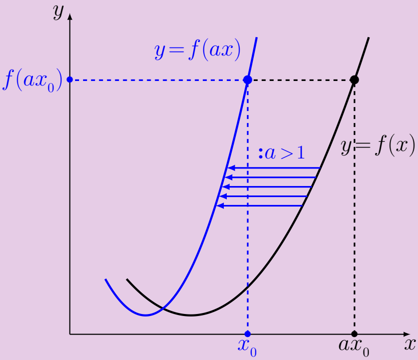
Application $x \mapsto f(x)+b$ avec $b \in \mathbb{R}$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto f(x)+b$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la ***translation*** *de vecteur $b\vec{\jmath}$ (translation « verticale »).*

Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

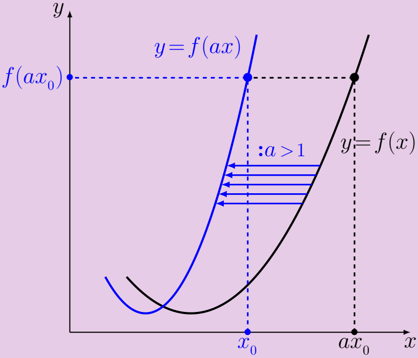
Application $x \mapsto f(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ fixé



*Le graphe de l'application $x \mapsto f(ax)$ est obtenu par **réduction/agrandissement** dans la direction des abscisses de $\mathcal{C}_f$ d'un facteur $|a|$, suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées lorsque $a < 0$.*

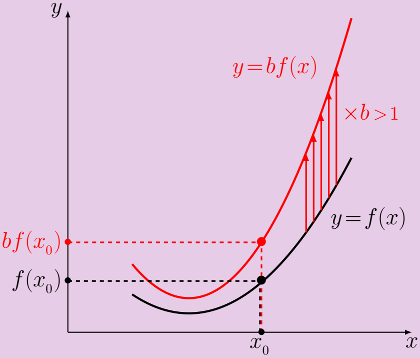
Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(ax)$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *fixé*



Le graphe de l'application $x \mapsto f(ax)$ *est obtenu par* ***réduction/agrandissement*** *dans la direction des abscisses de* $\mathcal{C}_f$ *d'un facteur* $|a|$, *suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées lorsque* $a < 0$.

Application $x \mapsto bf(x)$ *avec* $b \in \mathbb{R}^*$ *fixé*



Le graphe de l'application $x \mapsto bf(x)$ *est obtenu par* ***agrandissement/réduction*** *dans la direction des ordonnées de* $\mathcal{C}_f$ *d'un facteur* $|b|$, *suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses lorsque* $b < 0$.

Sommaire

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 3.1 (Fonctions polynômes)

*On appelle **fonction polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute application P de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- *Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** de P.*
- *Lorsque $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** de P et noté $\deg(P)$.*
- *Si $n = 0$, P est une fonction constante.*
  *Si en plus $a_0 = 0$, on dit que P est **la fonction polynôme nul**.*
  Par convention, le degré de la fonction polynôme nul est $-\infty$.

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 3.1 (Fonctions polynômes)

*On appelle **fonction polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute application P de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- *Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** de P.*
- *Lorsque $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** de P et noté $\deg(P)$.*
- *Si $n = 0$, P est une fonction constante.*
  *Si en plus $a_0 = 0$, on dit que P est **la fonction polynôme nul**.*
  Par convention, le degré de la fonction polynôme nul est $-\infty$.

Notations :

- *L'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$.*
- *On utilise, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation X^k pour désigner la fonction $x \mapsto x^k$ (par convention X^0 est la fonction $x \mapsto 1$).*

  Cela permet de noter $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ une fonction polynôme quelconque de degré n.

Théorème 3.2 (Égalité)

Deux fonctions polynômes sont ***égales*** *ssi elles ont le* ***même degré*** *et les* ***mêmes coefficients.***

Théorème 3.2 (Égalité)

*Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**.*

Définition 3.3 (Opérations)

*Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P+Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon*

$$\forall x \in \mathbb{K},\ (P+Q)(x) = P(x)+Q(x),\ (P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x),\ (Q\circ P)(x) = Q(P(x)).$$

Théorème 3.2 (Égalité)

Deux fonctions polynômes sont ***égales*** *ssi elles ont le* ***même degré*** *et les* ***mêmes coefficients****.*

Définition 3.3 (Opérations)

Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la ***somme*** *$P+Q$, le* ***produit*** *$P \times Q$ et la* ***composée*** *$Q \circ P$ selon*

$$\forall x \in \mathbb{K},\ (P+Q)(x) = P(x)+Q(x),\ (P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x),\ (Q\circ P)(x) = Q(P(x)).$$

Proposition 3.4 (Opérations et degré)

Soit P et Q deux fonctions polynômes. Alors $P+Q$, $P\times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et

1. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   de plus, lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, *alors* $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;

Théorème 3.2 (Égalité)

*Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**.*

Définition 3.3 (Opérations)

*Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P+Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon*

$$\forall x \in \mathbb{K},\ (P+Q)(x) = P(x)+Q(x),\ (P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x),\ (Q\circ P)(x) = Q(P(x)).$$

Proposition 3.4 (Opérations et degré)

Soit P et Q deux fonctions polynômes. Alors $P+Q$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et

1. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   de plus, lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, *alors* $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
2. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$;

Théorème 3.2 (Égalité)

*Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**.*

Définition 3.3 (Opérations)

*Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P+Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon*

$\forall x \in \mathbb{K},\ (P+Q)(x) = P(x)+Q(x),\ (P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x),\ (Q\circ P)(x) = Q(P(x)).$

Proposition 3.4 (Opérations et degré)

Soit P et Q deux fonctions polynômes. Alors $P+Q$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et

1. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   de plus, lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, *alors* $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
2. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$;
3. $\deg(Q \circ P) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exemple 3.5 (Illustration des opérations)

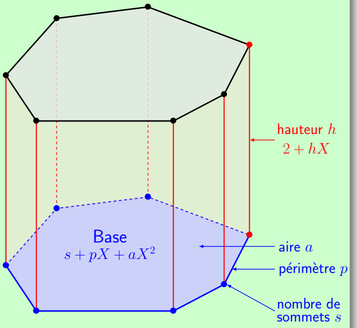
1. Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
   On a $P+Q = (a+2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$ et $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$).

Exemple 3.5 (Illustration des opérations)

1. Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a $P+Q = (a+2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$ et $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$). Plus précisément :
   - si $a \neq -2$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   - si $a = -2$, alors $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Exemple 3.5 (Illustration des opérations)

1. Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
   On a $P+Q = (a+2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$ et $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$). Plus précisément :
   - si $a \neq -2$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   - si $a = -2$, alors $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p, d'**aire** a, les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

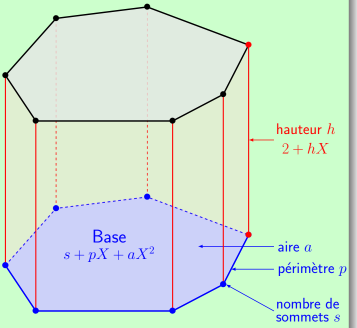


Exemple 3.5 (Illustration des opérations)

1. Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a $P+Q = (a+2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$ et $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$). Plus précisément :
   - si $a \neq -2$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   - si $a = -2$, alors $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

2. On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p, d'**aire** a, les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

   On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.



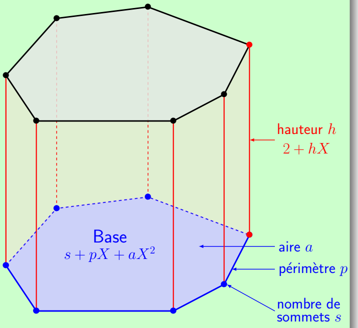
Exemple 3.5 (Illustration des opérations)

1. Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
   On a $P+Q = (a+2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$ et $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$). Plus précisément :
   - si $a \neq -2$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   - si $a = -2$, alors $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

2. On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p, d'**aire** a, les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

   On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.

   On a $PQ = 2s + (sh + 2p)X + (ph + 2a)X^2 + ahX^3$ et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.



