

Limites et continuité de fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

- ① Propriétés dans l'ensemble des réels
 - Valeur absolue
 - Partie entière
 - Majorant, minorant
 - Borne supérieure et borne inférieure
 - Borne supérieure/inférieure et limite
 - Voisinages dans \mathbb{R}
- ② Limites d'une fonction
 - Limite en l'infini, limite en un réel
 - Limite à gauche, limite à droite
 - Lien entre fonctions et suites
 - Opérations sur les limites
 - Branches infinies
 - Ordre et limites
- ③ Continuité d'une fonction
 - Continuité en un point
 - Prolongement par continuité
 - Opérations
 - Continuité sur un intervalle
- ④ Fonctions trigonométriques réciproques
 - La fonction arcsin
 - La fonction arccos
 - La fonction arctan
 - Exemples

- 1 Propriétés dans l'ensemble des réels
 - Valeur absolue
 - Partie entière
 - Majorant, minorant
 - Borne supérieure et borne inférieure
 - Borne supérieure/inférieure et limite
 - Voisinages dans \mathbb{R}
- 2 Limites d'une fonction
- 3 Continuité d'une fonction
- 4 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 1.1 (Valeur absolue)

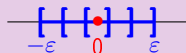
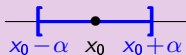
On appelle **valeur absolue** d'un réel x , le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Sur la droite représentant les nombres réels, $|x|$ est la **distance** entre le point d'abscisse x et l'origine.

Proposition 1.2 (Propriétés)

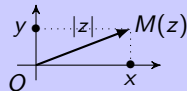
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |x \times y| = |x| \times |y|, |x^n| = |x|^n$ et, si $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} |x \pm y| \leq |x| + |y| & (1^{\text{e}} \text{ inégalité triangulaire}) \\ ||x| - |y|| \leq |x \mp y| & (2^{\text{e}} \text{ inégalité triangulaire}) \end{cases}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} |x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha \\ |x - x_0| \leq \alpha \iff x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, [(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| \leq \varepsilon) \iff x = 0]$
Autre formulation : $\bigcap_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$



Définition 1.3 (Module)

On appelle **module** d'un complexe $z = x + iy$ avec $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$, le nombre réel noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



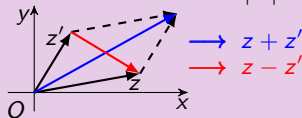
Dans le plan représentant les nombres complexes, $|z|$ est la **distance** entre le point de coordonnées (x, y) (ou d'**affixe** z) et l'origine.

Proposition 1.4 (Propriétés (facultatif))

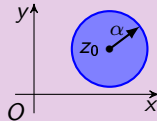
① $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \iff z = 0$

② $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |z \times z'| = |z| \times |z'|, |z^n| = |z|^n$ et, si $z' \neq 0$, $\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$

③ $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} |z \pm z'| \leq |z| + |z'| \\ ||z| - |z'|| \leq |z \mp z'| \end{cases}$ *inégalités triangulaires*

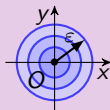


④ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (z, z_0) \in \mathbb{C}^2, |z - z_0| \leq \alpha \iff M(z) \in \mathcal{D}_{M(z_0), \alpha}$



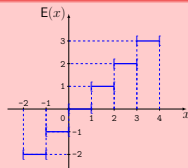
⑤ $\forall z \in \mathbb{C}, [(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |z| \leq \varepsilon) \iff z = 0]$

Autre formulation : $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{O, \varepsilon} = \{O\}$



Théorème-définition 1.5 (Partie entière)

Pour tout réel x , il existe un **unique entier** n tel que $n \leq x < n+1$. Cet entier est appelé **partie entière** du réel x , il est noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x .



Proposition 1.6 (Propriétés)

Soit x un nombre réel. On a :

- ❶ $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leq x$;
- ❷ $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$;
- ❸ $\forall n \in \mathbb{Z}, E(x + n) = E(x) + n$.

Exemple 1.7 (Partie entière et décimales (facultatif))

Soit x un réel **positif** et $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ son **écriture décimale propre** (a_0 étant un naturel et a_1, a_2, a_3, \dots des chiffres ne contenant pas de suite infinie de 9). Alors

- le nombre a_0 est la **partie entière** de x : $a_0 = E(x)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n^{e} décimale de x s'obtient selon

$$a_n = E(10^n x) - 10 E(10^{n-1} x).$$

Définition 1.8 (Majorant/Minorant)

- 1 Soit A une partie non vide de \mathbb{R} et α un réel.
On dit que α est un **majorant** de A ou que α **majore** A si $\forall x \in A, x \leq \alpha$.
On dit que α est un **minorant** de A ou que α **minore** A si $\forall x \in A, x \geq \alpha$.
- 2 Si A est une partie non vide de \mathbb{R} qui admet (au moins) un majorant (resp. un minorant), on dit qu'elle est **majorée** (resp. **minorée**).
- 3 Si A est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**, ce qui équivaut à : $\exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leq M$.
- 4 On dit que A admet un **plus grand élément** (resp. un **plus petit élément**) α lorsque α est **à la fois** un majorant (resp. un minorant) de A et un élément de A .
S'il existe, α s'appelle aussi le **maximum** (resp. le **minimum**) de A et se note $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Remarque 1.9 (Cas des complexes)

On peut étendre la notion d'ensemble borné au cas des nombres complexes en remplaçant la **valeur absolue** par le **module** :

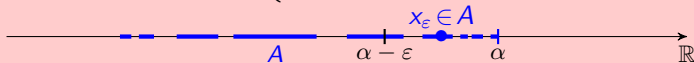
Soit A une partie non vide de \mathbb{C} . On dit que A est **bornée** lorsque

$$\exists M > 0, \forall z \in A, |z| \leq M.$$

Théorème-définition 1.10 (Borne supérieure/inférieure)

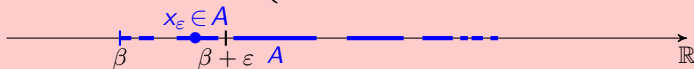
- ① Pour toute partie **non vide et majorée** A de \mathbb{R} , il existe un **unique** réel α qui est le **plus petit des majorants** de A ; ce réel s'appelle la **borne supérieure** de A et on le note $\sup(A)$. Autrement dit :

