

Compléments sur les fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

1 Généralités

- Applications et fonctions
- Images directe et réciproque
- Restriction, prolongement
- Composition
- Injectivité, surjectivité, bijectivité

2 Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

- Courbe représentative
- Sens de variation
- Parité
- Périodicité
- Bijektivité
- Quelques compositions élémentaires

3 Fonctions usuelles

- Fonctions polynômes
- Fonction tangente
- Fonctions logarithmes
- Fonctions exponentielles
- Fonctions puissances
- Fonctions hyperboliques

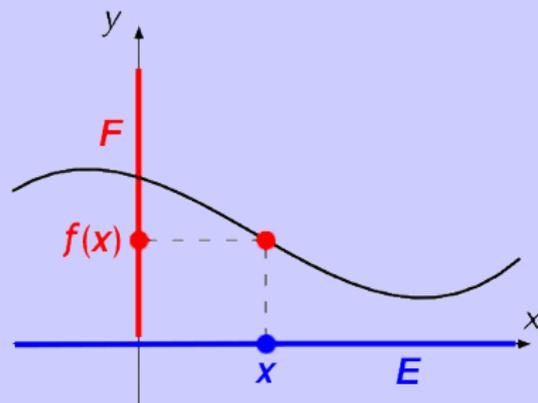
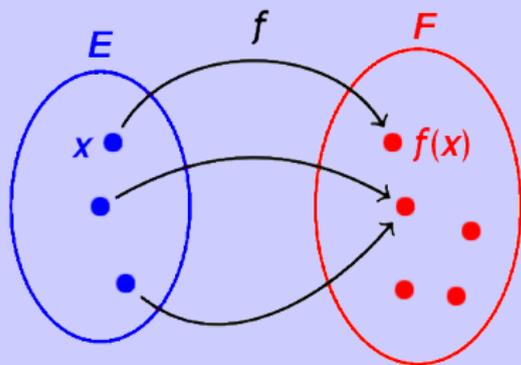
4 Courbes paramétrées planes

- Définitions
- Tangente
- Construction
- Un exemple

- 1 Généralités
 - Applications et fonctions
 - Images directe et réciproque
 - Restriction, prolongement
 - Composition
 - Injectivité, surjectivité, bijectivité
- 2 Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
- 3 Fonctions usuelles
- 4 Courbes paramétrées planes

Définition 1.1 (Applications/Fonctions)

- ① Une **application** f d'un ensemble E dans un ensemble F est une correspondance qui à tout élément x de E associe un élément noté $f(x)$ appartenant à F .
- Les ensembles E et F sont respectivement appelés **ensemble de départ** et **ensemble d'arrivée** de l'application f .
 - Pour tout élément $x \in E$, l'élément $f(x)$ est **l'image** de x par f .

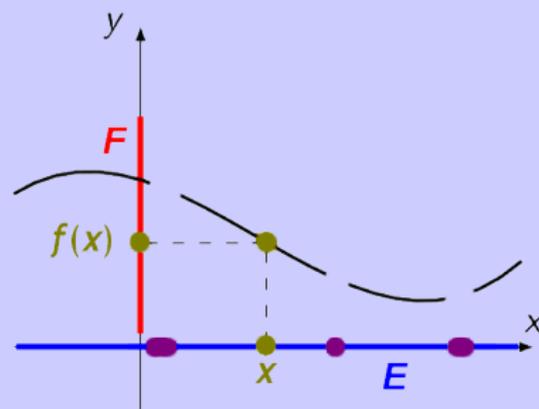
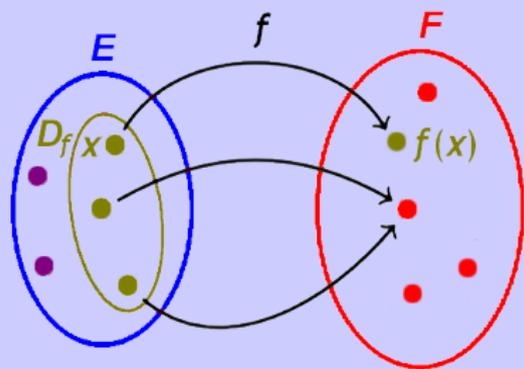


Définition 1.1 (Applications/Fonctions)

② Une **fonction** f de E dans F est une application d'une partie \mathcal{D}_f d'un ensemble E dans un ensemble F . L'ensemble \mathcal{D}_f est alors appelé **ensemble de définition** de la fonction f .

En d'autres termes, une **fonction** de E dans F est une correspondance qui à tout élément de E associe **au plus** un élément de F .

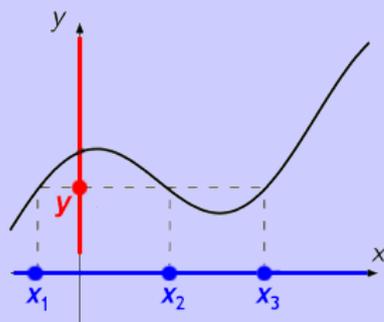
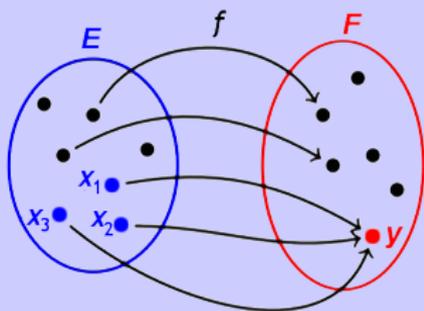
- Les ensembles E et F sont respectivement appelés **ensemble de départ** et **ensemble d'arrivée** de la fonction f .
- Pour tout élément $x \in \mathcal{D}_f$, l'élément $f(x)$ est **l'image** de x par f .



Définition 1.2 (Antécédents)

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

- ① Pour tout élément $y \in F$, s'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$, l'élément x est **un antécédent** de y par f .



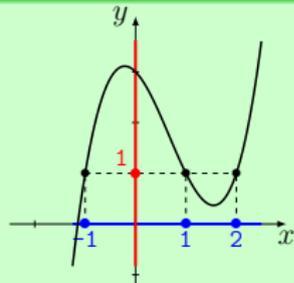
Exemple 1.3

Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (x+1)(x-1)(x-2) + 1$$

Les antécédents de **1** sont **-1, 1, 2** :

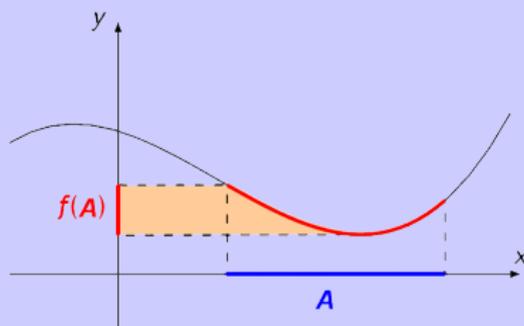
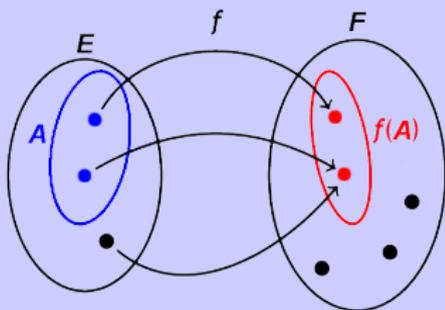
$$f(-1) = f(1) = f(2) = 1.$$



Définition 1.4 (Image directe)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et A une partie de E .

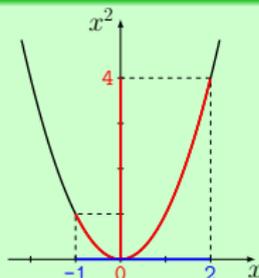
- ② L'**image directe** de A par f est l'ensemble noté $f(A)$ constitué des images par f des éléments de A : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.



Exemple 1.5 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto x^2$

On a $f([-1, 2]) = [0, 4]$.

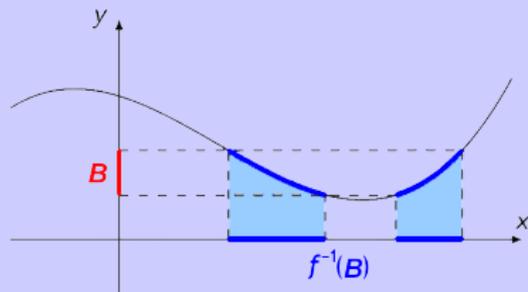
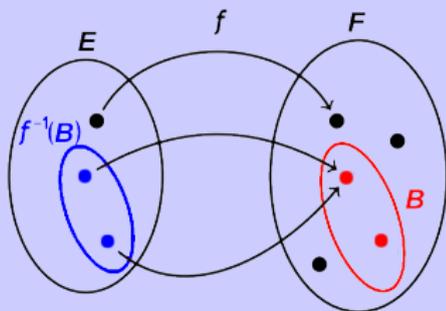


Définition 1.6 (Image réciproque)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et B une partie de F .

- ③ L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ constitué des antécédents par f des éléments de B :

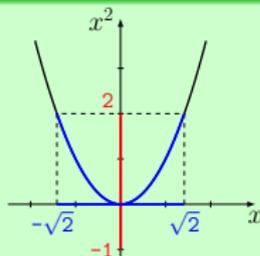
$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$



Exemple 1.7 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto x^2$

On a $f^{-1}([-1, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.



Définition 1.8 (Restriction/Prolongement)

Soit une application $f : E \rightarrow F$.

- ① Si A est une partie de E , on appelle **restriction** de f à A l'application de A dans F , notée $f|_A$, définie par $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$;
- ② Si G est un ensemble contenant E , on appelle **prolongement** de f à G toute application g de G dans F dont la restriction à E est $f : g|_E = f$.

Exemple 1.9

On considère la **fonction** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

- **Ensemble de définition** de f :
- Les **prolongements** de φ à \mathbb{R} sont les applications $g_a, a \in \mathbb{R}$, définies par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- La **restriction** $\varphi = f|_{\mathcal{D}_f}$ de f à \mathcal{D}_f est l'**application** définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D}_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 3 \end{aligned}$$

$$g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Un prolongement privilégié est donné par

$$\begin{aligned} g_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 3 \end{aligned}$$

C'est le **prolongement par continuité** de f en 1.