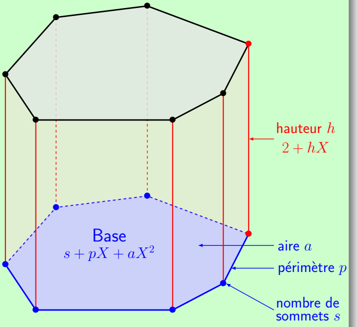
Exemple 3.5 (Illustration des opérations)

1. Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
   On a $P+Q = (a+2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$ et $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$). Plus précisément :
   - si $a \neq -2$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   - si $a = -2$, alors $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p, d'**aire** a, les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

   On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.

   On a $PQ = 2s + (sh + 2p)X + (ph + 2a)X^2 + ahX^3$ et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

   Remarque : les coefficients du polynôme PQ fournissent les informations suivantes pour le prisme :
   - nombre de **sommets** : $2s$;
   - **périmètre** : $sh + 2p$;
   - **aire** : $ph + 2a$;
   - **volume** : ah.



Exemple 3.5 (Illustration des opérations)

❶ Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a $P+Q = (a+2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$ et $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$). Plus précisément :

- si $a \neq -2$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- si $a = -2$, alors $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

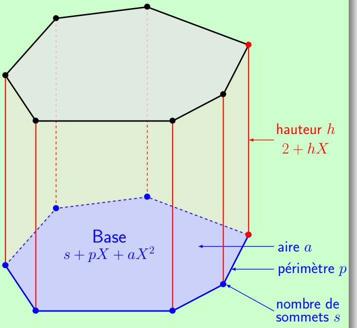
❷ On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p, d'**aire** a, les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.

On a $PQ = 2s + (sh+2p)X + (ph+2a)X^2 + ahX^3$ et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque : les coefficients du polynôme PQ fournissent les informations suivantes pour le prisme :

- nombre de **sommets** : $2s$;
- **périmètre** : $sh + 2p$;
- **aire** : $ph + 2a$;
- **volume** : ah.



❸ Soit $P = X^2 + a$ et $Q = X^3 + b$, les deux nombres a, b étant fixés.
On a $P \circ Q = X^6 + 2bX^3 + (a + b^2)$ ainsi que $Q \circ P = X^6 + 3aX^4 + 3a^2X^2 + (a^3 + b)$ et $\deg(P \circ Q) = \deg(Q \circ P) = \deg(P)\deg(Q)$.

Définition 3.6 (Fonction tangente)

On appelle ***fonction tangente*** *l'application notée* **tan** *qui va de* $D_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $\forall\, x \in D_{\tan},\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Définition 3.6 (Fonction tangente)

*On appelle **fonction tangente** l'application notée* **tan** *qui va de* $D_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $\forall\, x \in D_{\tan},\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition 3.7 (Propriétés)

1. *La fonction* tan *est **impaire** et **π-périodique**.*

Définition 3.6 (Fonction tangente)

*On appelle **fonction tangente** l'application notée* **tan** *qui va de* $D_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $\forall x \in D_{\tan},\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition 3.7 (Propriétés)

1. *La fonction* tan *est **impaire** et **π-périodique**.*
2. *La fonction* tan *est **dérivable** sur* $D_{\tan}$*, de dérivée :*

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Définition 3.6 (Fonction tangente)

*On appelle **fonction tangente** l'application notée* **tan** *qui va de* $D_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $\forall x \in D_{\tan},\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition 3.7 (Propriétés)

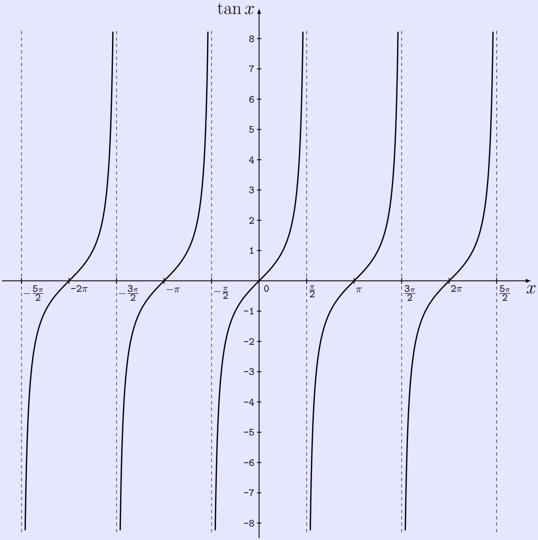
1. *La fonction* tan *est **impaire** et **π-périodique**.*
2. *La fonction* tan *est **dérivable** sur* $D_{\tan}$*, de dérivée :*
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$
3. *La fonction* tan *est **strictement croissante** sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

Définition 3.6 (Fonction tangente)

*On appelle **fonction tangente** l'application notée* **tan** *qui va de* $D_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $\forall x \in D_{\tan}$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition 3.7 (Propriétés)

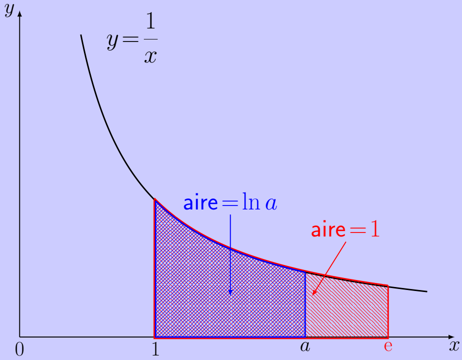
1. *La fonction* tan *est **impaire** et **π-périodique**.*
2. *La fonction* tan *est **dérivable** sur* $D_{\tan}$*, de dérivée :*
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$
3. *La fonction* tan *est **strictement croissante** sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.
5. *Pour tout* $(a, b) \in D_{\tan}^2$ *tel que* $a + b \in D_{\tan}$*, et tout* $x \in D_{\tan}$ *tel que* $\frac{\pi}{2} - x \in D_{\tan}$ *:*
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$



Courbe représentative de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$

Définition 3.8 (Fonction logarithme népérien)

Pour tout réel strictement positif a, on appelle ***logarithme naturel*** *ou encore* ***logarithme népérien*** *de a le nombre noté* $\ln a$ *égal à l'aire comprise entre la courbe d'équation* $y = \frac{1}{x}$*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = a$ *dans un repère orthonormal.*



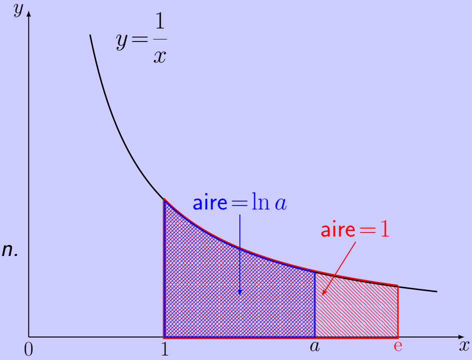
Définition 3.8 (Fonction logarithme népérien)

*Pour tout réel strictement positif a, on appelle **logarithme naturel** ou encore **logarithme népérien** de a le nombre noté $\ln a$ égal à l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$ dans un repère orthonormal.*

On note e *le nombre tel que* $\ln \mathrm{e} = 1$.

e *est appelé **base** du logarithme népérien.*

Numériquement : $\mathrm{e} = 2,7182818\dots$

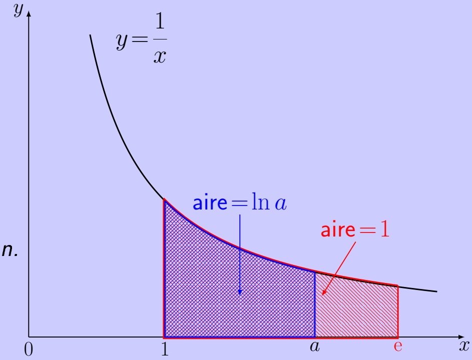


Définition 3.8 (Fonction logarithme népérien)

*Pour tout réel strictement positif a, on appelle **logarithme naturel** ou encore **logarithme népérien** de a le nombre noté $\ln a$ égal à l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$ dans un repère orthonormal.*