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, & x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x_\varepsilon \in A, \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \alpha \end{cases}$$



- ② Pour toute partie **non vide et minorée** A de \mathbb{R} , il existe un **unique** réel β qui est le **plus grand des minorants** de A ; ce réel s'appelle la **borne inférieure** de A et on le note $\inf(A)$. Autrement dit :

$$\beta = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, & \beta \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists x_\varepsilon \in A, \quad \beta \leq x_\varepsilon < \beta + \varepsilon \end{cases}$$



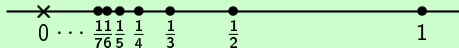
Par convention,

- si A est une partie **non vide non majorée**, on pose $\sup(A) = +\infty$;
- si A est une partie **non vide non minorée**, on pose $\inf(A) = -\infty$;
- on pose également $\sup(\emptyset) = -\infty$ et $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Exemple 1.11

- ① Les ensembles \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} ne sont **ni majorés ni minorés**, ils admettent $-\infty$ et $+\infty$ pour borne inférieure et borne supérieure.
- ② Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
 - Les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ sont **bornés** et admettent tous a pour borne inférieure et b pour borne supérieure.
 - L'intervalle $[a, b]$ admet a pour plus petit élément et b pour plus grand élément, alors que l'intervalle $]a, b[$ n'admet ni plus petit ni plus grand élément.
 - Les intervalles $[a, +\infty[$ et $]a, +\infty[$ sont **minorés** mais **pas majorés**, ils admettent a pour borne inférieure et $+\infty$ pour borne supérieure.

③ Soit $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.



- L'ensemble A est non vide, majoré par 1 et minoré par 0.
- On a $1 \in A$ donc $\sup(A) = \max(A) = 1$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (choisir un naturel $n > \frac{1}{\varepsilon}$).
Donc $\inf(A) = 0$. Or $0 \notin A$, donc A n'a pas de plus petit élément.

Définition 1.12 (Cas des fonctions et des suites)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **majorée** (resp. **minorée**) sur D si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad f(x) \leq \alpha \quad (\text{resp. } f(x) \geq \alpha).$$

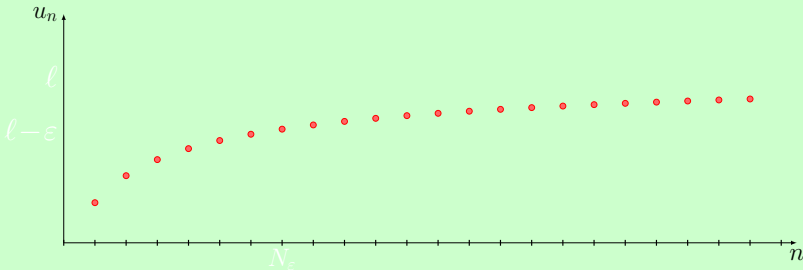
- Si f est **majorée** sur D alors $\sup\{f(x), x \in D\}$ est un nombre **fini** et se note $\sup_{x \in D} f(x)$.
- Si f est **minorée** sur D alors $\inf\{f(x), x \in D\}$ est un nombre **fini** et se note $\inf_{x \in D} f(x)$.
- Si f est une fonction **non majorée**, on pose par convention $\sup_{x \in D} f(x) = +\infty$.
- Si f est une fonction **non minorée**, on pose par convention $\inf_{x \in D} f(x) = -\infty$.
- De manière analogue, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, on note

$$\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \quad \text{et} \quad \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

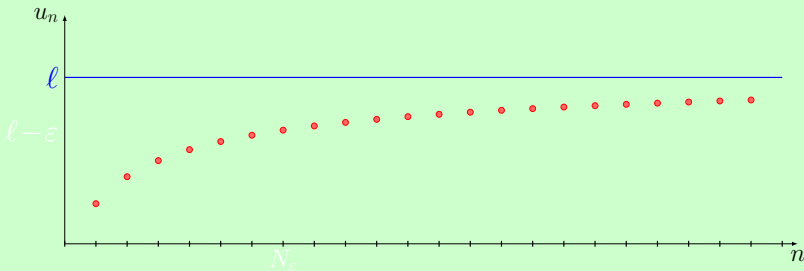
- ① Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ① Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



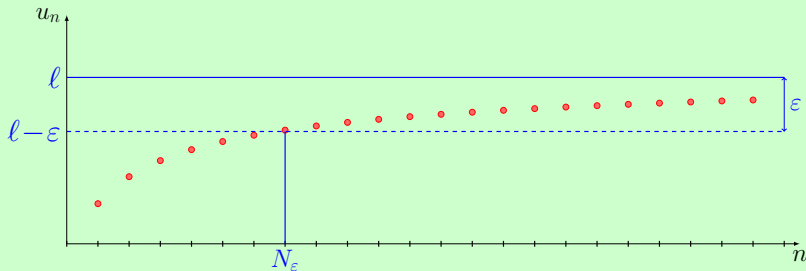
Le nombre ℓ est caractérisé par

$$[\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell]$$

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ① Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**, alors l est un nombre réel (**fini**).



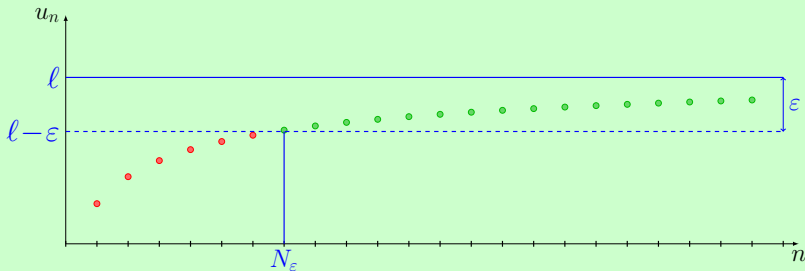
Le nombre l est caractérisé par

$$[\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l] \quad \text{et} \quad [\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, u_{N_\varepsilon} > l - \varepsilon].$$

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ① Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**, alors l est un nombre réel (**fini**).