Définition 1.10 (Composition)

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- On appelle **composée** de f par g l'application de E dans G notée $g \circ f$ (se lisant « g rond f ») définie par $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Schématiquement :

$$g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

Proposition 1.11 (Associativité)

La loi de composition des applications est **associative** mais **non commutative**.

Si $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ sont trois applications, alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Exemple 1.12 (Applications affines, non commutativité)

Fixons quatre réels a, b, c, d et considérons les **applications affines**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b \quad \quad \quad x \mapsto cx + d$$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = (ac)x + (bc + d)$$

$$(f \circ g)(x) = (ac)x + (ad + b)$$

- Lorsque $b = d = 0$, les applications f et g sont **linéaires** et **commutent** :

$$f \circ g = g \circ f.$$

En général $ad + b \neq bc + d$ et $f \circ g \neq g \circ f$.

Définition 1.13 (Injectivité)

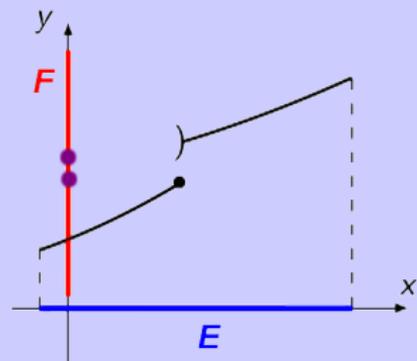
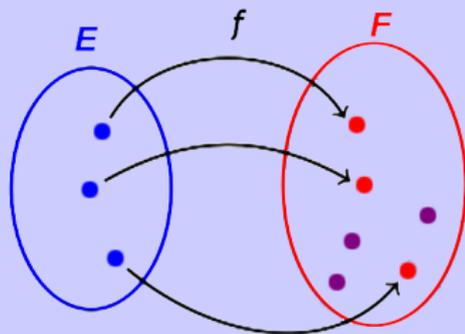
Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

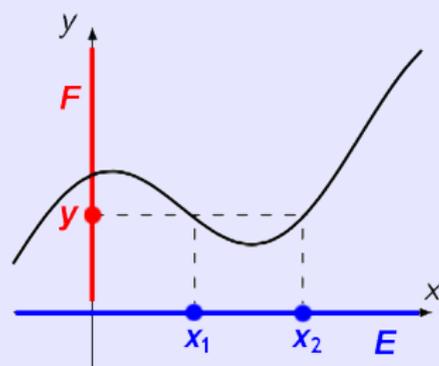
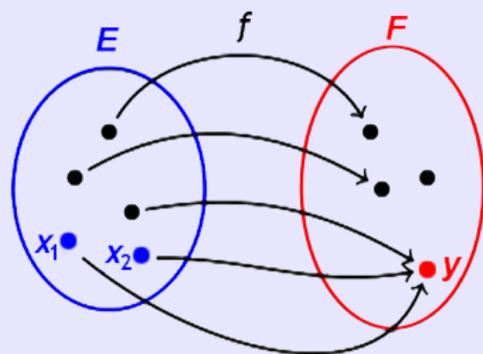
- ① On dit que f est **injective** (ou que f est une **injection**) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **au plus** un antécédent dans E . Autrement dit :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, [x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)],$$

ou encore :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, [f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2].$$





Une application **non injective** :

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2, \quad [x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)].$$

Exemple 1.14 (Fonction « carré »)

- ① Soit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^2$$

On a $-1 \neq 1$ et $(-1)^2 = (1)^2$.

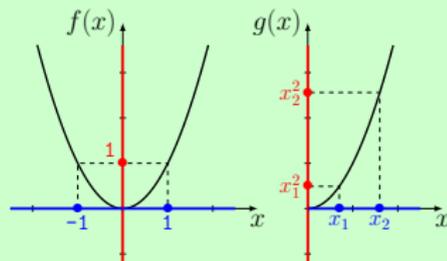
Donc f n'est **pas injective**.

- ② Soit l'application $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. ($g = f|_{\mathbb{R}^+}$)

$$x \mapsto x^2$$

On a $\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, x_1 \neq x_2 \implies (x_1)^2 \neq (x_2)^2$.

Donc g est **injective**.



Définition 1.15 (Surjectivité)

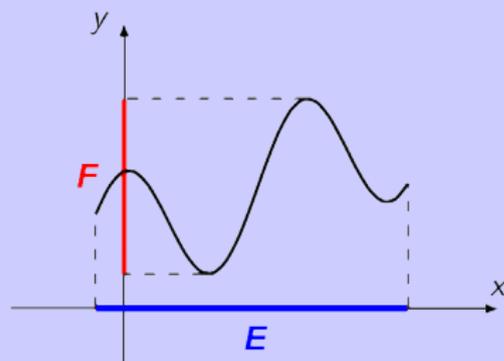
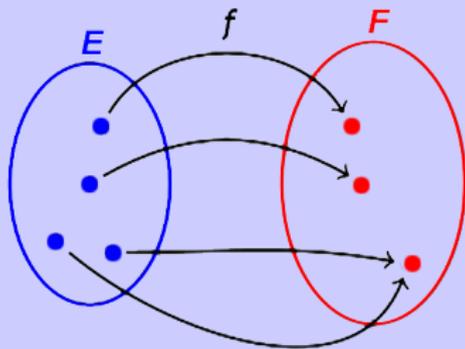
Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

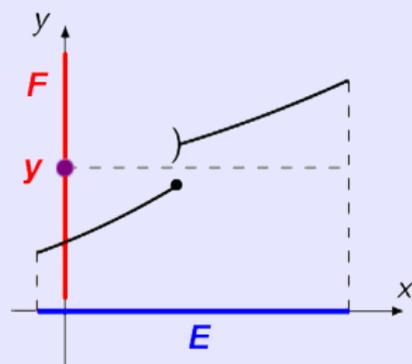
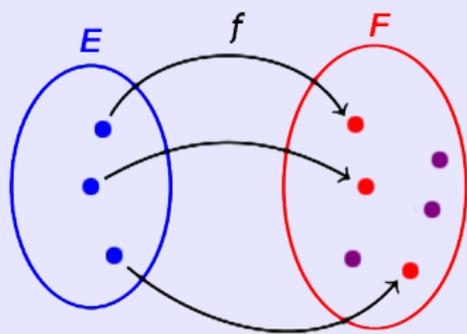
- ② On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection**) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **au moins** un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, [\exists x \in E, y = f(x)].$$

Autrement dit :

$$f(E) = F.$$





Une application **non surjective** :

$$\exists y \in F, [\forall x \in E, y \neq f(x)].$$

Exemple 1.16 (Fonction « carré »)

- ① Soit l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- $$x \mapsto x^2$$

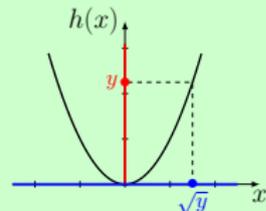
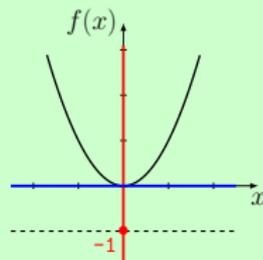
On a $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$.

Donc f n'est **pas surjective**.

- ② Soit l'application $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- $$x \mapsto x^2$$

On a $\forall y \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{y})^2 = y$.

Donc h est **surjective**.



Définition 1.17 (Bijectivité/Réciprocité)

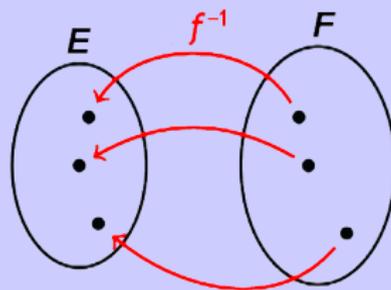
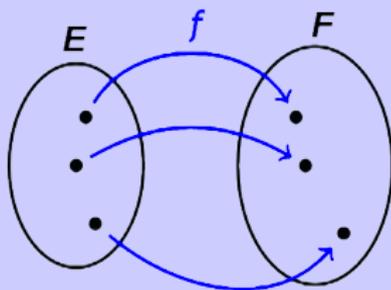
Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- ③ On dit que f est **bijective** (ou que f est une **bijection**) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **exactement** un antécédent dans E , c'est-à-dire lorsqu'elle est à la fois **injective et surjective** :

$$\forall y \in F, \quad [\exists! x \in E, y = f(x)].$$

On note alors $x = f^{-1}(y)$, ce qui définit une application f^{-1} de F dans E appelée **bijection réciproque** de f (ou plus simplement **réciproque** de f). Elle est caractérisée par

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad [y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)].$$



Remarque 1.18 (Bijectivité et image réciproque)

Attention à ne pas confondre les écritures $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(\{y\})$:

- $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des **antécédents** de y par f :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E : f(x) = y\}.$$

Cette notation a un sens même lorsque f n'est pas bijective ;

- lorsque f est **bijective**, on a $\forall y \in F, f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Exemple 1.19 (Fonction « carré »)

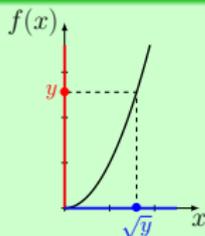
Soit l'application $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.

$$x \mapsto x^2$$

On a $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists! x \in \mathbb{R}^+, x^2 = y$. En effet : $x = \sqrt{y}$.

Donc f est **bijective** de réciproque $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.

$$x \mapsto \sqrt{x}$$



Proposition 1.20 (Bijectivité et composition)

Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux **bijections**.