On note e *le nombre tel que* $\ln \mathrm{e} = 1$.
e *est appelé **base** du logarithme népérien.*
Numériquement : $\mathrm{e} = 2,7182818\ldots$

Cette quantité définit une application $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que pour tout réel strictement positif :* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

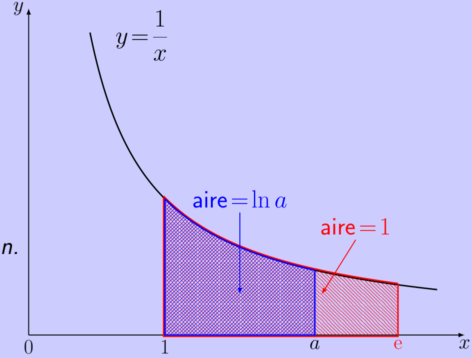


Définition 3.8 (Fonction logarithme népérien)

Pour tout réel strictement positif a, on appelle ***logarithme naturel*** *ou encore* ***logarithme népérien*** *de a le nombre noté* $\ln a$ *égal à l'aire comprise entre la courbe d'équation* $y = \dfrac{1}{x}$*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = a$ *dans un repère orthonormal.*

On note e *le nombre tel que* $\ln \mathrm{e} = 1$.
e *est appelé* ***base*** *du logarithme népérien.*
Numériquement : $\mathrm{e} = 2,7182818\ldots$

Cette quantité définit une application $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que pour tout réel strictement positif :* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.



Proposition 3.9 (Propriétés)

Pour tous réels x et x′ strictement positifs et tout entier relatif n, on a :

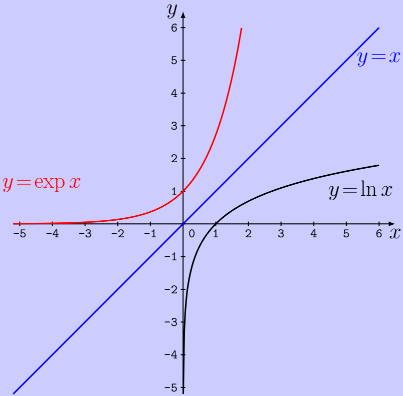
- $\ln(xx') = \ln x + \ln x'$
- $\ln\left(\dfrac{x}{x'}\right) = \ln x - \ln x'$
- $\ln(x^n) = n \ln x$

Définition 3.10 (Fonctions logarithme/exponentielle)

*La fonction **logarithme népérien** définit une bijection de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.

*Sa bijection réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$.

On note aussi $\exp(x) = e^x$.



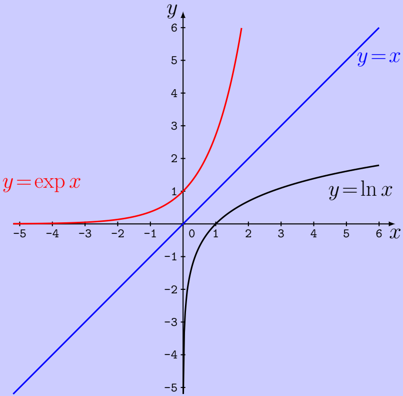
Définition 3.10 (Fonctions logarithme/exponentielle)

*La fonction **logarithme népérien** définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

*Sa bijection réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$*.*

On note aussi $\exp(x) = \mathrm{e}^x$*.*

On a pour tout réel x *:* $\exp'(x) = \exp(x)$*.*



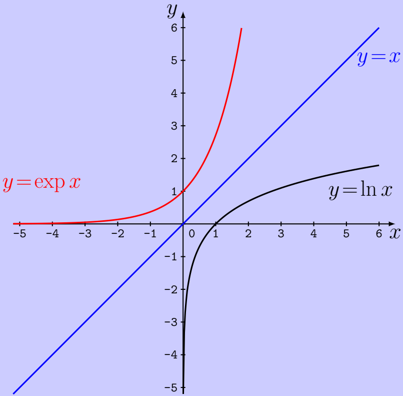
Définition 3.10 (Fonctions logarithme/exponentielle)

*La fonction **logarithme népérien** définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.

*Sa bijection réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$.

On note aussi $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

On a pour tout réel x *:* $\exp'(x) = \exp(x)$.



Proposition 3.11 (Propriétés)

Pour tous réels x *et* x' *et tout entier relatif* n*, on a :*

- $\mathrm{e}^{x+x'} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{x'}$
- $\mathrm{e}^{x-x'} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x'}}$
- $\left(\mathrm{e}^x\right)^n = \mathrm{e}^{nx}$

Définition 3.12 (Exponentielle complexe)

*Soit a, b deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ selon* $e^{a+\mathrm{i}b} = e^a\, e^{\mathrm{i}b} = e^a(\cos b + \mathrm{i} \sin b)$.

Définition 3.12 (Exponentielle complexe)

*Soit a, b deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ selon* $e^{a+\mathrm{i}b} = e^a\, e^{\mathrm{i}b} = e^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$.

Proposition 3.13 (Propriétés)

Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier n, on a :

- $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ *et* $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$ *et* $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

Définition 3.12 (Exponentielle complexe)

*Soit a, b deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $a+\mathrm{i}b$ selon* $e^{a+\mathrm{i}b} = e^a\, e^{\mathrm{i}b} = e^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$.

Proposition 3.13 (Propriétés)

Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier n, on a :

- $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ *et* $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$ *et* $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

En particulier, pour tout nombre réel θ et tout nombre entier n, on a (formule de de Moivre) :

$$\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta} \quad \text{ou encore} \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Définition 3.12 (Exponentielle complexe)

*Soit a, b deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ selon* $e^{a+\mathrm{i}b} = e^a\, e^{\mathrm{i}b} = e^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$.

Proposition 3.13 (Propriétés)

Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier n, on a :

- $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ *et* $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$ *et* $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

En particulier, pour tout nombre réel θ et tout nombre entier n, on a (formule de de Moivre) :

$$\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta} \quad \textit{ou encore} \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Exemple 3.14

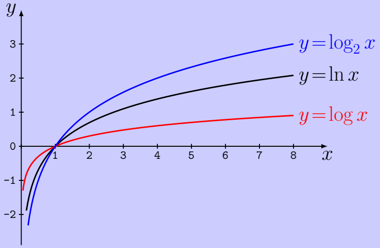
La formule de de Moivre donne :

- pour $n = 3$: $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$;
- pour $n = 4$: $\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ et $\sin(4\theta) = 4\sin\theta(2\cos^3\theta - \cos\theta)$.

Définition 3.15 (Fonctions logarithmes)

Soit a *et* b *des réels strictement positifs,* b *étant* ***différent de 1***.

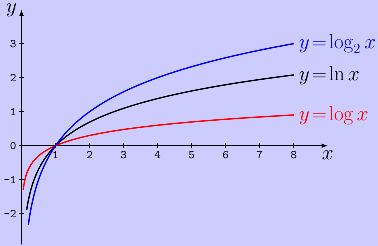
On note $\log_b(a)$ *(et on lit : « log de* a *en base* b *») le nombre* $\dfrac{\ln a}{\ln b}$.



Définition 3.15 (Fonctions logarithmes)

*Soit a et b des réels strictement positifs, b étant **différent de 1**.*

On note $\log_b(a)$ (et on lit : « log de a en base b ») le nombre $\dfrac{\ln a}{\ln b}$.



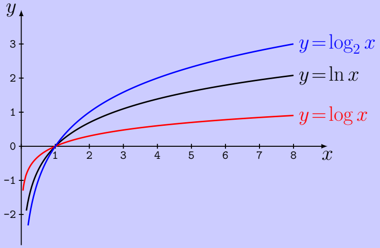
Cas particuliers :

- *lorsque $b = \mathrm{e}$, $\log_{\mathrm{e}}$ est le logarithme **népérien** ;*
- *lorsque $b = 2$, $\log_2$ est appelé logarithme **binaire** (utilisé notamment en informatique, théorie de l'information...) ;*
- *lorsque $b = 10$, $\log_{10}$ est appelé logarithme **décimal** (noté simplement $\log$, utilisé notamment en chimie (pH), acoustique (décibel)...).*

Définition 3.15 (Fonctions logarithmes)

Soit a et b des réels strictement positifs, b étant ***différent de 1****.*

On note $\log_b(a)$ *(et on lit : « log de a en base b ») le nombre* $\dfrac{\ln a}{\ln b}$.