Le nombre l est caractérisé par

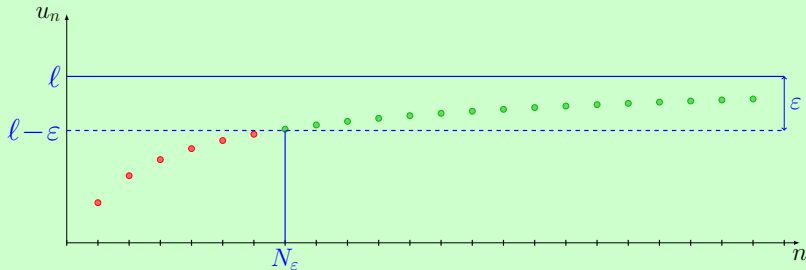
$$[\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l] \text{ et } [\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, u_{N_\varepsilon} > l - \varepsilon].$$

Par croissance, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n > N_\varepsilon \implies l - \varepsilon < u_n \leq l]$.

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ① Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**, alors l est un nombre réel (**fini**).



Le nombre l est caractérisé par

$$[\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l] \text{ et } [\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, u_{N_\varepsilon} > l - \varepsilon].$$

Par croissance, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n > N_\varepsilon \implies l - \varepsilon < u_n \leq l]$.

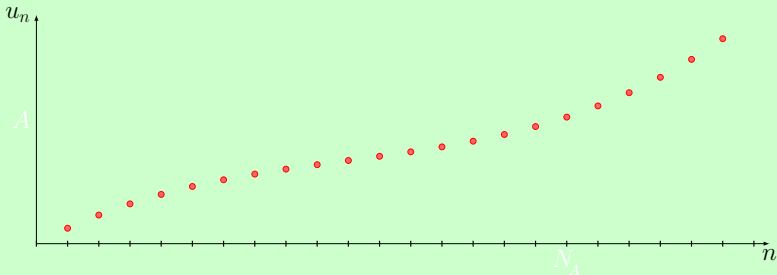
On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** et admet l pour limite.

$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ② Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell = +\infty$ (par convention).

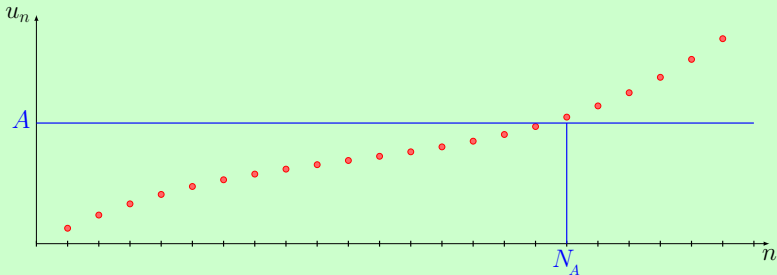


On a

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ② Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell = +\infty$ (par convention).



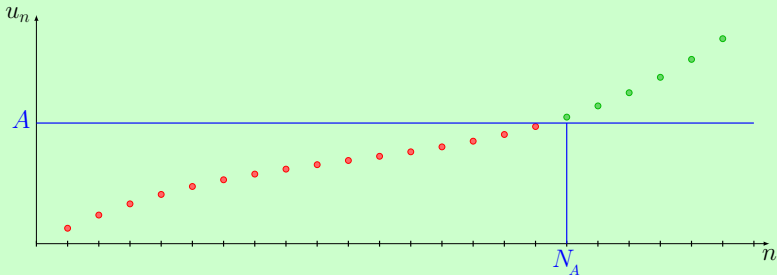
On a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad u_{N_A} > A.$$

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ② Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell = +\infty$ (par convention).



On a

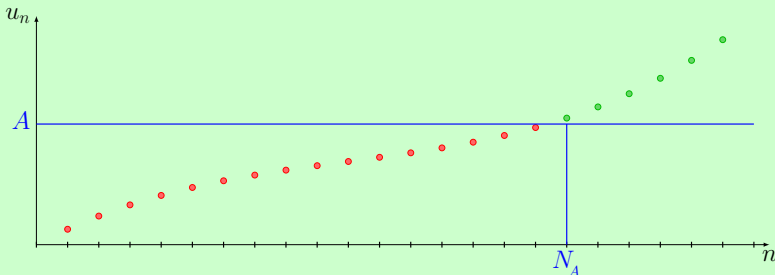
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad u_{N_A} > A.$$

Par croissance, on a $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [n > N_A \implies u_n > A]$.

Exemple 1.13 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- ② Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell = +\infty$ (par convention).



On a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad u_{N_A} > A.$$

Par croissance, on a $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [n > N_A \implies u_n > A]$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente** et admet $+\infty$ pour limite.

$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Théorème 1.14 (Théorème de la limite monotone)

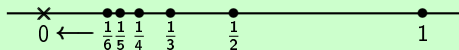
- ① Toute suite **croissante** et **majorée** est **convergente**.
Toute suite **croissante** et **non majorée** est **divergente** de limite $+\infty$.
- ② Toute suite **décroissante** et **minorée** est **convergente**.
Toute suite **décroissante** et **non minorée** est **divergente** de limite $-\infty$.

De manière unifiée :

- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle **croissante**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$;
- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle **décroissante**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Exemple 1.15 (Suite des inverses)

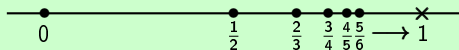
- ① Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$.



La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** et **minorée** e.g. par 0.

Elle est donc **convergente** et l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = 0$.

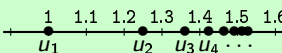
- ② Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 - \frac{1}{n}$.



La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** et **majorée** e.g. par 1.

Elle est donc **convergente** et l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} v_n = 1$.

Exemple 1.16 (Deux séries de Riemann)

① Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$. 

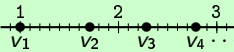
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**.

- On a $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**.

En conclusion, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente**.

② Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. 

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**.

- On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$,

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas **majorée**.

En conclusion, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} v_n = +\infty$.

Un peu de vocabulaire qui sera utilisé dans la suite :

Définition 1.17 (Notion de voisinage)

- ① On dit qu'une propriété dépendant d'un réel x est vraie **au voisinage de x_0** lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ (ce qui ne l'empêche pas d'être éventuellement vraie pour x_0 également).
- ② On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage de $+\infty$** (resp. $-\infty$) lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme $I =]A, +\infty[$ (resp. $] -\infty, A[$) avec $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x \in I$.