Alors $g \circ f: E \rightarrow G$ est une **bijection** et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- Le code génétique est un ensemble de règles permettant de **traduire** les informations contenues dans le génome des cellules vivantes afin de synthétiser les protéines. Il établit une correspondance entre le **génotype** et le **phénotype** d'un organisme, soit, entre d'une part, des **triplets de nucléotides**, appelés **codons**, sur l'ARN messenger et d'autre part, les **acides aminés** protéinogènes incorporés dans les protéines synthétisées lors de la phase de **traduction** de l'ARN messenger par les ribosomes.
- Un **ARN** est une molécule constituée de nucléotides de quatre types :
adénine (A), cytosine (C), guanine (G), uracile (U).
 Les différents **acides aminés** sont listés dans le tableau ci-dessous :

Acide aminé	Symbole
Alanine	A
Cystéine	C
Acide aspartique	D
Acide glutamique	E
Phénylalanine	F
Glycine	G
Histidine	H
Isoleucine	I
Lysine	K
Leucine	L

Acide aminé	Symbole
Méthionine	M
Asparagine	N
Proline	P
Glutamine	Q
Arginine	R
Sérine	S
Thréonine	T
Valine	V
Tryptophane	W
Tyrosine	Y

On introduit alors les ensembles $\mathcal{A} = \{A, C, G, U\}$ et

$$\mathcal{M} = \{A, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, V, W, Y, *\}$$

le symbole $*$ désignant un codon de «*terminaison*» (codon STOP).

Exemple 1.21 (Le code génétique)

La phase de traduction peut être représentée par la correspondance

$$f : \mathcal{A}^3 = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$(A_1, A_2, A_3) \longmapsto A_1A_2A_3$$

		2 ^e base								
		A		C		G		U		
A	AAA	K	ACA	T	AGA	R	AUA	I	A	
	AAC	N	ACC	T	AGC	S	AUC	I	C	
	AAG	K	ACG	T	AGG	R	AUG	M	G	
	AAU	N	ACU	T	AGU	S	AUU	I	U	
C	CAA	Q	CCA	P	CGA	R	CUA	L	A	
	CAC	H	CCC	P	CGC	R	CUC	L	C	
	CAG	Q	CCG	P	CGG	R	CUG	L	G	
	CAU	H	CCU	P	CGU	R	CUU	L	U	
G	GAA	E	GCA	A	GGA	G	GUA	V	A	
	GAC	D	GCC	A	GGC	G	GUC	V	C	
	GAG	E	GCG	A	GGG	G	GUG	V	G	
	GAU	D	GCU	A	GGU	G	GUU	V	U	
U	UAA	*	UCA	S	UGA	*	UUA	L	A	
	UAC	Y	UCC	S	UGC	C	UUC	F	C	
	UAG	*	UCG	S	UGG	W	UUG	L	G	
	UAU	Y	UCU	S	UGU	C	UUU	F	U	

Exemple 1.21 (Le code génétique)

- f est une **application** : un codon code l'information pour exactement un acide aminé, on dit que le code génétique est «*cohérent*» ou «*non ambigu*» ;
- f est **surjective** : par définition, tous les acides aminés sont codés à l'aide de codons ;
- Tableau des antécédents des acides aminés par f :

Symbole	Codons
A	GCU, GCC, GCA, GCG
C	UGU, UGC
D	GAU, GAC
E	GAA, GAG
F	UUU, UUC
G	GGU, GGC, GGA, GGG
H	CAU, CAC
I	AUU, AUC, AUA
K	AAA, AAG
L	UUA, UUG, CUU, CUC, CUA, CUG

Symbole	Codons
M	AUG
N	AAU, AAC
P	CCU, CCC, CCA, CCG
Q	CAA, CAG
R	CGU, CGC, CGA, CGG, AGA, AGG
S	UCU, UCC, UCA, UCG, AGU, AGC
T	ACU, ACC, ACA, ACG
V	GUU, GUC, GUA, GUG
W	UGG(UGA)
Y	UAU, UAC
*	UAG, UAA, UGA

Par exemple, les antécédents de l'alanine, l'arginine et l'asparagine sont donnés par

$$f^{-1}(\mathbf{A}) = \{(G, C, U), (G, C, C), (G, C, A), (G, C, G)\}$$

$$f^{-1}(\mathbf{R}) = \{(C, G, U), (C, G, C), (C, G, A), (C, G, G), (A, G, A), (A, G, G)\}$$

$$f^{-1}(\mathbf{N}) = \{(A, A, U), (A, A, C)\}$$

- f n'est **pas injective** : on dit que le code génétique est «*redondant*» ou «*dégénéré*».

Proposition 1.22 (Réciprocité)

Notons Id_A l'application (dite **identité**) qui va d'un ensemble A dans lui-même définie par $\forall x \in A, \text{Id}_A(x) = x$. Pour toute application $f : E \rightarrow F$ **bijective**, on a :

- $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$;
- f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque 1.23 (Réciprocité (facultatif))

- 1 Si $\varphi : E \rightarrow F$ et $\psi : F \rightarrow E$ sont deux applications telles que $\psi \circ \varphi = \text{Id}_E$, alors φ est **injective** et ψ est **surjective**.
- 2 Soit $f : E \rightarrow F$ une application.
S'il existe deux applications $g_1 : F \rightarrow E$ et $g_2 : F \rightarrow E$ telles que $g_1 \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g_2 = \text{Id}_F$ alors $g_1 = g_2$ et f est **bijective** de **réciproque** $g_1 : f^{-1} = g_1 = g_2$.

Exemple 1.24 (Équipotence de \mathbb{N} et \mathbb{Z})

Soit les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ 2|n| - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On a $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$ et $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

Donc f et g sont des bijections **réciproques** l'une de l'autre : $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$.

- 1 Généralités
- 2 Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
 - Courbe représentative
 - Sens de variation
 - Parité
 - Périodicité
 - Bijectivité
 - Quelques compositions élémentaires
- 3 Fonctions usuelles
- 4 Courbes paramétrées planes

Définition 2.1 (Graphe/Courbe)

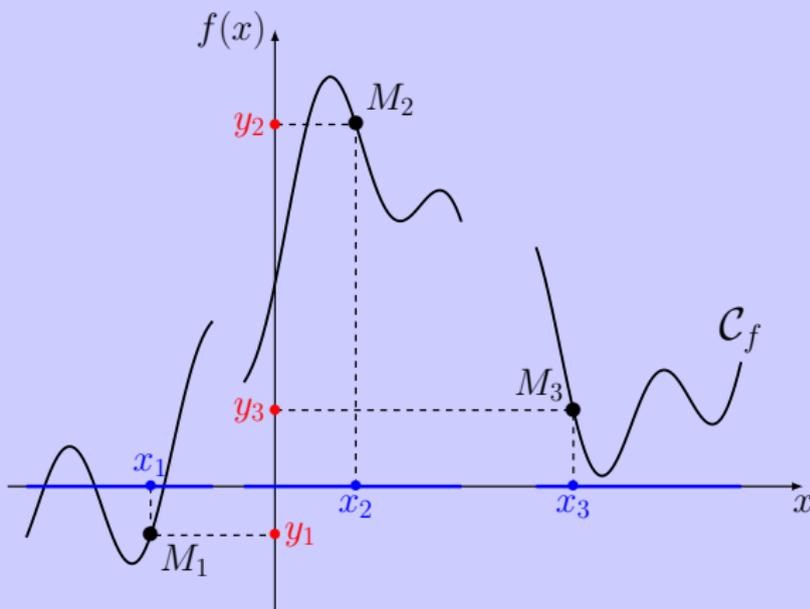
Soit une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où D est une partie de \mathbb{R} .

On appelle **graphe** ou **courbe représentative** de f l'ensemble des points $M(x, f(x))$ du plan repéré lorsque x décrit D . On notera par la suite \mathcal{C}_f cette courbe.

$$y_1 = f(x_1)$$

$$y_2 = f(x_2)$$

$$y_3 = f(x_3)$$



$$M_1 = M(x_1, y_1)$$

$$M_2 = M(x_2, y_2)$$

$$M_3 = M(x_3, y_3)$$

Définition 2.2 (Croissance/Décroissance)

Soient D une partie non vide de \mathbb{R} et f une application de D dans \mathbb{R} .

- ① On dit que f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, [x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (resp. } f(x_1) \geq f(x_2))]$$

ou encore

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, [x_1 \neq x_2 \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \text{ (resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0)].$$

- ② On dit que f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \text{ (resp. } f(x_1) > f(x_2))$$

ou encore

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, [x_1 \neq x_2 \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \text{ (resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0)].$$

- ③ On dit qu'une fonction est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur D lorsqu'elle est **croissante sur D** ou **décroissante sur D** (resp. **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur D).

Définition 2.3 (Suites)

Une **suite à valeurs réelles** est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 2.4 (Croissance/Décroissance)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

- 1 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- 2 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
- 3 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante, la stricte monotonie correspondant à des inégalités strictes au lieu d'inégalités larges.

Proposition 2.5 (Variations et composition)

Soit D et D' deux parties de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow D'$, $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

Alors l'application $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est :

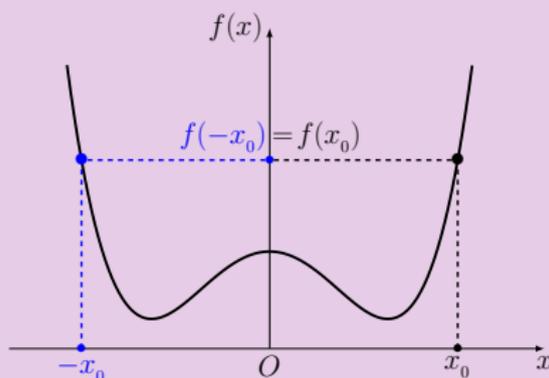
- **croissante** si f et g sont de **même monotonie** (i.e. toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes) ;
- **décroissante** si f et g sont de **monotonie contraires**.

Définition 2.6 (Parité)

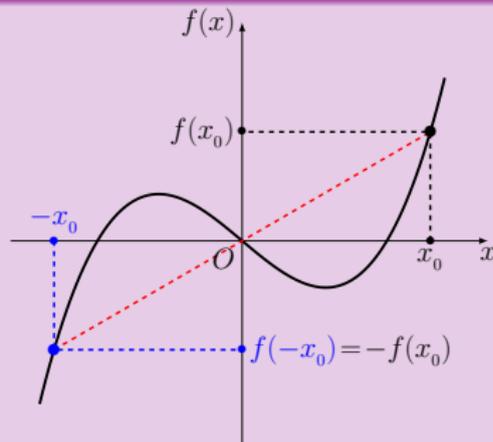
Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application dont l'ensemble de définition D est **symétrique** par rapport à 0 (i.e. $\forall x \in D, -x \in D$).