Cas particuliers :

- *lorsque $b = \mathrm{e}$, $\log_\mathrm{e}$ est le logarithme* ***népérien****;*
- *lorsque $b = 2$, $\log_2$ est appelé logarithme* ***binaire*** *(utilisé notamment en informatique, théorie de l'information...);*
- *lorsque $b = 10$, $\log_{10}$ est appelé logarithme* ***décimal*** *(noté simplement* log*, utilisé notamment en chimie (pH), acoustique (décibel)...).*

Proposition 3.16 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs, tout réel b strictement positif différent de 1 et tout entier relatif n, on a :

- $\log_b(aa') = \log_b a + \log_b a'$
- $\log_b\left(\dfrac{a}{a'}\right) = \log_b a - \log_b a'$
- $\log_b(a^n) = n \log_b a$

Définition 3.17 (Exponentiation)

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque.
On note a^b (et on lit : « a exposant b ») le nombre positif $e^{b \ln a}$.

Définition 3.17 (Exponentiation)

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque.
On note a^b (et on lit : « a exposant b ») le nombre positif $e^{b\ln a}$.

Proposition 3.18 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs et tous réels b et b', on a :

- $\ln(a^b) = b\ln a$
- $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$ et $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- $(aa')^b = a^b a'^b$ et $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^b = \dfrac{a^b}{a'^b}$
- $\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$ et $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^b$

Définition 3.17 (Exponentiation)

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque.
On note a^b (et on lit : « a exposant b ») le nombre positif $e^{b \ln a}$.

Proposition 3.18 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs et tous réels b et b', on a :

- $\ln(a^b) = b \ln a$
- $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$ et $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- $(aa')^b = a^b a'^b$ et $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^b = \dfrac{a^b}{a'^b}$
- $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ et $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^b$

En particulier, pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n non nul, on retrouve $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Définition 3.17 (Exponentiation)

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque.
On note a^b (et on lit : « a exposant b ») le nombre positif $e^{b\ln a}$.

Proposition 3.18 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs et tous réels b et b', on a :

- $\ln(a^b) = b\ln a$
- $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$ et $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- $(aa')^b = a^b a'^b$ et $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^b = \dfrac{a^b}{a'^b}$
- $\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$ et $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^b$

En particulier, pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n non nul, on retrouve $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Remarque 3.19 (Exponentiation en chaîne)

L'exponentiation n'est **ni commutative ni associative** :
en général on a $a^b \neq b^a$ et $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$.

Définition 3.20 (Fonctions exponentielles)

Soit a un réel strictement positif. On appelle ***fonction exponentielle de base a*** *l'application de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, notée $\exp_a$, définie par $\exp_a(x) = a^x$.*

Définition 3.20 (Fonctions exponentielles)

Soit a un réel strictement positif. On appelle ***fonction exponentielle de base a*** *l'application de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, notée $\exp_a$, définie par $\exp_a(x) = a^x$.*

Proposition 3.21 (Propriétés)

Soit a un réel strictement positif et $\exp_a$ la fonction exponentielle de base a.

1. $\exp_a$ *est* ***dérivable*** *sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\exp_a' : x \mapsto (\ln a)a^x$.*

Définition 3.20 (Fonctions exponentielles)

Soit a un réel strictement positif. On appelle ***fonction exponentielle de base a*** *l'application de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, notée $\exp_a$, définie par $\exp_a(x) = a^x$.*

Proposition 3.21 (Propriétés)

Soit a un réel strictement positif et $\exp_a$ la fonction exponentielle de base a.

1. $\exp_a$ *est* ***dérivable*** *sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\exp_a' : x \mapsto (\ln a)a^x$.*
2. *Pour $0 < a < 1$, $\exp_a$ est* ***strictement décroissante*** *sur $\mathbb{R}$ avec*
$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = 0.$$
3. *Pour $a > 1$, $\exp_a$ est* ***strictement croissante*** *sur $\mathbb{R}$ avec*
$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = +\infty.$$

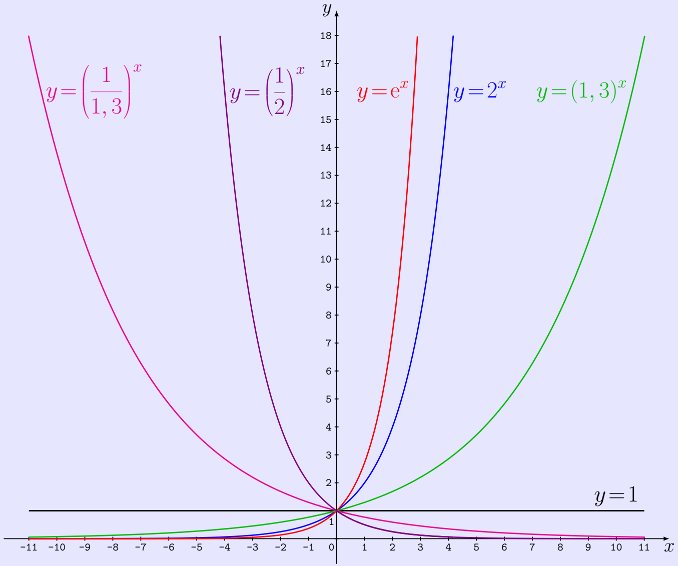
Définition 3.20 (Fonctions exponentielles)

Soit a un réel strictement positif. On appelle ***fonction exponentielle de base a*** *l'application de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, notée $\exp_a$, définie par $\exp_a(x) = a^x$.*

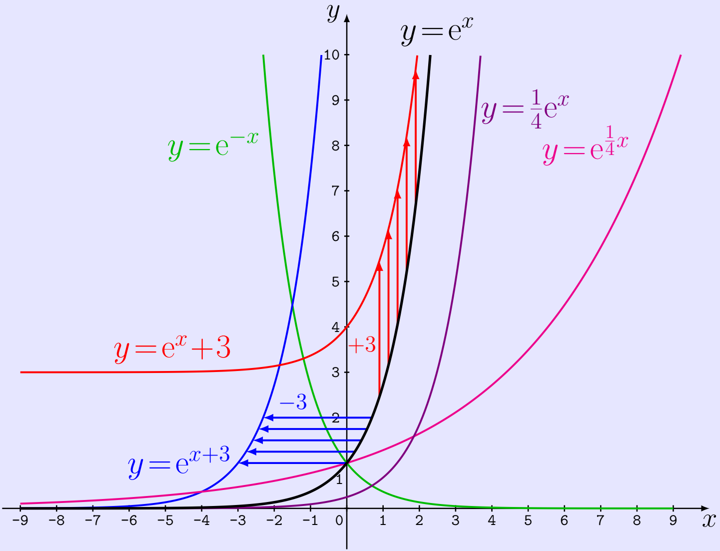
Proposition 3.21 (Propriétés)

Soit a un réel strictement positif et $\exp_a$ la fonction exponentielle de base a.

1. $\exp_a$ *est* ***dérivable*** *sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\exp_a' : x \mapsto (\ln a)a^x$.*
2. *Pour $0 < a < 1$, $\exp_a$ est* ***strictement décroissante*** *sur $\mathbb{R}$ avec*
$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = 0.$$
3. *Pour $a > 1$, $\exp_a$ est* ***strictement croissante*** *sur $\mathbb{R}$ avec*
$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = +\infty.$$
4. *Les courbes de $\exp_a$ et $\exp_{\frac{1}{a}}$ sont* ***symétriques*** *l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.*



Courbes représentatives de quelques fonctions exponentielles



Courbes représentatives de quelques fonctions exponentielles

Définition 3.22 (Fonctions puissances)

Soit a un réel quelconque. On appelle ***fonction puissance d'exposant a*** *l'application de* $]0,+\infty[$ *dans* $]0,+\infty[$ *qui à tout réel $x > 0$ associe le réel x^a.*

Définition 3.22 (Fonctions puissances)

Soit a un réel quelconque. On appelle ***fonction puissance d'exposant a*** *l'application de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ qui à tout réel $x>0$ associe le réel x^a.*

Proposition 3.23 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant a est :

1. ***dérivable*** *sur $]0,+\infty[$ de fonction dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$;*

Définition 3.22 (Fonctions puissances)

Soit a un réel quelconque. On appelle ***fonction puissance d'exposant a*** *l'application de* $]0,+\infty[$ *dans* $]0,+\infty[$ *qui à tout réel* $x>0$ *associe le réel* x^a.