Définition 1.18 (Droite réelle achevée)

On appelle **droite réelle achevée** l'ensemble des réels auquel on adjoint $+\infty$ et $-\infty$. Cet ensemble est noté $\overline{\mathbb{R}}$. Formellement :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

- 1 Propriétés dans l'ensemble des réels
- 2 Limites d'une fonction
 - Limite en l'infini, limite en un réel
 - Limite à gauche, limite à droite
 - Lien entre fonctions et suites
 - Opérations sur les limites
 - Branches infinies
 - Ordre et limites
- 3 Continuité d'une fonction
- 4 Fonctions trigonométriques réciproques

Dans toute la suite, sauf mention contraire, f désignera une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont l'ensemble de définition D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Définition 2.1 (Limite finie en l'infini)

- ① Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.

On dit que f **admet pour limite un réel ℓ en $+\infty$** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x > X_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Si une telle limite existe, alors elle est **unique**.

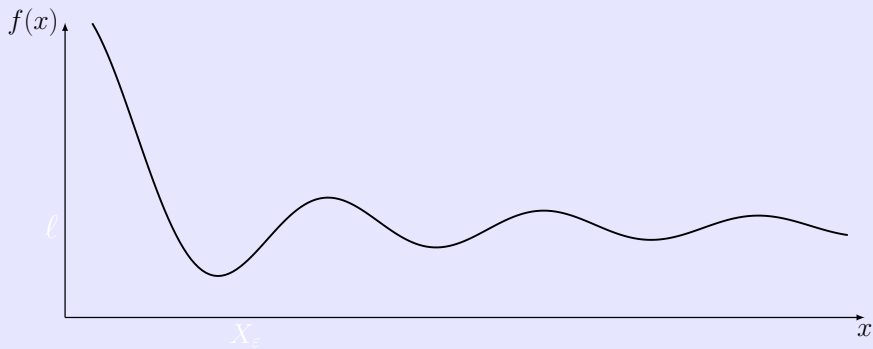
On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ ou $f \xrightarrow{+\infty} \ell$.

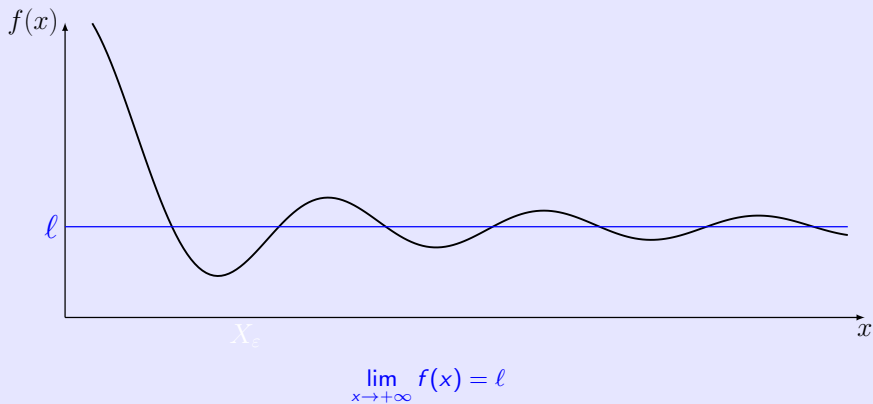
- ② Soit une fonction f définie au voisinage de $-\infty$.

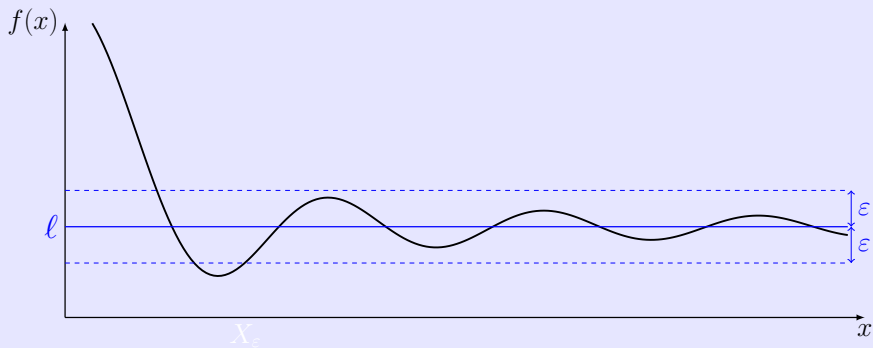
On dit que f **admet pour limite un réel ℓ en $-\infty$** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x < X_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ ou $f \xrightarrow{-\infty} \ell$.



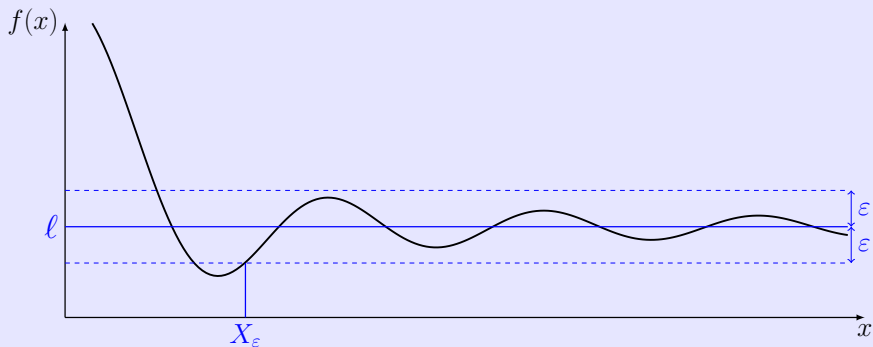




$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$



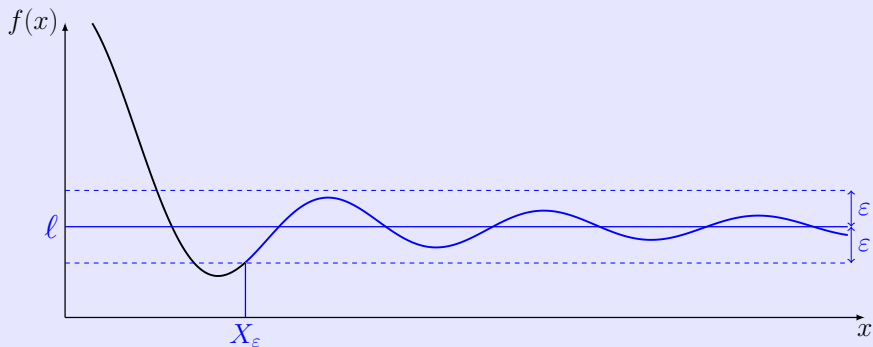
$$\forall \epsilon > 0,$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\iff$$