- 1 On dit que f est une fonction **paire** lorsque $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.
- 2 On dit que f est une fonction **impaire** lorsque $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Proposition 2.7 (Parité et symétries)



Si f est **paire** alors C_f est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.



Si f est **impaire** alors C_f est **symétrique** par rapport à l'origine du repère.

Proposition 2.8 (Parité et opérations)

- ① Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D **symétrique** par rapport à 0.
 - Si f et g sont **paires** (resp. **impaires**), alors $f + g$ est **paire** (resp. **impaire**).
 - Si f et g ont **même parité**, alors $f \times g$ est **paire** ;
si f et g ont des **parités contraires**, alors $f \times g$ est **impaire**.
Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
- ② Soit $f : D \rightarrow D'$ et $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D' **symétriques** par rapport à 0.
 - Si f est **paire**, alors $g \circ f$ est **paire**.
 - Si f est **impaire**, alors $g \circ f$ a la **même parité** que g .
- ③ Soit $f : D \rightarrow D'$ une **bijection impaire** entre deux ensembles D et D' **symétriques** par rapport à 0. Alors f^{-1} est **impaire**.

Exemple 2.9

- ① Pour tout entier **pair** (resp. **impair**) p , la fonction $x \mapsto x^p$ (définie sur \mathbb{R} si $p \in \mathbb{N}$, sur \mathbb{R}^* si $p \in \mathbb{Z}_-$) est **paire** (resp. **impaire**).
- ② La fonction \cos est **paire** et la fonction \sin est **impaire**.
- ③ Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application.
 - L'application $x \mapsto f(\cos x)$ définie sur \mathbb{R} est **paire**.
 - Si f est **paire** (resp. **impaire**), l'application $x \mapsto f(\sin x)$ définie sur \mathbb{R} est **paire** (resp. **impaire**).

Définition 2.10 (Périodicité)

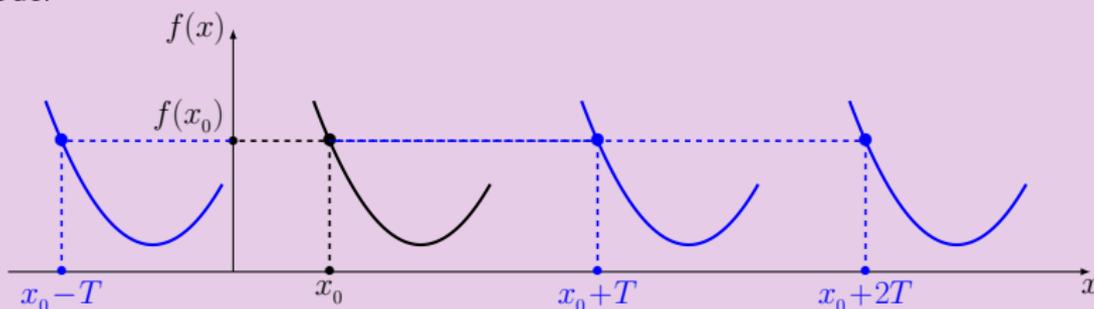
Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application et T un réel positif non nul.

On dit que f est **périodique de période T** (ou qu'elle est T -périodique) lorsque

$$\forall x \in D, x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Proposition 2.11 (Périodicité et symétries)

Si f est **périodique** alors C_f est la répétition à l'infini du même motif tracé sur une période.



Remarque 2.12

Une fonction T -périodique est également nT -périodique pour n'importe quel entier non nul n . "La" période T n'est donc pas unique et pas nécessairement minimale.

Proposition 2.13 (Périodicité et opérations)

Soit T un réel positif non nul.

① Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications T -périodiques.

- Alors $f + g$ et $f \times g$ sont T -périodiques.

Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

Autrement dit, si f et g admettent une période **commune**, $f + g$ et $f \times g$ sont périodiques.

② Soit $f : D \rightarrow D'$ et $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

- Si f est T -périodique, alors $g \circ f$ est T -périodique.

Exemple 2.14

① Les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques.

② Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels.

La fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ est 2π -périodique.

③ Soit T un réel positif non nul, p et q des entiers positifs non nuls.

Soit f et g deux applications de D dans \mathbb{R} resp. pT -périodique et qT -périodique.

Alors $f + g$ et $f \times g$ sont des applications rT -périodiques où $r = \text{ppcm}(p, q)$.

Remarque 2.15 (Périodicité et addition/multiplication (facultatif))

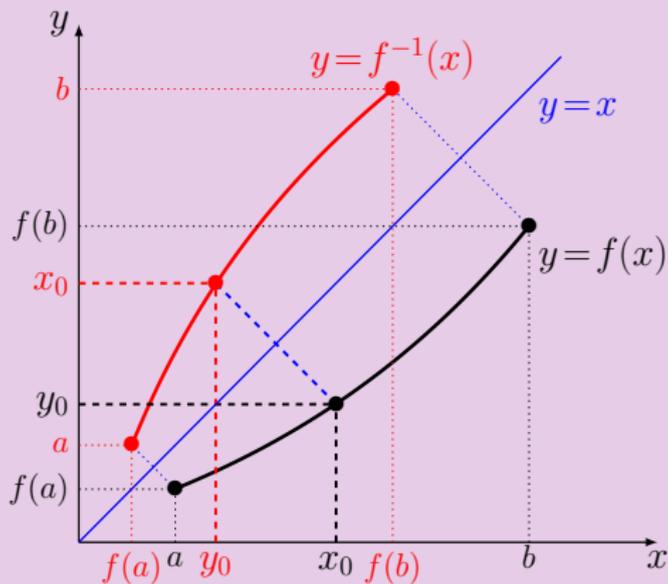
La somme et le produit de deux fonctions périodiques **ne sont** en général **pas** périodiques.

Exemple : pour tout **irrationnel** a , l'application $x \mapsto \cos(x) + \cos(ax)$ **n'est pas** périodique.

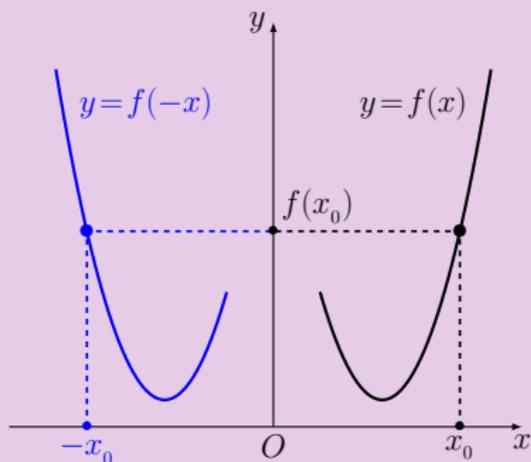
Proposition 2.16 (Bijectivité et symétrie)

Soit $f : D \rightarrow D'$ une **bijection** où D et D' sont deux parties non vides de \mathbb{R} .

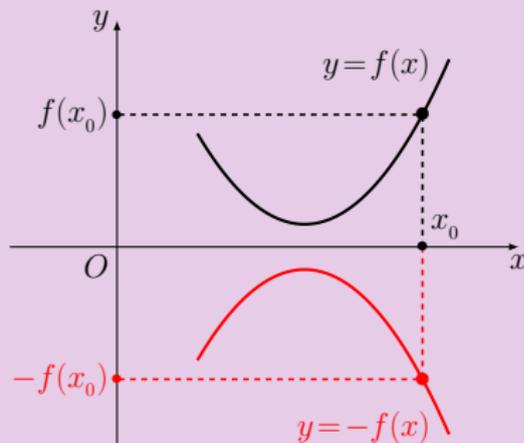
Alors sa courbe représentative et celle de sa réciproque dans un repère orthonormal du plan sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée aussi première bissectrice).



Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(-x)$ 

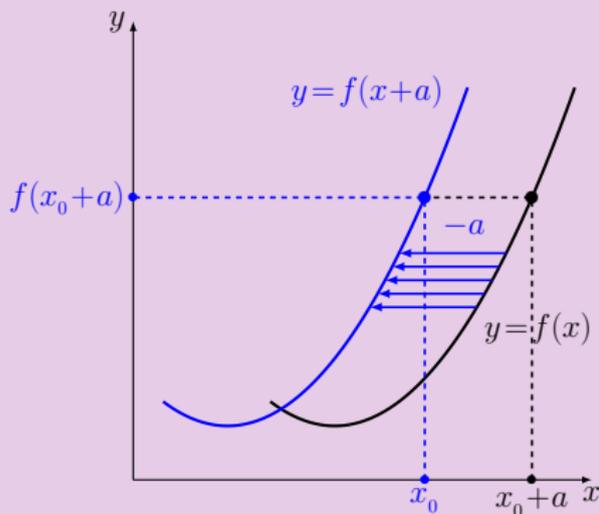
Le graphe de l'application $x \mapsto f(-x)$ est le **symétrique** de C_f par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.

Application $x \mapsto -f(x)$ 

Le graphe de l'application $x \mapsto -f(x)$ est le **symétrique** de C_f par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.

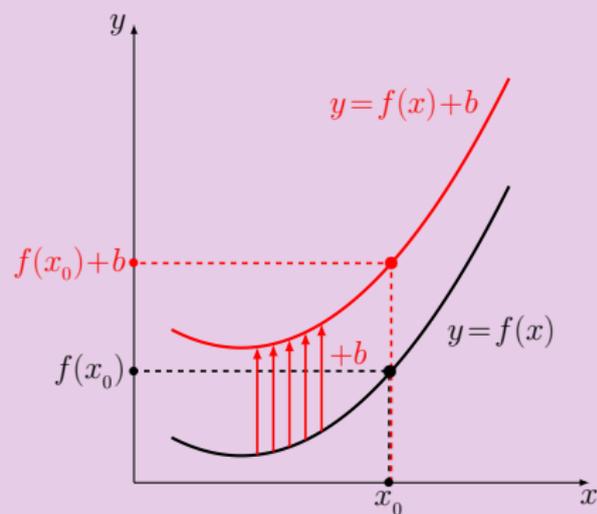
Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(x+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto f(x+a)$ est l'image de C_f par la **translation** de vecteur $-a\vec{i}$ (translation « horizontale »).