Proposition 3.23 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant a est :

1. ***dérivable*** *sur* $]0,+\infty[$ *de fonction dérivée* $x \mapsto ax^{a-1}$;
2. ***strictement croissante*** *sur* $]0,+\infty[$ ***si*** $\mathbf{a>0}$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$;
3. ***strictement décroissante*** *sur* $]0,+\infty[$ ***si*** $\mathbf{a<0}$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$;

Définition 3.22 (Fonctions puissances)

Soit a un réel quelconque. On appelle ***fonction puissance d'exposant a*** *l'application de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ qui à tout réel $x>0$ associe le réel x^a.*

Proposition 3.23 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant a est :

1. ***dérivable*** *sur* $]0,+\infty[$ *de fonction dérivée* $x \mapsto ax^{a-1}$;
2. ***strictement croissante*** *sur* $]0,+\infty[$ ***si*** $\mathbf{a>0}$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a = +\infty$;
3. ***strictement décroissante*** *sur* $]0,+\infty[$ ***si*** $\mathbf{a<0}$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a = 0$;
4. ***bijective*** *lorsque* $a \neq 0$ *de réciproque la fonction puissance d'exposant* $\dfrac{1}{a}$.

Définition 3.22 (Fonctions puissances)

Soit a un réel quelconque. On appelle ***fonction puissance d'exposant a*** *l'application de* $]0,+\infty[$ *dans* $]0,+\infty[$ *qui à tout réel* $x>0$ *associe le réel* x^a.

Proposition 3.23 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant a est :

1. ***dérivable*** *sur* $]0,+\infty[$ *de fonction dérivée* $x \mapsto ax^{a-1}$;
2. ***strictement croissante*** *sur* $]0,+\infty[$ ***si*** $\mathbf{a>0}$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a=0$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a=+\infty$;
3. ***strictement décroissante*** *sur* $]0,+\infty[$ ***si*** $\mathbf{a<0}$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a=0$;
4. ***bijective*** *lorsque* $a\neq 0$ *de réciproque la fonction puissance d'exposant* $\dfrac{1}{a}$.

Remarque 3.24 (Extension (facultatif))

Pour tout entier **impair** n, la fonction puissance d'exposant n peut se prolonger en une bijection définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la fonction puissance d'exposant $\dfrac{1}{n}$ sur $\mathbb{R}$ comme réciproque. En particulier : $\forall x\in\mathbb{R},\ (-x)^{\frac{1}{n}} = -x^{\frac{1}{n}}$.

Définition 3.22 (Fonctions puissances)

Soit a un réel quelconque. On appelle ***fonction puissance d'exposant a*** *l'application de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ qui à tout réel $x>0$ associe le réel x^a.*

Proposition 3.23 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant a est :

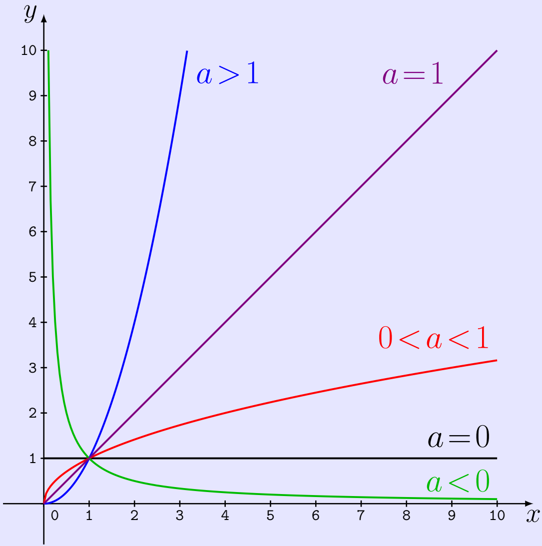
1. ***dérivable*** *sur $]0,+\infty[$ de fonction dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$;*
2. ***strictement croissante*** *sur $]0,+\infty[$* ***si $a>0$*** *avec $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$;*
3. ***strictement décroissante*** *sur $]0,+\infty[$* ***si $a<0$*** *avec $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$;*
4. ***bijective*** *lorsque $a \neq 0$ de réciproque la fonction puissance d'exposant $\dfrac{1}{a}$.*

Remarque 3.24 (Extension (facultatif))

Pour tout entier **impair** n, la fonction puissance d'exposant n peut se prolonger en une bijection définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la fonction puissance d'exposant $\dfrac{1}{n}$ sur $\mathbb{R}$ comme réciproque. En particulier : $\forall x \in \mathbb{R},\ (-x)^{\frac{1}{n}} = -x^{\frac{1}{n}}$.

Plus généralement, on peut définir pour tout rationnel de la forme $\frac{p}{2q+1}$ où p et q sont deux entiers, la fonction puissance d'exposant $\frac{p}{2q+1}$ selon

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^{\frac{p}{2q+1}} = \left(x^{\frac{1}{2q+1}}\right)^p.$$



Courbes représentatives de quelques fonctions puissances

Définition 3.25 (Fonctions hyperboliques)

1. *On appelle* ***fonction cosinus hyperbolique****, notée* ch *(ou* cosh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $[1, +\infty[$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Définition 3.25 (Fonctions hyperboliques)

1. *On appelle **fonction cosinus hyperbolique**, notée* ch *(ou* cosh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $[1, +\infty[$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. *On appelle **fonction sinus hyperbolique**, notée* sh *(ou* sinh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Définition 3.25 (Fonctions hyperboliques)

1. *On appelle* ***fonction cosinus hyperbolique****, notée* ch *(ou* cosh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $[1, +\infty[$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. *On appelle* ***fonction sinus hyperbolique****, notée* sh *(ou* sinh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. *On appelle* ***fonction tangente hyperbolique****, notée* th *(ou* tanh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

Définition 3.25 (Fonctions hyperboliques)

1. *On appelle* ***fonction cosinus hyperbolique****, notée* ch *(ou* cosh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $[1,+\infty[$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. *On appelle* ***fonction sinus hyperbolique****, notée* sh *(ou* sinh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. *On appelle* ***fonction tangente hyperbolique****, notée* th *(ou* tanh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

Proposition 3.26 (Propriétés)

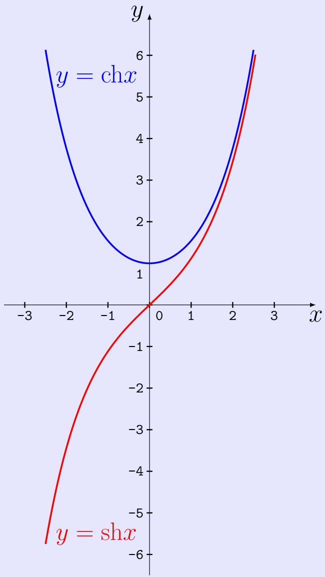
1. *La fonction* ch *est* ***paire, dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée la fonction* sh.
2. *La fonction* sh *est* ***impaire, dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée la fonction* ch.

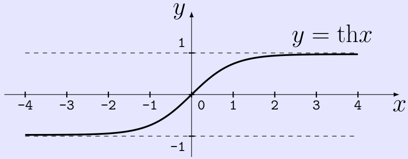
Définition 3.25 (Fonctions hyperboliques)

1. *On appelle* ***fonction cosinus hyperbolique****, notée* ch *(ou* cosh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $[1, +\infty[$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. *On appelle* ***fonction sinus hyperbolique****, notée* sh *(ou* sinh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. *On appelle* ***fonction tangente hyperbolique****, notée* th *(ou* tanh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

Proposition 3.26 (Propriétés)

1. *La fonction* ch *est* ***paire, dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée la fonction* sh.
2. *La fonction* sh *est* ***impaire, dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée la fonction* ch.
3. *La fonction* ch *est* ***strictement décroissante*** *sur* $\mathbb{R}_-$, ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}_+$ *avec* $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.
4. *La fonction* sh *est* ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$.