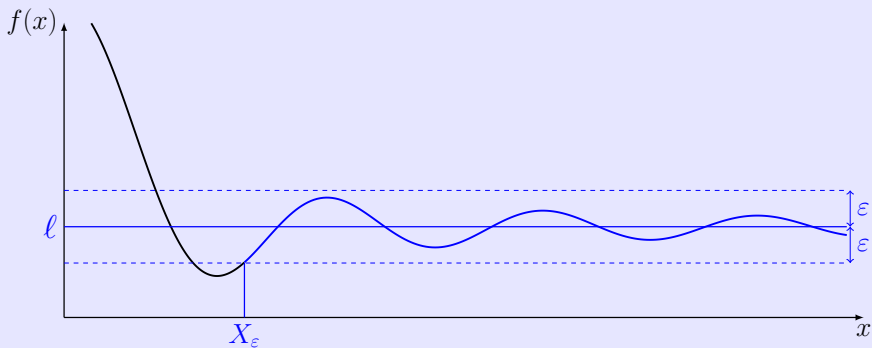
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists X_\epsilon \in \mathbb{R},$$



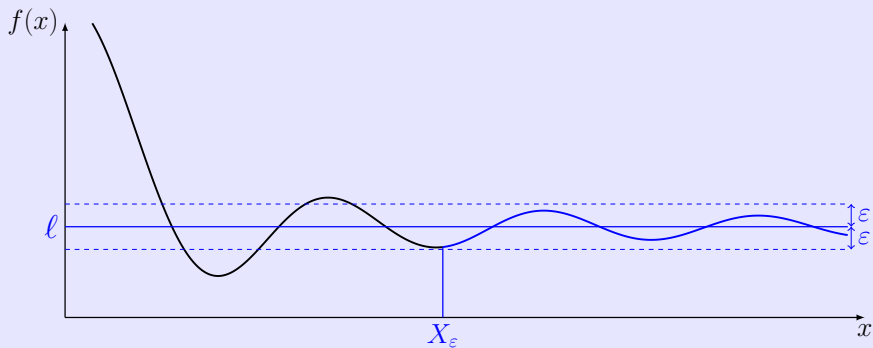
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\iff$$

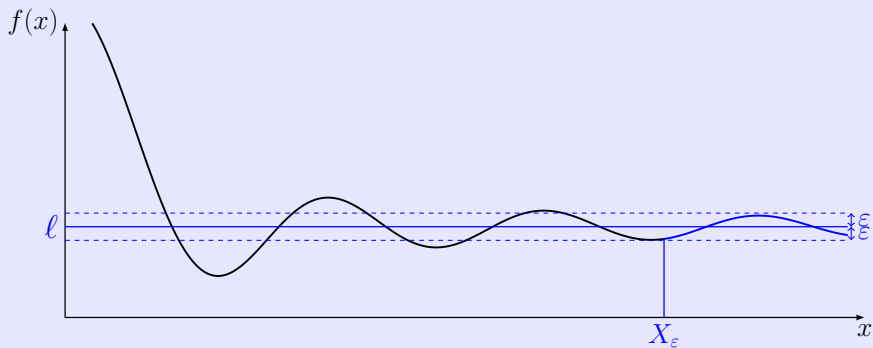
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists X_\epsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad [x > X_\epsilon \implies |f(x) - l| < \epsilon]$$



Le réel X_ϵ dépend naturellement de ϵ .



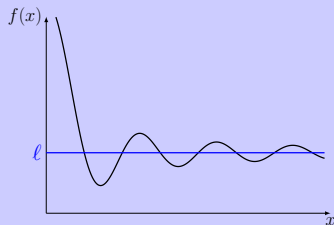
Le réel X_ϵ dépend naturellement de ϵ .



Le réel X_ε dépend naturellement de ε .

Définition 2.2 (Asymptote horizontale)

Lorsque $\lim_{+\infty} f = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote (horizontale)** à la courbe représentative de f .

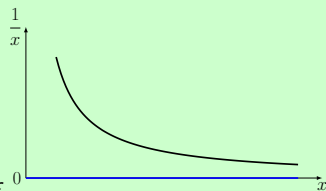


Exemple 2.3 (Fonction « inverse »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

On a $\lim_{+\infty} f = 0$, donc l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f .



Définition 2.4 (Limite infinie en l'infini)

Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.

- ① On dit que f **admet pour limite** $+\infty$ en $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists X_A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x > X_A \Rightarrow f(x) > A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ou $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$.

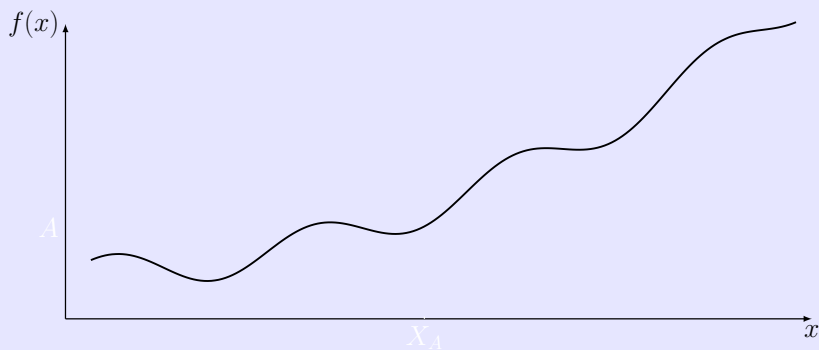
- ② On dit que f **admet pour limite** $-\infty$ en $+\infty$ lorsque

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists X_B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x > X_B \Rightarrow f(x) < B.$$

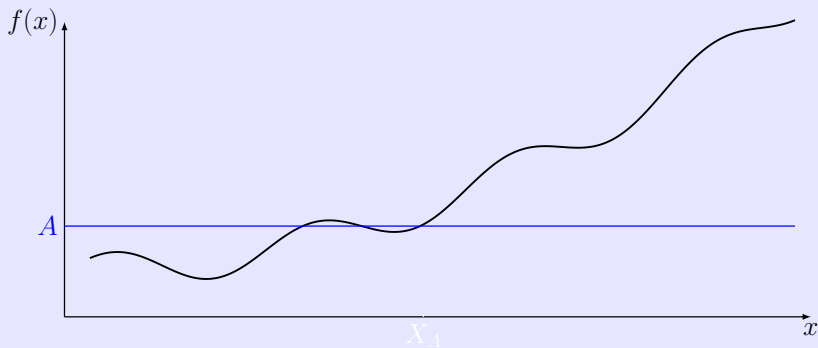
On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ ou $f \xrightarrow{+\infty} -\infty$.