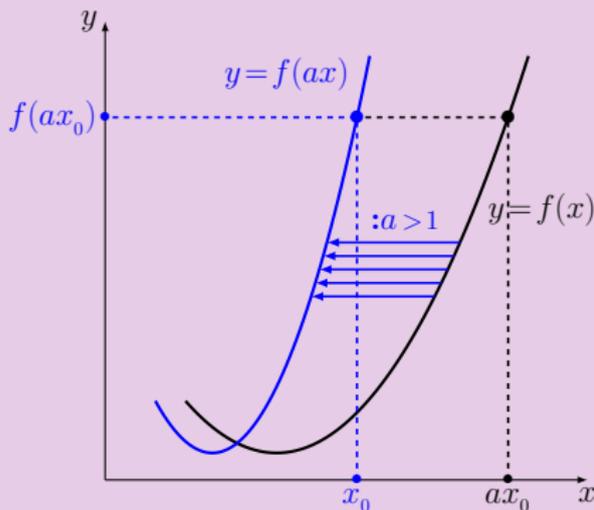
Application $x \mapsto f(x)+b$ avec $b \in \mathbb{R}$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto f(x)+b$ est l'image de C_f par la **translation** de vecteur $b\vec{j}$ (translation « verticale »).

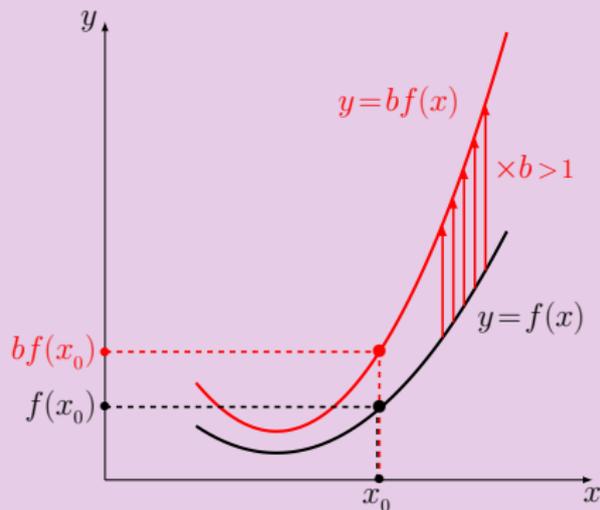
Proposition 2.17 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto f(ax)$ est obtenu par **réduction/agrandissement** dans la direction des abscisses de C_f d'un facteur $|a|$, suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées lorsque $a < 0$.

Application $x \mapsto bf(x)$ avec $b \in \mathbb{R}^*$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto bf(x)$ est obtenu par **agrandissement/réduction** dans la direction des ordonnées de C_f d'un facteur $|b|$, suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses lorsque $b < 0$.

- 1 Généralités
- 2 Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
- 3 Fonctions usuelles
 - Fonctions polynômes
 - Fonction tangente
 - Fonctions logarithmes
 - Fonctions exponentielles
 - Fonctions puissances
 - Fonctions hyperboliques
- 4 Courbes paramétrées planes

Dans ce paragraphe, \mathbb{K} désigne soit l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} soit l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

Définition 3.1 (Fonctions polynômes)

On appelle **fonction polynôme à coefficients dans \mathbb{K}** toute application P de la forme

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{où les } a_k \text{ sont des éléments de } \mathbb{K} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

- Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** de P .
- Lorsque $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** de P et noté $\deg(P)$.
- Si $n = 0$, P est une fonction constante.
Si en plus $a_0 = 0$, on dit que P est **la fonction polynôme nul**.
Par convention, le degré de la fonction polynôme nul est $-\infty$.

Notations :

- L'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans \mathbb{K} se note $\mathbb{K}[X]$.
- On utilise, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation X^k pour désigner la fonction $x \mapsto x^k$ (par convention X^0 est la fonction $x \mapsto 1$).
Cela permet de noter $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ une fonction polynôme quelconque de degré n .

Théorème 3.2 (Égalité)

Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**.

Définition 3.3 (Opérations)

Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . On définit la **somme** $P + Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P+Q)(x) = P(x)+Q(x), (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x), (Q \circ P)(x) = Q(P(x)).$$

Proposition 3.4 (Opérations et degré)

Soit P et Q deux fonctions polynômes. Alors $P + Q$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et

- 1 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$;
de plus, lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- 2 $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$;
- 3 $\deg(Q \circ P) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exemple 3.5 (Illustration des opérations)

- ① Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
 On a $P+Q = (a+2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$ et $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
 (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$). Plus précisément :
- si $a \neq -2$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
 - si $a = -2$, alors $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

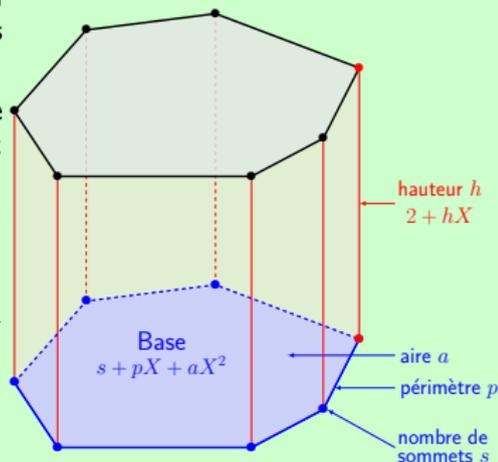
- ② On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p , d'**aire** a , les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.

On a $PQ = 2s + (sh + 2p)X + (ph + 2a)X^2 + ahX^3$
 et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque : les coefficients du polynôme PQ fournissent les informations suivantes pour le prisme :

- nombre de **sommets** : $2s$;
 - **périmètre** : $sh + 2p$;
 - **aire** : $ph + 2a$;
 - **volume** : ah .
- ③ Soit $P = X^2 + a$ et $Q = X^3 + b$, les deux nombres a, b étant fixés.
 On a $P \circ Q = X^6 + 2bX^3 + (a+b^2)$ ainsi que $Q \circ P = X^6 + 3aX^4 + 3a^2X^2 + (a^3 + b)$
 et $\deg(P \circ Q) = \deg(Q \circ P) = \deg(P)\deg(Q)$.



Définition 3.6 (Fonction tangente)

On appelle **fonction tangente** l'application notée **tan** qui va de

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par } \forall x \in D_{\tan}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

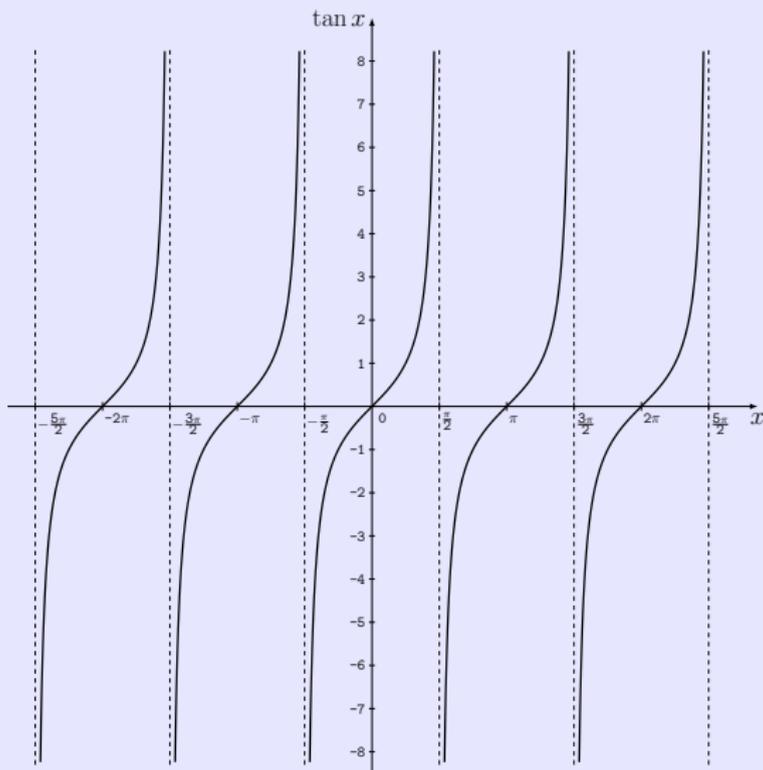
Proposition 3.7 (Propriétés)

- 1 La fonction \tan est **impaire** et **π -périodique**.
- 2 La fonction \tan est **dérivable** sur D_{\tan} , de dérivée :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- 3 La fonction \tan est **strictement croissante** sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- 4 $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.
- 5 Pour tout $(a, b) \in D_{\tan}^2$ tel que $a + b \in D_{\tan}$, et tout $x \in D_{\tan}$ tel que $\frac{\pi}{2} - x \in D_{\tan}$:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$



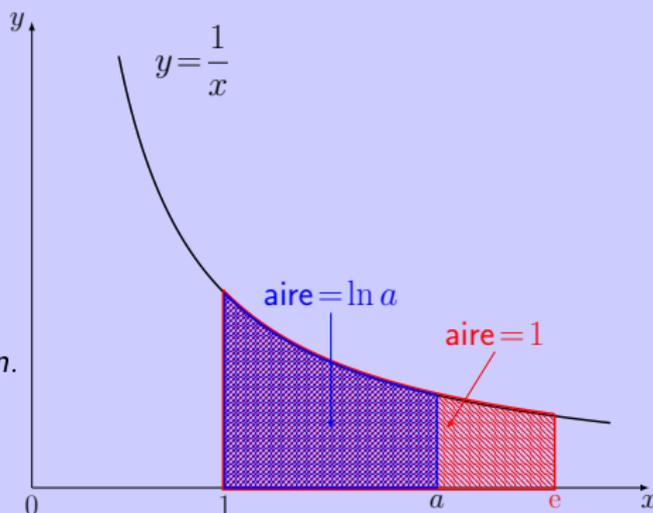
Courbe représentative de la fonction \tan sur l'intervalle $]-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$

Définition 3.8 (Fonction logarithme népérien)

Pour tout réel strictement positif a , on appelle **logarithme naturel** ou encore **logarithme népérien** de a le nombre noté $\ln a$ égal à l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$ dans un repère orthonormal.