Courbes représentatives des fonctions ch, sh et th

Proposition 3.27 (Pourquoi les termes « cosinus » et « sinus » dans ch et sh ?)

1. *Pour tous réels a et b :* $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
2. *Pour tous réels a et b :* $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.

Proposition 3.27 (Pourquoi les termes « cosinus » et « sinus » dans ch et sh ?)

1. *Pour tous réels a et b :* $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
2. *Pour tous réels a et b :* $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.
3. *Pour tout réel a :* $\mathrm{ch}^2(a) - \mathrm{sh}^2(a) = 1$.

« Explication » : pour tout réel a : $\mathrm{ch}(a) = \cos(\mathrm{i}a)$ *et* $\mathrm{sh}(a) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}a)$.

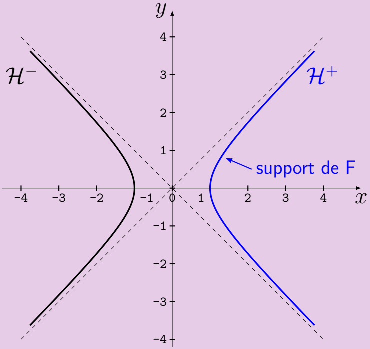
Proposition 3.27 (Pourquoi les termes « cosinus » et « sinus » dans ch et sh ?)

1. *Pour tous réels a et b :* $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
2. *Pour tous réels a et b :* $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.
3. *Pour tout réel a :* $\mathrm{ch}^2(a) - \mathrm{sh}^2(a) = 1$.

« Explication » : pour tout réel a : $\mathrm{ch}(a) = \cos(\mathrm{i}a)$ *et* $\mathrm{sh}(a) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}a)$.

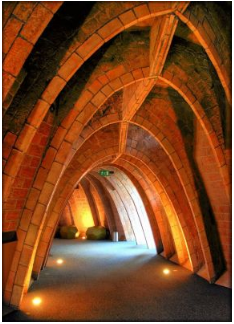
Proposition 3.28 (Pourquoi le terme « hyperbolique » dans ch et sh ?)

*La courbe paramétrée $F : t \mapsto (\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour support une branche de l'**hyperbole** $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$.*



f) La chaînette dans la nature...

Arche de Saint-Louis – Missouri



Voûtes de la Casa Mila
Barcelone

Lignes à haute-tension

Vincent Ganivet : Catène de containers
Le Havre

Arches devant le bâtiment
Sophie Germain – INSA Lyon

Sommaire

Dans ce paragraphe, on suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 4.1 (Courbe paramétrée)

*On définit une **courbe paramétrée** du plan par la donnée d'une application $F : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement une partie de $\mathbb{R}$).*

Plus précisément, l'application F est de la forme $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ où x et y sont des applications de I vers $\mathbb{R}$.

Pour simplifier, on notera $F = (I, x, y)$ la courbe paramétrée ainsi définie.

Dans ce paragraphe, on suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 4.1 (Courbe paramétrée)

On définit une ***courbe paramétrée*** *du plan par la donnée d'une application $F : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement une partie de $\mathbb{R}$).*

Plus précisément, l'application F est de la forme $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ où x et y sont des applications de I vers $\mathbb{R}$.

Pour simplifier, on notera $F = (I, x, y)$ la courbe paramétrée ainsi définie.

- *On appelle* ***support*** *$\mathcal{C}_F$ de la courbe paramétrée F l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ du plan lorsque t décrit I : $\mathcal{C}_F = \{M(x(t), y(t)), t \in I\}$.*

Dans ce paragraphe, on suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition 4.1 (Courbe paramétrée)

*On définit une **courbe paramétrée** du plan par la donnée d'une application $F : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement une partie de $\mathbb{R}$).*

Plus précisément, l'application F est de la forme $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ où x et y sont des applications de I vers $\mathbb{R}$.

Pour simplifier, on notera $F = (I, x, y)$ la courbe paramétrée ainsi définie.

- *On appelle **support** $\mathcal{C}_F$ de la courbe paramétrée F l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ du plan lorsque t décrit I : $\mathcal{C}_F = \{M(x(t), y(t)), t \in I\}$.*
- *On dit que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$, est une **représentation paramétrique** de la courbe F.*

Dans ce paragraphe, on suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition 4.1 (Courbe paramétrée)

*On définit une **courbe paramétrée** du plan par la donnée d'une application $F : I \to \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement une partie de $\mathbb{R}$).*

Plus précisément, l'application F est de la forme $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ où x et y sont des applications de I vers $\mathbb{R}$.

Pour simplifier, on notera $F = (I, x, y)$ la courbe paramétrée ainsi définie.

- *On appelle **support** $\mathcal{C}_F$ de la courbe paramétrée F l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ du plan lorsque t décrit I : $\mathcal{C}_F = \{M(x(t), y(t)), t \in I\}$.*
- *On dit que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$, est une **représentation paramétrique** de la courbe F.*

Remarque 4.2

1. Deux courbes paramétrées distinctes peuvent avoir le même support. On dira alors qu'il s'agit de deux **paramétrages** distincts de ce support.
2. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra confondre les termes **support** et **courbe** pour désigner l'objet géométrique tracé dans le plan.

Exemple 4.3 (Droites/cercles)

1. Droite passant par le point $A(a,b)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$:

représentation **cartésienne**	représentation **paramétrique**
$\beta(x-a) - \alpha(y-b) = 0$	$\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Exemple 4.3 (Droites/cercles)

1. Droite passant par le point $A(a, b)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$:

représentation **cartésienne**	représentation **paramétrique**
$\beta(x-a) - \alpha(y-b) = 0$	$\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

2. Segment d'extrémités les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$:

représentation **paramétrique**

$$\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}, \ t \in [0, 1]$$

Exemple 4.3 (Droites/cercles)

1. Droite passant par le point $A(a, b)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$:

   représentation **cartésienne**

   $$\beta(x-a) - \alpha(y-b) = 0$$

   représentation **paramétrique**

   $$\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Segment d'extrémités les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$:

   représentation **paramétrique**

   $$\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

3. Cercle de centre le point $A(a, b)$ et de rayon $R > 0$:

   représentation **cartésienne**

   $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

   représentation **paramétrique**

   $$\begin{cases} x = R\cos t + a \\ y = R\sin t + b \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Exemple 4.3 (Droites/cercles)

1. Droite passant par le point $A(a,b)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$:

représentation **cartésienne**

$$\beta(x-a) - \alpha(y-b) = 0$$

représentation **paramétrique**

$$\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Segment d'extrémités les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$:

représentation **paramétrique**

$$\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

3. Cercle de centre le point $A(a,b)$ et de rayon $R > 0$:

représentation **cartésienne**

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

représentation **paramétrique**

$$\begin{cases} x = R\cos t + a \\ y = R\sin t + b \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

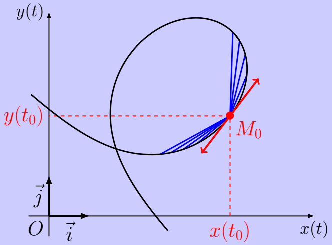
Remarque 4.4 (Paramétrages distincts)

Les courbes paramétrées $\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}, t \in [0,1]$ et $\begin{cases} x = (b_1 - a_1)\sin^2 t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)\sin^2 t + a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ont **même support** (le segment $[A,B]$), mais le premier est décrit **une seule fois** ($t \in [0,1]$) alors que le second est décrit **une infinité de fois** ($t \in \mathbb{R}$).