Remarque 2.5

Les définitions précédentes s'adaptent aisément au cas d'une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et qui peut donc avoir pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.



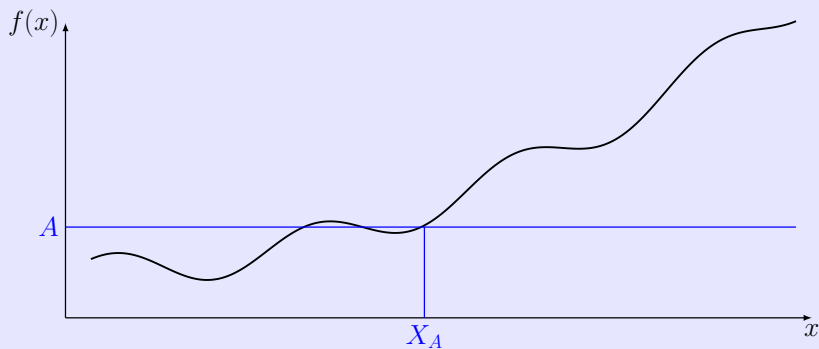
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



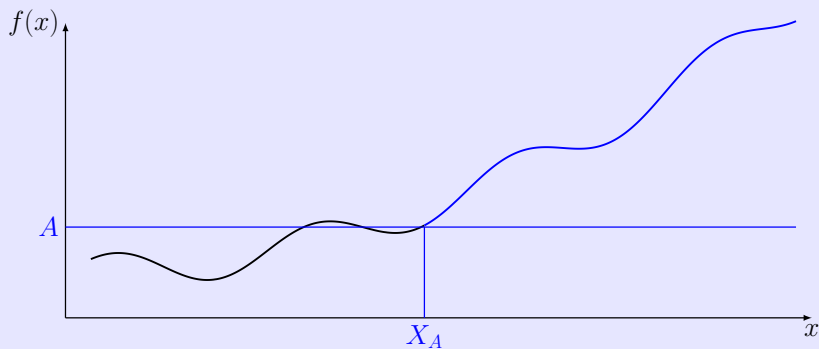
$$\forall A \in \mathbb{R},$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\iff$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists X_A \in \mathbb{R},$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\iff$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists X_A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad [x > X_A \implies f(x) > A]$$

Définition 2.6 (Limite d'une suite)

- ① On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers un nombre ℓ (ou **tend vers** ℓ) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et on dit aussi que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente**.

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

- ② On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **a pour limite** $+\infty$ (ou **tend vers** $+\infty$) si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N_A \implies u_n > A.$$

- ③ On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **a pour limite** $-\infty$ (ou **tend vers** $-\infty$) si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists N_B \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N_B \implies u_n < B.$$

Définition 2.7 (Limite infinie en un réel)

Soit x_0 un réel tel que : $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f .

- ① On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en x_0** lorsque :

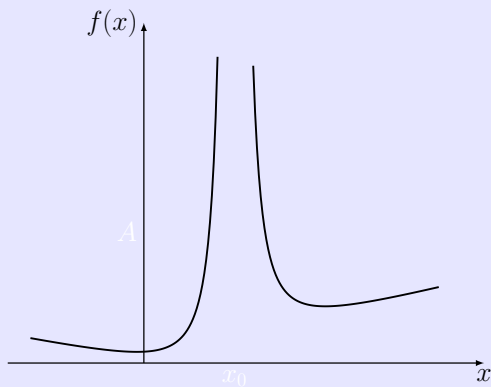
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta_A > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \eta_A \implies f(x) > A$$

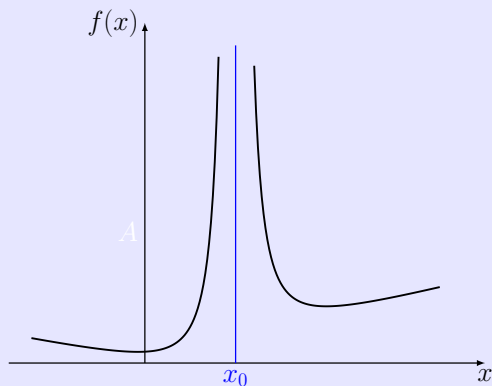
On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x_0} f = +\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ ou $f \xrightarrow{x_0} +\infty$.

- ② On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en x_0** lorsque :

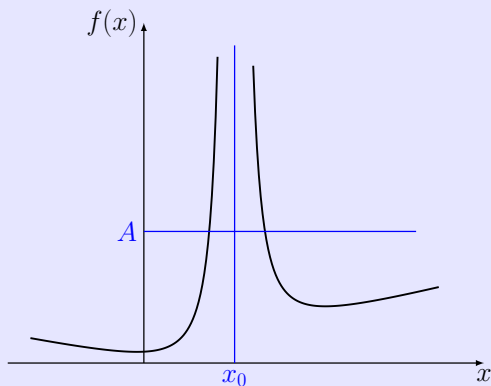
$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta_B > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \eta_B \implies f(x) < B$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x_0} f = -\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$ ou $f \xrightarrow{x_0} -\infty$.