On note e le nombre tel que $\ln e = 1$. e est appelé **base** du logarithme népérien. Numériquement : $e = 2,7182818 \dots$

Cette quantité définit une application $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout réel strictement positif : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.



Proposition 3.9 (Propriétés)

Pour tous réels x et x' strictement positifs et tout entier relatif n , on a :

- $\ln(xx') = \ln x + \ln x'$
- $\ln\left(\frac{x}{x'}\right) = \ln x - \ln x'$
- $\ln(x^n) = n \ln x$

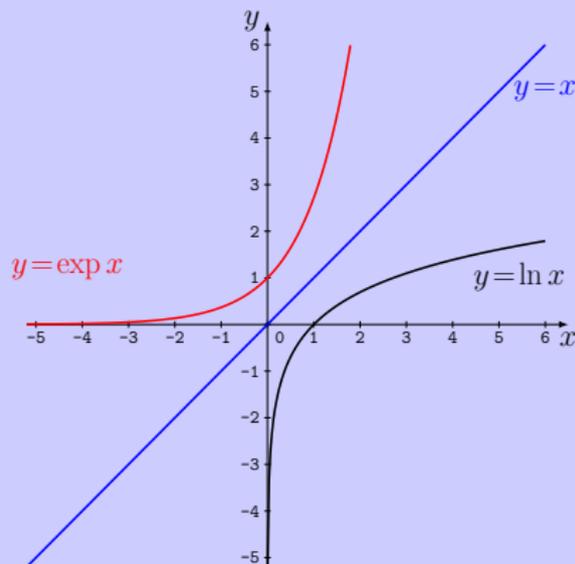
Définition 3.10 (Fonctions logarithme/exponentielle)

La fonction **logarithme népérien** définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .

Sa bijection réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.

On note aussi $\exp(x) = e^x$.

On a pour tout réel $x : \exp'(x) = \exp(x)$.



Proposition 3.11 (Propriétés)

Pour tous réels x et x' et tout entier relatif n , on a :

- $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$

- $e^{x-x'} = \frac{e^x}{e^{x'}}$

- $(e^x)^n = e^{nx}$

Définition 3.12 (Exponentielle complexe)

Soit a, b deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $a + ib$ selon $e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$.

Proposition 3.13 (Propriétés)

Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier n , on a :

$$\bullet e^{z+z'} = e^z \times e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}} \quad \bullet (e^z)^n = e^{nz} \quad \text{et} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

En particulier, pour tout nombre réel θ et tout nombre entier n , on a (formule de Moivre) :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{ou encore} \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Exemple 3.14

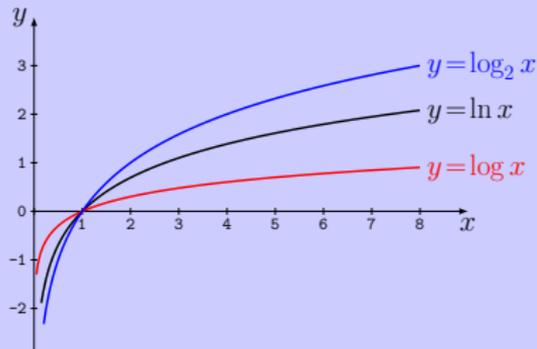
La formule de Moivre donne :

- pour $n = 3$: $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ et $\sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$;
- pour $n = 4$: $\cos(4\theta) = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$ et $\sin(4\theta) = 4 \sin \theta (2 \cos^2 \theta - \cos \theta)$.

Définition 3.15 (Fonctions logarithmes)

Soit a et b des réels strictement positifs, b étant **différent de 1**.

On note $\log_b(a)$ (et on lit : « log de a en base b ») le nombre $\frac{\ln a}{\ln b}$.



Cas particuliers :

- lorsque $b = e$, \log_e est le logarithme **népérien** ;
- lorsque $b = 2$, \log_2 est appelé logarithme **binaire** (utilisé notamment en informatique, théorie de l'information...);
- lorsque $b = 10$, \log_{10} est appelé logarithme **décimal** (noté simplement \log , utilisé notamment en chimie (pH), acoustique (décibel)...).

Proposition 3.16 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs, tout réel b strictement positif différent de 1 et tout entier relatif n , on a :

- $\log_b(aa') = \log_b a + \log_b a'$
- $\log_b\left(\frac{a}{a'}\right) = \log_b a - \log_b a'$
- $\log_b(a^n) = n \log_b a$

Définition 3.17 (Exponentiation)

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque.

On note a^b (et on lit : « a exposant b ») le nombre positif $e^{b \ln a}$.

Proposition 3.18 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs et tous réels b et b' , on a :

- $\ln(a^b) = b \ln a$
- $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$ et $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- $(aa')^b = a^b a'^b$ et $\left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$
- $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ et $a^{-b} = \frac{1}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$

En particulier, pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n non nul, on retrouve $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Remarque 3.19 (Exponentiation en chaîne)

L'exponentiation n'est **ni commutative ni associative** :

en général on a $a^b \neq b^a$ et $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$.

Définition 3.20 (Fonctions exponentielles)

Soit a un réel strictement positif. On appelle **fonction exponentielle de base a** l'application de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$, notée \exp_a , définie par $\exp_a(x) = a^x$.

Proposition 3.21 (Propriétés)

Soit a un réel strictement positif et \exp_a la fonction exponentielle de base a .

① \exp_a est **dérivable** sur \mathbb{R} de dérivée $\exp'_a : x \mapsto (\ln a)a^x$.

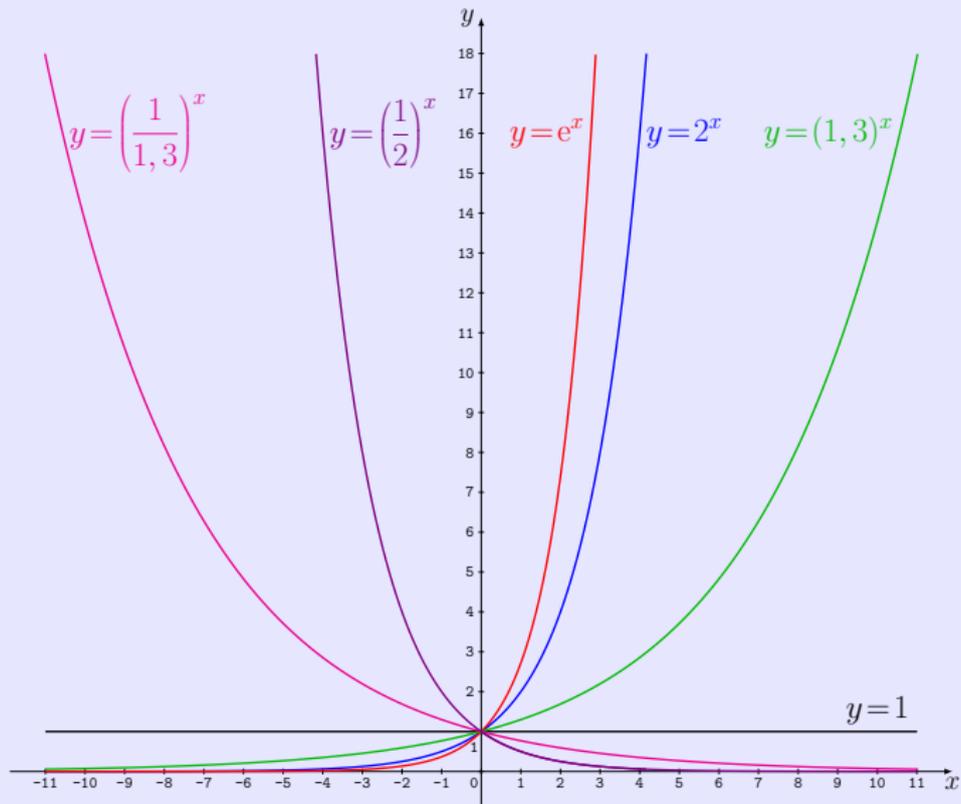
② Pour $0 < a < 1$, \exp_a est **strictement décroissante** sur \mathbb{R} avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0.$$

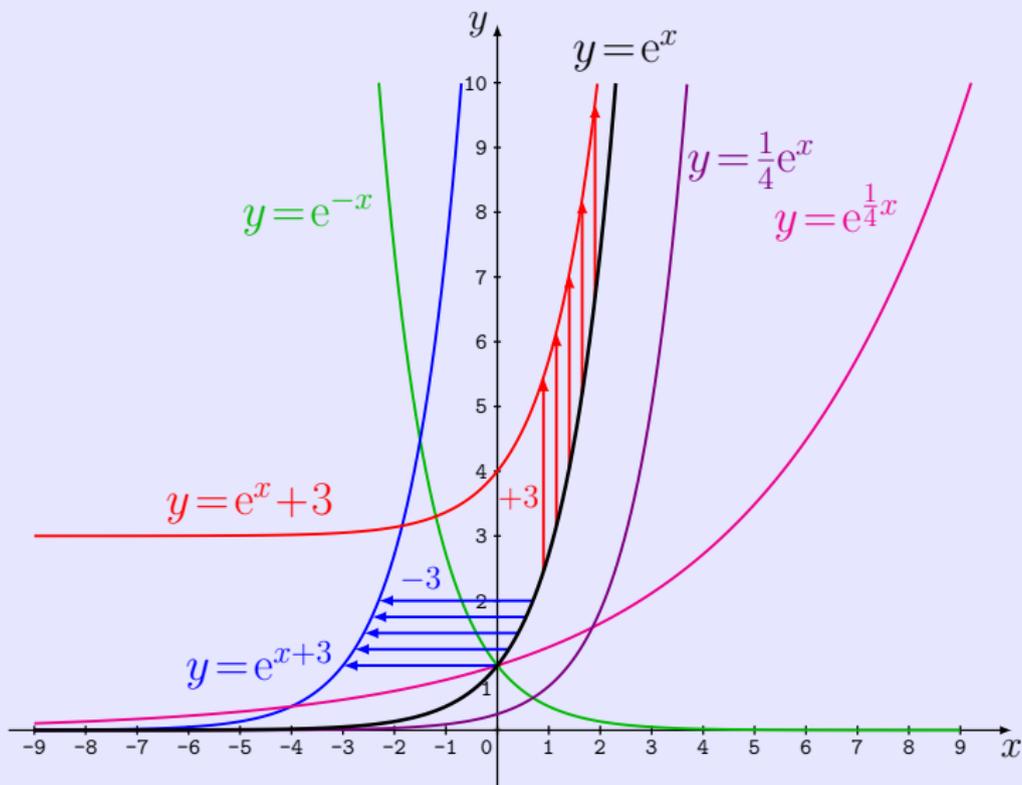
③ Pour $a > 1$, \exp_a est **strictement croissante** sur \mathbb{R} avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = +\infty.$$

④ Les courbes de \exp_a et $\exp_{\frac{1}{a}}$ sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.