Définition 4.5 (Tangente)

*La **tangente** en un point $M_0(x(t_0), y(t_0))$ du support d'une courbe paramétrée (I, x, y) est, lorsqu'elle existe, la « **position limite** » des cordes reliant M_0 à des points de la courbe voisins de M_0.*

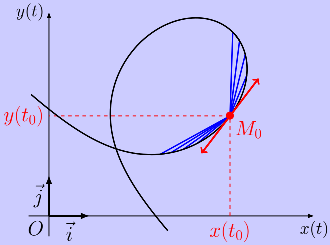
C'est la droite passant par M_0 qui approche le mieux la courbe au voisinage de M_0.



Définition 4.5 (Tangente)

*La **tangente** en un point $M_0(x(t_0), y(t_0))$ du support d'une courbe paramétrée (I, x, y) est, lorsqu'elle existe, la « **position limite** » des cordes reliant M_0 à des points de la courbe voisins de M_0.*

C'est la droite passant par M_0 qui approche le mieux la courbe au voisinage de M_0.



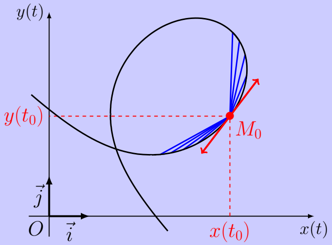
Proposition-définition 4.6 (Tangente)

Soit (I, x, y) une courbe paramétrée et $t_0 \in I$.

Définition 4.5 (Tangente)

*La **tangente** en un point $M_0(x(t_0), y(t_0))$ du support d'une courbe paramétrée (I, x, y) est, lorsqu'elle existe, la « **position limite** » des cordes reliant M_0 à des points de la courbe voisins de M_0.*

C'est la droite passant par M_0 qui approche le mieux la courbe au voisinage de M_0.



Proposition-définition 4.6 (Tangente)

Soit (I, x, y) une courbe paramétrée et $t_0 \in I$.

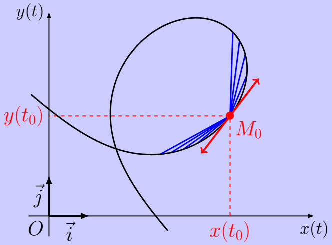
1. *Si les fonctions x et y sont dérivables en t_0 et que **l'une au moins des dérivées en t_0 n'est pas nulle**, alors la **tangente** en M_0 au support est la droite passant par M_0 dirigée par le vecteur $x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$ noté $\vec{F}'(t_0)$.*
   Elle admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \\ Y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Définition 4.5 (Tangente)

*La **tangente** en un point $M_0(x(t_0), y(t_0))$ du support d'une courbe paramétrée (I, x, y) est, lorsqu'elle existe, la **« position limite »** des cordes reliant M_0 à des points de la courbe voisins de M_0.*

C'est la droite passant par M_0 qui approche le mieux la courbe au voisinage de M_0.



Proposition-définition 4.6 (Tangente)

Soit (I, x, y) une courbe paramétrée et $t_0 \in I$.

1. *Si les fonctions x et y sont dérivables en t_0 et que **l'une au moins des dérivées en t_0 n'est pas nulle**, alors la **tangente** en M_0 au support est la droite passant par M_0 dirigée par le vecteur $x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$ noté $\vec{F}'(t_0)$.*
   Elle admet pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} X = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \\ Y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$
2. *Lorsque $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ le point M_0 est dit **régulier**.*
   *Lorsque $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ le point M_0 est dit **singulier** ou **stationnaire**.*

Protocole de construction

Pour tracer le support d'une courbe paramétrée (I, x, y), on suit le protocole suivant :

1. on **réduit** au maximum l'intervalle d'étude I en utilisant des propriétés de symétrie de la courbe ;

Protocole de construction

Pour tracer le support d'une courbe paramétrée (I, x, y), on suit le protocole suivant :

1. on **réduit** au maximum l'intervalle d'étude I en utilisant des propriétés de symétrie de la courbe ;
2. on étudie les **variations simultanées** des fonctions x et y sur l'intervalle réduit ;

t	t_0 $\quad$ t_1
$x'(t)$	$+$
$y'(t)$	$+$
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\nearrow$

t	t_0 $\quad$ t_1
$x'(t)$	$+$
$y'(t)$	$-$
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\searrow$

t	t_0 $\quad$ t_1
$x'(t)$	$-$
$y'(t)$	$+$
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\nearrow$

t	t_0 $\quad$ t_1
$x'(t)$	$-$
$y'(t)$	$-$
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\searrow$

Protocole de construction

Pour tracer le support d'une courbe paramétrée (I, x, y), on suit le protocole suivant :

1. on **réduit** au maximum l'intervalle d'étude I en utilisant des propriétés de symétrie de la courbe ;
2. on étudie les **variations simultanées** des fonctions x et y sur l'intervalle réduit ;

t	t_0 t_1
$x'(t)$	$+$
$y'(t)$	$+$
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\nearrow$

t	t_0 t_1
$x'(t)$	$+$
$y'(t)$	$-$
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\searrow$

t	t_0 t_1
$x'(t)$	$-$
$y'(t)$	$+$
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\nearrow$

t	t_0 t_1
$x'(t)$	$-$
$y'(t)$	$-$
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\searrow$

3. on **commence à tracer** le support en identifiant :
   - des points particuliers (d'éventuels **points singuliers** non étudiés ici) ;
   - les **tangentes** en ces points. En particulier lorsque $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ (resp. $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$), la tangente correspondante est horizontale (resp. verticale) ;
   - d'éventuelles **branches infinies** (non étudiées ici) ;

Protocole de construction

Pour tracer le support d'une courbe paramétrée (I, x, y), on suit le protocole suivant :

1. on **réduit** au maximum l'intervalle d'étude I en utilisant des propriétés de symétrie de la courbe ;
2. on étudie les **variations simultanées** des fonctions x et y sur l'intervalle réduit ;

t	t_0 $\quad$ t_1
$x'(t)$	$+$
$y'(t)$	$+$
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\nearrow$

t	t_0 $\quad$ t_1
$x'(t)$	$+$
$y'(t)$	$-$
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\searrow$

t	t_0 $\quad$ t_1
$x'(t)$	$-$
$y'(t)$	$+$
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\nearrow$

t	t_0 $\quad$ t_1
$x'(t)$	$-$
$y'(t)$	$-$
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\searrow$

3. on **commence à tracer** le support en identifiant :
   - des points particuliers (d'éventuels **points singuliers** non étudiés ici) ;
   - les **tangentes** en ces points. En particulier lorsque $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ (resp. $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$), la tangente correspondante est horizontale (resp. verticale) ;
   - d'éventuelles **branches infinies** (non étudiées ici) ;
4. on **termine le tracé** en appliquant les **symétries** identifiées au début.

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall\, t \in [0, 2\pi],\ F(2\pi - t) = s_O(F(t))$
  où s_O est la symétrie du plan
  par rapport à l'origine O

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall\, t \in [0, 2\pi],\ F(2\pi - t) = s_O(F(t))$
  où s_O est la symétrie du plan
  par rapport à l'origine O

  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\pi, 2\pi]$
  se déduit donc de celui relatif à $[0, \pi]$
  par la symétrie par rapport à O

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall\, t \in [0, 2\pi]$, $F(2\pi - t) = s_O(F(t))$
  où s_O est la symétrie du plan
  par rapport à l'origine O

  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\pi, 2\pi]$
  se déduit donc de celui relatif à $[0, \pi]$
  par la symétrie par rapport à O

  $\Longrightarrow$ première réduction : étude sur $[0, \pi]$

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

Courbe paramétrée $F : \begin{array}{l} [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad t \longmapsto (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall\, t \in [0, 2\pi]$, $F(2\pi - t) = s_O(F(t))$
  où s_O est la symétrie du plan
  par rapport à l'origine O

  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\pi, 2\pi]$
  se déduit donc de celui relatif à $[0, \pi]$
  par la symétrie par rapport à O

  $\Longrightarrow$ première réduction : étude sur $[0, \pi]$

- $\forall\, t \in [0, \pi]$, $F(\pi - t) = s_{Ox}(F(t))$
  où s_{Ox} est la symétrie du plan
  par rapport à l'axe Ox