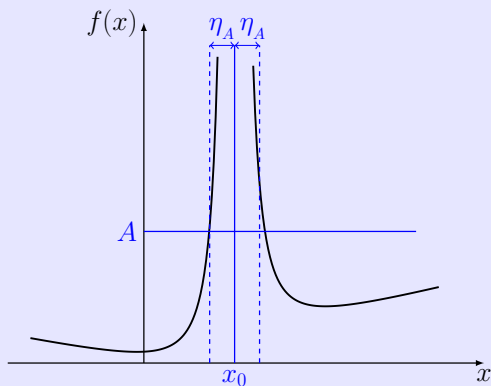
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$



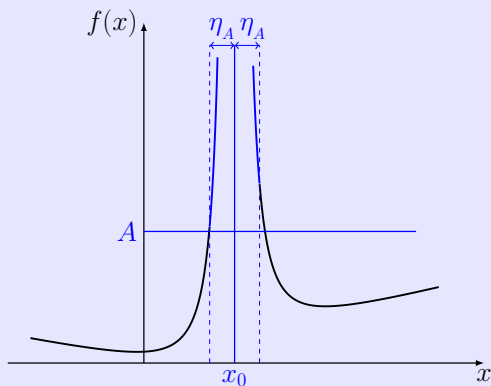
$$\forall A \in \mathbb{R},$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\iff$$

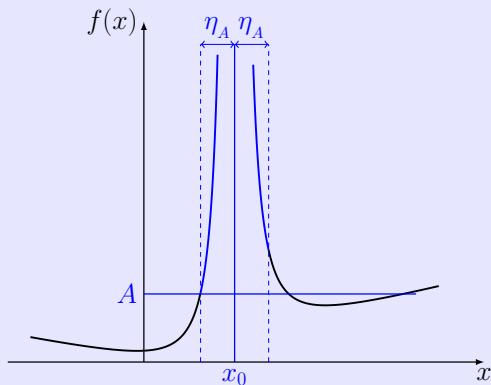
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta_A > 0,$$



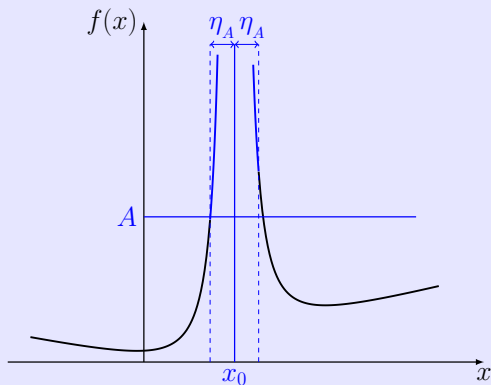
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\iff$$

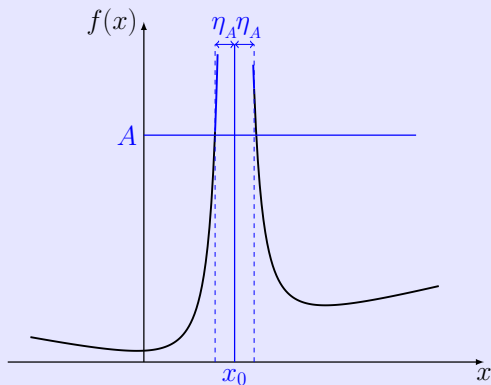
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta_A > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad [|x - x_0| < \eta_A \implies f(x) > A]$$



Le réel η_A dépend naturellement de A .



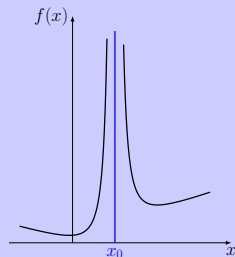
Le réel η_A dépend naturellement de A .



Le réel η_A dépend naturellement de A .

Définition 2.8 (Asymptote verticale)

Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote (verticale)** à la courbe représentative de f .

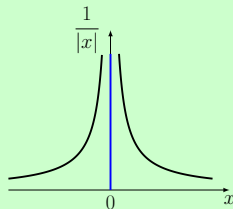


Exemple 2.9 (Fonction « inverse absolue »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{|x|}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$, donc l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .



Définition 2.10 (Limite finie en un réel)

Soit x_0 un réel tel que : $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f .

On dit que f **admet le réel ℓ pour limite en x_0** lorsque

- première formulation :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon;$$

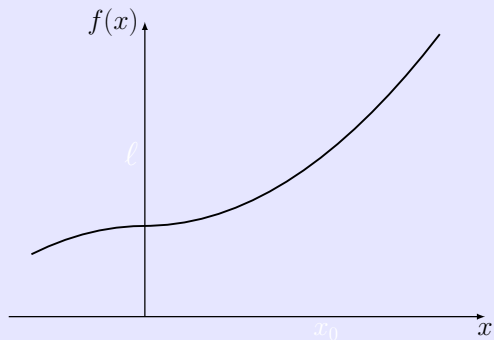
- deuxième formulation :

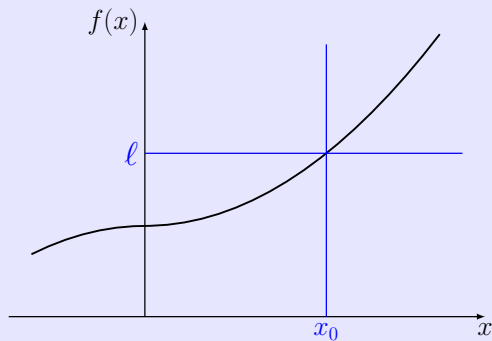
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad x \in]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[\implies f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[;$$

- troisième formulation :

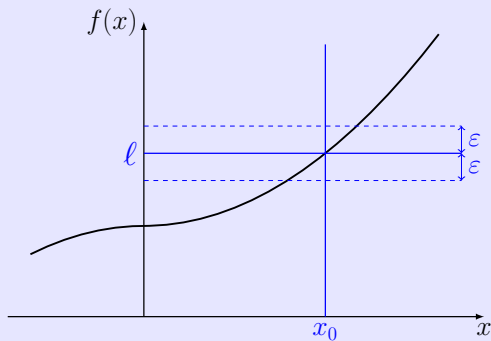
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad f(]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[\cap D_f) \subset]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x_0} f = \ell$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ ou $f \xrightarrow{x_0} \ell$.