Courbes représentatives de quelques fonctions exponentielles



Courbes représentatives de quelques fonctions exponentielles

Définition 3.22 (Fonctions puissances)

Soit a un réel quelconque. On appelle **fonction puissance d'exposant a** l'application de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$ associe le réel x^a .

Proposition 3.23 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant a est :

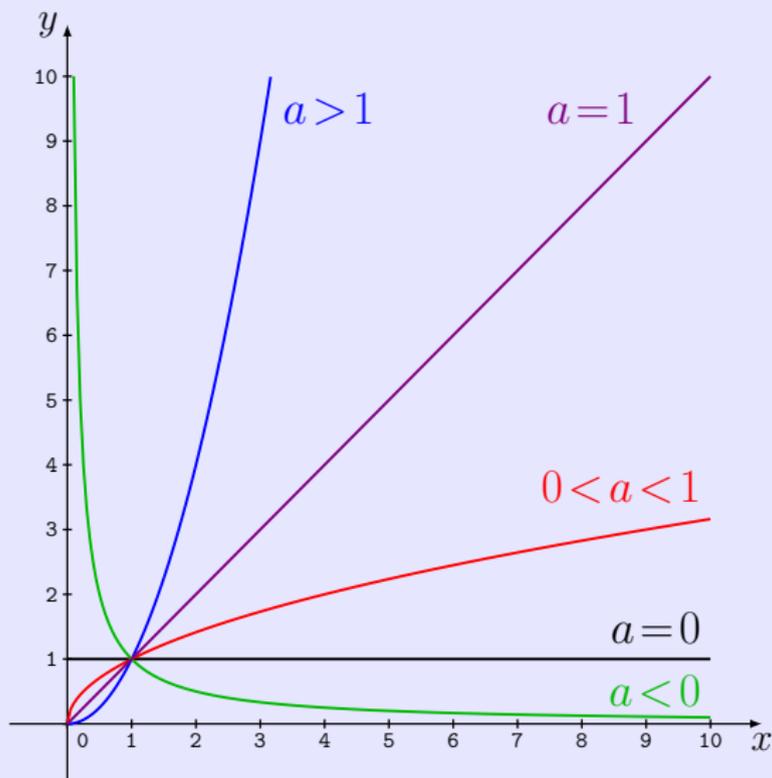
- ① **dérivable** sur $]0, +\infty[$ de fonction dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$;
- ② **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$ si $a > 0$ avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$;
- ③ **strictement décroissante** sur $]0, +\infty[$ si $a < 0$ avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$;
- ④ **bijective** lorsque $a \neq 0$ de réciproque la fonction puissance d'exposant $\frac{1}{a}$.

Remarque 3.24 (Extension (facultatif))

Pour tout entier **impair** n , la fonction puissance d'exposant n peut se prolonger en une bijection définie de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , ce qui permet de définir la fonction puissance d'exposant $\frac{1}{n}$ sur \mathbb{R} comme réciproque. En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^{\frac{1}{n}} = -x^{\frac{1}{n}}$.

Plus généralement, on peut définir pour tout rationnel de la forme $\frac{p}{2q+1}$ où p et q sont deux entiers, la fonction puissance d'exposant $\frac{p}{2q+1}$ selon

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^{\frac{p}{2q+1}} = \left(x^{\frac{1}{2q+1}}\right)^p.$$



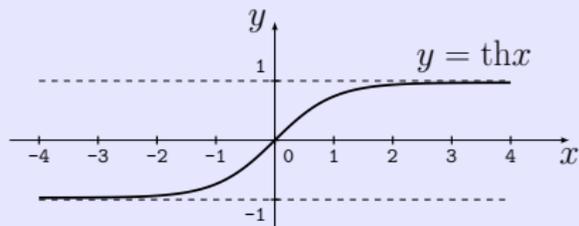
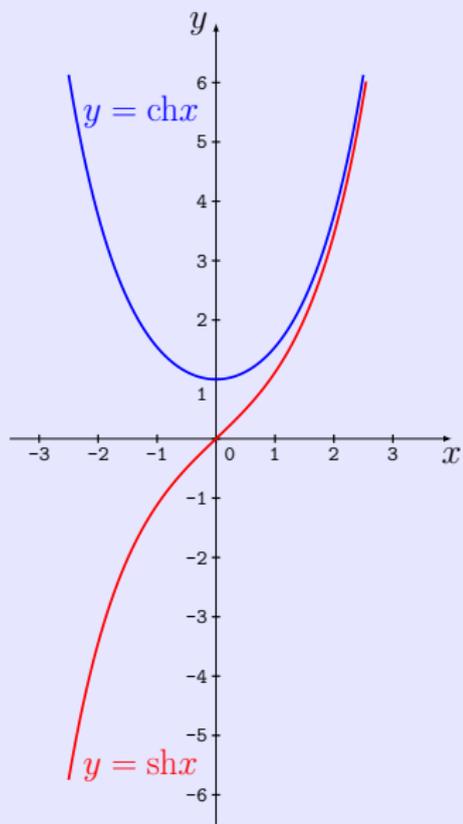
Courbes représentatives de quelques fonctions puissances

Définition 3.25 (Fonctions hyperboliques)

- 1 On appelle **fonction cosinus hyperbolique**, notée ch (ou cosh), l'application de \mathbb{R} dans $[1, +\infty[$ qui à tout réel x associe le réel $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- 2 On appelle **fonction sinus hyperbolique**, notée sh (ou sinh), l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout réel x associe le réel $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- 3 On appelle **fonction tangente hyperbolique**, notée th (ou tanh), l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout réel x associe le réel $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

Proposition 3.26 (Propriétés)

- 1 La fonction ch est **paire**, **dérivable** sur \mathbb{R} et de dérivée la fonction sh .
- 2 La fonction sh est **impaire**, **dérivable** sur \mathbb{R} et de dérivée la fonction ch .
- 3 La fonction ch est **strictement décroissante** sur \mathbb{R}_- , **strictement croissante** sur \mathbb{R}_+ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$.
- 4 La fonction sh est **strictement croissante** sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$.



Courbes représentatives des fonctions ch , sh et th

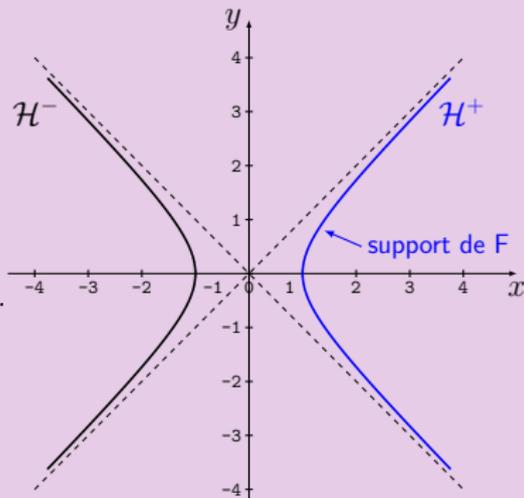
Proposition 3.27 (Pourquoi les termes « cosinus » et « sinus » dans ch et sh ?)

- ① Pour tous réels a et b : $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$.
- ② Pour tous réels a et b : $\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$.
- ③ Pour tout réel a : $\operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) = 1$.

« Explication » : pour tout réel a : $\operatorname{ch}(a) = \cos(ia)$ et $\operatorname{sh}(a) = -i \sin(ia)$.

Proposition 3.28 (Pourquoi le terme « hyperbolique » dans ch et sh ?)

La courbe paramétrée $F : t \mapsto (\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t))$ définie sur \mathbb{R} a pour support une branche de l'**hyperbole** \mathcal{H} d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$.





Arche de Saint-Louis – Missouri



Voûtes de la Casa Mila
Barcelone



Lignes à haute-tension



Vincent Ganivet : Catène de containers
Le Havre



Arches devant le bâtiment
Sophie Germain – INSA Lyon

- 1 Généralités
- 2 Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
- 3 Fonctions usuelles
- 4 Courbes paramétrées planes**
 - Définitions
 - Tangente
 - Construction
 - Un exemple

Dans ce paragraphe, on suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 4.1 (Courbe paramétrée)

On définit une **courbe paramétrée** du plan par la donnée d'une application $F : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de \mathbb{R} (ou plus généralement une partie de \mathbb{R}).

Plus précisément, l'application F est de la forme $F : t \mapsto (x(t), y(t))$ où x et y sont des applications de I vers \mathbb{R} .

Pour simplifier, on notera $F = (I, x, y)$ la courbe paramétrée ainsi définie.

- On appelle **support** \mathcal{C}_F de la courbe paramétrée F l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ du plan lorsque t décrit I : $\mathcal{C}_F = \{M(x(t), y(t)), t \in I\}$.
- On dit que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$, est une **représentation paramétrique** de la courbe F .