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall\, t \in [0, 2\pi]$, $F(2\pi - t) = s_O(F(t))$
  où s_O est la symétrie du plan
  par rapport à l'origine O

  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\pi, 2\pi]$
  se déduit donc de celui relatif à $[0, \pi]$
  par la symétrie par rapport à O

  $\Longrightarrow$ première réduction : étude sur $[0, \pi]$

- $\forall\, t \in [0, \pi]$, $F(\pi - t) = s_{Ox}(F(t))$
  où s_{Ox} est la symétrie du plan
  par rapport à l'axe Ox
  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
  se déduit donc de celui relatif à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
  par la symétrie par rapport à Ox

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall\, t \in [0, 2\pi],\ F(2\pi - t) = s_O(F(t))$
  où s_O est la symétrie du plan
  par rapport à l'origine O

  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\pi, 2\pi]$
  se déduit donc de celui relatif à $[0, \pi]$
  par la symétrie par rapport à O

  $\Longrightarrow$ première réduction : étude sur $[0, \pi]$

- $\forall\, t \in [0, \pi],\ F(\pi - t) = s_{Ox}(F(t))$
  où s_{Ox} est la symétrie du plan
  par rapport à l'axe Ox
  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
  se déduit donc de celui relatif à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
  par la symétrie par rapport à Ox

  $\Longrightarrow$ deuxième réduction : étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall\, t \in [0, 2\pi],\ F(2\pi - t) = s_O(F(t))$
  où s_O est la symétrie du plan
  par rapport à l'origine O

  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\pi, 2\pi]$
  se déduit donc de celui relatif à $[0, \pi]$
  par la symétrie par rapport à O

  $\Longrightarrow$ première réduction : étude sur $[0, \pi]$

- $\forall\, t \in [0, \pi],\ F(\pi - t) = s_{Ox}(F(t))$
  où s_{Ox} est la symétrie du plan
  par rapport à l'axe Ox
  $\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
  se déduit donc de celui relatif à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
  par la symétrie par rapport à Ox

  $\Longrightarrow$ deuxième réduction : étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

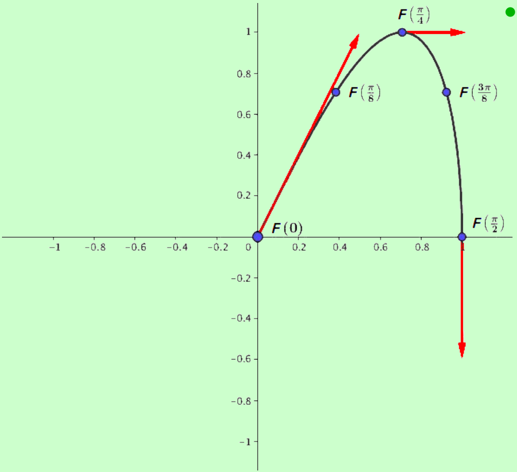
Variations simultanées

$$\vec{F}'(t) = \cos(t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j}$$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1	$+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+$	0
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-2
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

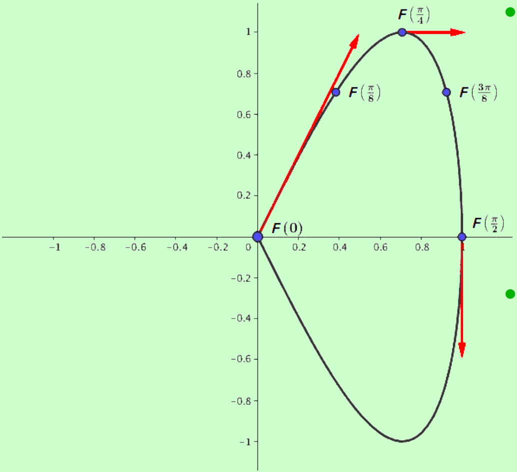
$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$



- **Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**
  - Tangente au point $F(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$
  - Tangente au point $F(\frac{\pi}{4})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}$
  - Tangente au point $F(\frac{\pi}{2})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{2}) = -2\vec{j}$

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$

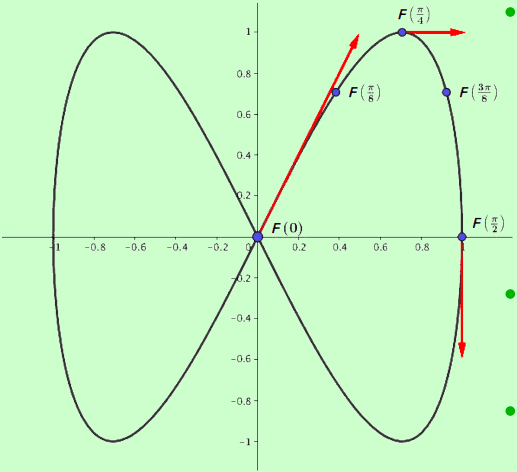


- **Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**
  - Tangente au point $F(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$
  - Tangente au point $F(\frac{\pi}{4})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}$
  - Tangente au point $F(\frac{\pi}{2})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{2}) = -2\vec{j}$
- **Tracé sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$**

  On effectue la symétrie par rapport à l'axe Ox

Exemple 4.7 (Lemniscate de Gerono)

$$\text{Courbe paramétrée } F : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(t), \sin(2t)) \end{array}$$



- **Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**
  - Tangente au point $F(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$
  - Tangente au point $F(\frac{\pi}{4})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}$
  - Tangente au point $F(\frac{\pi}{2})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{2}) = -2\vec{j}$
- **Tracé sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$**

  On effectue la symétrie par rapport à l'axe Ox
- **Tracé sur $[\pi, 2\pi]$**

  On effectue la symétrie par rapport à l'origine O

Courbe paramétrée gauche (facultatif)

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On définit une **courbe paramétrée** de l'espace par la donnée d'une application
$$F : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$
où I est une partie de $\mathbb{R}$ et x, y et z sont des applications de I vers $\mathbb{R}$.

Courbe paramétrée gauche (facultatif)

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On définit une **courbe paramétrée** de l'espace par la donnée d'une application
$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$
où I est une partie de $\mathbb{R}$ et x, y et z sont des applications de I vers $\mathbb{R}$.

- On dit que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in I$, est une **représentation paramétrique** de la courbe F.

Courbe paramétrée gauche (facultatif)

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On définit une **courbe paramétrée** de l'espace par la donnée d'une application

$$F : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

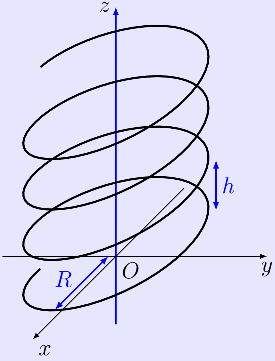
où I est une partie de $\mathbb{R}$ et x, y et z sont des applications de I vers $\mathbb{R}$.

- On dit que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in I$, est une **représentation paramétrique** de la courbe F.

- Si les fonctions x, y et z sont dérivables en t_0 et que **l'une au moins des dérivées en t_0 n'est pas nulle**, alors la **tangente** en M_0 à la courbe est la droite passant par M_0 dirigée par le vecteur $\vec{F}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$.

  Elle admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \\ Y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0) \\ Z = z'(t_0)(t - t_0) + z(t_0) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$



Exemple : **hélice circulaire** d'axe Oz, de rayon R et de pas h

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Mélanges Faros et cryptographie

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_melanges_faros.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Courbes de Lissajous

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lissajous/Lissajous.html

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Courbes cycloïdales

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_cycloides/cycloides0.html

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Présentation Maple

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation_maple_html/presentation_maple0.html

Notions à retenir

- Application/fonction
  - ⋆ Détermination de l'ensemble de définition
  - ⋆ Calculs par composition
- Injection/surjection/bijection
  - ⋆ Maîtrise de ces notions
  - ⋆ Détermination de la réciproque
- Fonctions réelles
  - ⋆ Analyse qualitative des variations
  - ⋆ Tracé de graphes
  - ⋆ Identification de symétries
  - ⋆ Fonctions classiques à connaître
- Courbes paramétrées
  - ⋆ Variations simultanées
  - ⋆ Tracé de courbes
  - ⋆ Identification de symétries