Remarque 4.2

- ① Deux courbes paramétrées distinctes peuvent avoir le même support. On dira alors qu'il s'agit de deux **paramétrages** distincts de ce support.
- ② Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra confondre les termes **support** et **courbe** pour désigner l'objet géométrique tracé dans le plan.

Exemple 4.3 (Droites/cercles)

- ① Droite passant par le point $A(a, b)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$:

représentation **cartésienne**représentation **paramétrique**

$$\beta(x - a) - \alpha(y - b) = 0$$

$$\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- ② Segment d'extrémités les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$:

représentation **paramétrique**

$$\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}, t \in [0, 1]$$

- ③ Cercle de centre le point $A(a, b)$ et de rayon $R > 0$:

représentation **cartésienne**représentation **paramétrique**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$\begin{cases} x = R \cos t + a \\ y = R \sin t + b \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Remarque 4.4 (Paramétrages distincts)

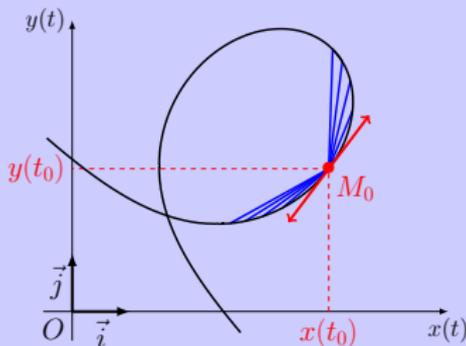
Les courbes paramétrées $\begin{cases} x = (b_1 - a_1)t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2)t + a_2 \end{cases}, t \in [0, 1]$ et $\begin{cases} x = (b_1 - a_1) \sin^2 t + a_1 \\ y = (b_2 - a_2) \sin^2 t + a_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ont **même support** (le segment $[A, B]$), mais le premier est décrit **une seule fois** ($t \in [0, 1]$) alors que le second est décrit **une infinité de fois** ($t \in \mathbb{R}$).

Définition 4.5 (Tangente)

La **tangente** en un point $M_0(x(t_0), y(t_0))$ du support d'une courbe paramétrée (I, x, y) est, lorsqu'elle existe, la « **position limite** » des cordes reliant M_0 à des points de la courbe voisins de M_0 .

C'est la droite passant par M_0 qui approche le mieux la courbe au voisinage de M_0 .



Proposition-définition 4.6 (Tangente)

Soit (I, x, y) une courbe paramétrée et $t_0 \in I$.

- 1 Si les fonctions x et y sont dérivables en t_0 et que **l'une au moins des dérivées en t_0 n'est pas nulle**, alors la **tangente** en M_0 au support est la droite passant par M_0 dirigée par le vecteur $x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$ noté $\vec{F}'(t_0)$.

Elle admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \\ Y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- 2 Lorsque $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ le point M_0 est dit **régulier**.
Lorsque $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$ le point M_0 est dit **singulier** ou **stationnaire**.

Protocole de construction

Pour tracer le support d'une courbe paramétrée (l, x, y) , on suit le protocole suivant :

- 1 on **réduit** au maximum l'intervalle d'étude I en utilisant des propriétés de symétrie de la courbe ;
- 2 on étudie les **variations simultanées** des fonctions x et y sur l'intervalle réduit ;

t	t_0	t_1
$x'(t)$	+	
$y'(t)$	+	
$x(t)$	↗	
$y(t)$	↗	

t	t_0	t_1
$x'(t)$	+	
$y'(t)$	-	
$x(t)$	↗	
$y(t)$	↘	

t	t_0	t_1
$x'(t)$	-	
$y'(t)$	+	
$x(t)$	↘	
$y(t)$	↗	

t	t_0	t_1
$x'(t)$	-	
$y'(t)$	-	
$x(t)$	↘	
$y(t)$	↘	

- 3 on **commence à tracer** le support en identifiant :
 - des points particuliers (d'éventuels **points singuliers** non étudiés ici) ;
 - les **tangentes** en ces points. En particulier lorsque $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$ (resp. $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$), la tangente correspondante est horizontale (resp. verticale) ;
 - d'éventuelles **branches infinies** (non étudiées ici) ;
- 4 on **termine le tracé** en appliquant les **symétries** identifiées au début.

Exemple 4.7 (Lemniscate de Geronno)

$$\begin{aligned} \text{Courbe paramétrée } F : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\sin(t), \sin(2t)) \end{aligned}$$

Réduction de l'intervalle d'étude

- $\forall t \in [0, 2\pi], F(2\pi - t) = s_O(F(t))$
 où s_O est la symétrie du plan par rapport à l'origine O
 \implies l'arc de courbe relatif à $[\pi, 2\pi]$ se déduit donc de celui relatif à $[0, \pi]$ par la symétrie par rapport à O
 \implies première réduction : étude sur $[0, \pi]$
- $\forall t \in [0, \pi], F(\pi - t) = s_{O_x}(F(t))$
 où s_{O_x} est la symétrie du plan par rapport à l'axe Ox
 \implies l'arc de courbe relatif à $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ se déduit donc de celui relatif à $[0, \frac{\pi}{2}]$ par la symétrie par rapport à O_x
 \implies deuxième réduction : étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Variations simultanées

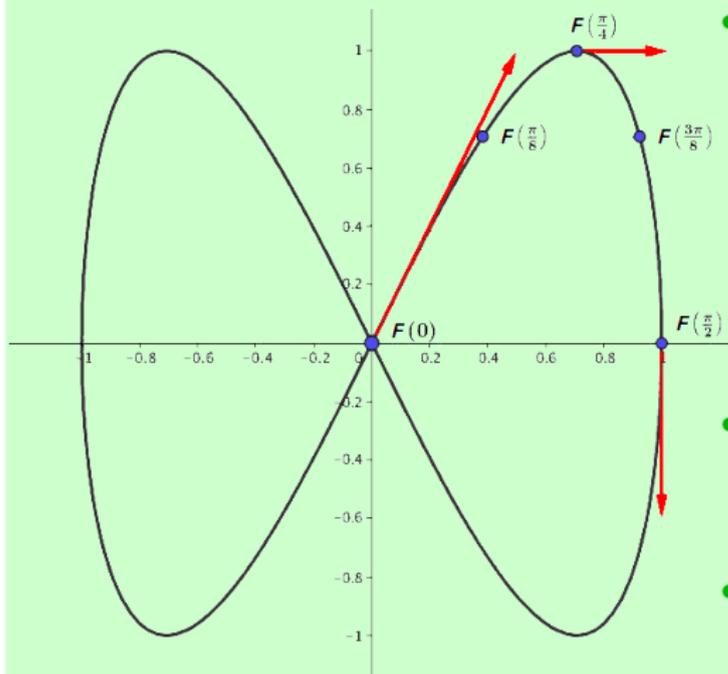
$$\vec{F}'(t) = \cos(t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j}$$

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$x'(t)$	1	+	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	+	0
$y'(t)$	2	+	0	-	-2
$x(t)$	0	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	\nearrow	1
$y(t)$	0	\nearrow	1	\searrow	0

Exemple 4.7 (Lemniscate de Geronno)

Courbe paramétrée $F : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\sin(t), \sin(2t))$$



- **Tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$**

- Tangente au point $F(0)$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$
- Tangente au point $F(\frac{\pi}{4})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}$
- Tangente au point $F(\frac{\pi}{2})$ dirigée par le vecteur $\vec{F}'(\frac{\pi}{2}) = -2\vec{j}$

- **Tracé sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$**

On effectue la symétrie par rapport à l'axe Ox

- **Tracé sur $[\pi, 2\pi]$**

On effectue la symétrie par rapport à l'origine O

Courbe paramétrée gauche (facultatif)

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On définit une **courbe paramétrée** de l'espace par la donnée d'une application $F : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ où I est une partie de \mathbb{R} et x , y et z sont des

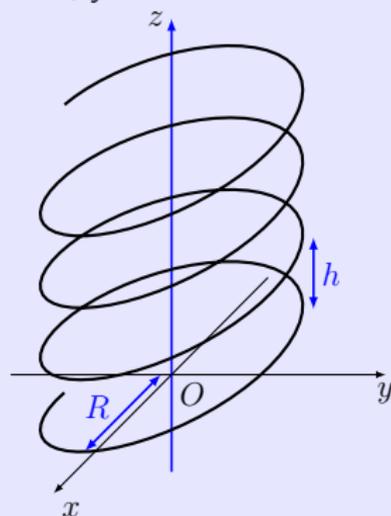
$t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$
applications de I vers \mathbb{R} .

- On dit que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in I, \text{ est une} \\ z = z(t) \end{cases}$
représentation paramétrique de la courbe F .

- Si les fonctions x , y et z sont dérivables en t_0 et que **l'une au moins des dérivées en t_0 n'est pas nulle**, alors la **tangente** en M_0 à la courbe est la droite passant par M_0 dirigée par le vecteur $\vec{F}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$.

Elle admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0) \\ Y = y'(t_0)(t - t_0) + y(t_0), t \in \mathbb{R} \\ Z = z'(t_0)(t - t_0) + z(t_0) \end{cases}$$



Exemple : hélice circulaire d'axe Oz ,
de rayon R et de pas h

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}$$

Mélanges Faros et cryptographie

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_melanges_faros.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_melanges_faros.pdf)

Courbes de Lissajous

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_Lissajous/Lissajous.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lissajous/Lissajous.html)

Courbes cycloïdales

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_cycloides/cycloides0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_cycloides/cycloides0.html)

Présentation Maple

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
presentation_maple_html/presentation_maple0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation_maple_html/presentation_maple0.html)

Notions à retenir

- Application/fonction
 - ★ Détermination de l'ensemble de définition
 - ★ Calculs par composition
- Injection/surjection/bijection
 - ★ Maîtrise de ces notions
 - ★ Détermination de la réciproque
- Fonctions réelles
 - ★ Analyse qualitative des variations
 - ★ Tracé de graphes
 - ★ Identification de symétries
 - ★ Fonctions classiques à connaître
- Courbes paramétrées
 - ★ Variations simultanées
 - ★ Tracé de courbes
 - ★ Identification de symétries