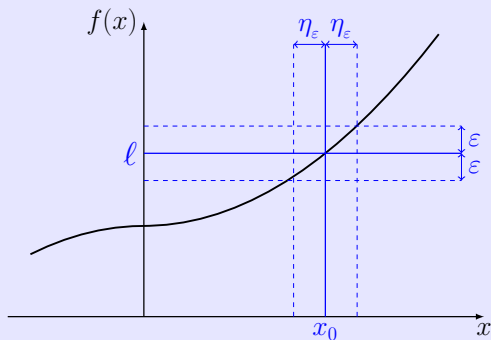
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$



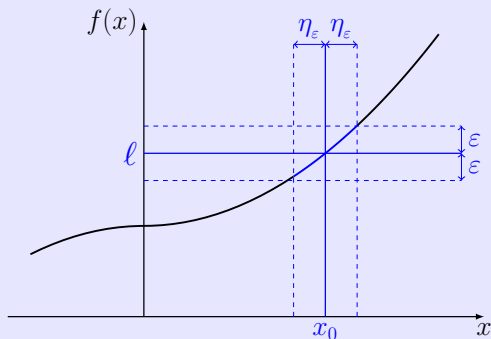
$$\forall \epsilon > 0,$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\iff$$

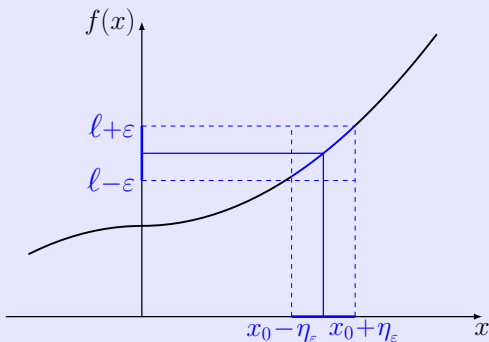
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta_\epsilon > 0,$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\iff$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta_\epsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad [|x - x_0| < \eta_\epsilon \implies |f(x) - l| < \epsilon]$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\iff$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta_\epsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad [|x - x_0| < \eta_\epsilon \implies |f(x) - l| < \epsilon]$$

$$\text{ou encore } x \in]x_0 - \eta_\epsilon, x_0 + \eta_\epsilon[\implies f(x) \in]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

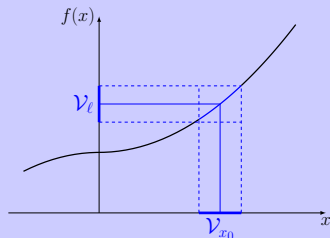
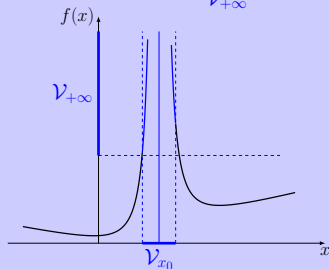
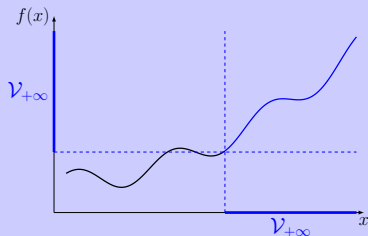
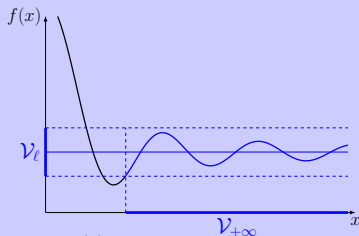
$$\text{ou encore } f(]x_0 - \eta_\epsilon, x_0 + \eta_\epsilon[\cap D_f) \subset]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

Définition 2.11 (Unification des quatre cas)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f , et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

La fonction f **admet l pour limite en x_0** lorsque :

pour tout voisinage \mathcal{V}_l de l , il existe un voisinage \mathcal{V}_{x_0} de x_0 tel que $f(\mathcal{V}_{x_0} \cap D_f) \subset \mathcal{V}_l$.



Proposition 2.12 (Unicité/continuité)

- ① Si f admet une limite en x_0 alors cette limite est **unique**.
- ② Si f admet une limite **finie** en x_0 alors f est **bornée** au voisinage de x_0 .
- ③ Si $x_0 \in D_f$ et si f admet pour limite ℓ en x_0 alors $\ell = f(x_0)$.
On dit alors que f est **continue** en x_0 (cf. § 3).

Remarque 2.13

- ① Lorsque $x_0 \in D_f$ on définit parfois $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$ par

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad 0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On peut définir de même $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = +\infty$.

- ② Les définitions 2.1 et 2.10 peuvent s'étendre au cas d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} (et même de \mathbb{C} dans \mathbb{C} pour la 2.10...) en remplaçant les **valeurs absolues** par des **modules**. On a alors le résultat ci-dessous.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $l_1 + il_2 \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 + il_2 \iff \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l_2 \right).$$

Définition 2.14

- ① On dit que f admet le réel ℓ pour limite à gauche en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$.

- ② On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite à gauche en x_0 si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta_A > 0, \forall x \in D_f, x_0 - \eta_A < x < x_0 \implies f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < A \text{)}.$$

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

On définit de la même manière la notion de **limite à droite** : il suffit, dans les définitions ci-dessus, de remplacer $x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0$ par $x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon$.

Proposition 2.15

- ① Si $x_0 \notin D_f$, f admet une limite en x_0 ssi f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et si ces limites sont égales.
- ② Si $x_0 \in D_f$, il faut de plus que : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, ce qui revient à dire que f est **continue** en x_0 (cf. § 3).

Proposition 2.16 (Lien fonctions–suites)

Soit $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les deux énoncés suivants sont **équivalents** :

- ❶ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.
- ❷ Pour toute suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Corollaire 2.17 (Un critère de divergence)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. S'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

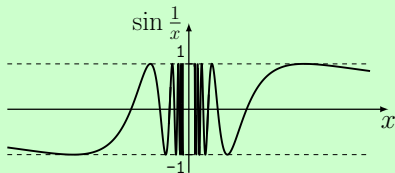
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x_0$ et les suites-images par f : $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admettent des limites **différentes**, alors f n'admet **pas** de limite en x_0 .

Exemple 2.18 (Fonction « sinus inverse »)

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Examinons si elle admet une limite en $x_0 = 0$.

- Posons $u_n = \frac{1}{n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$.
- On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
et $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$.
- Les suites $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admettent des limites **différentes**.

Ainsi f n'admet pas de limite en 0.



Proposition 2.19 (Addition/multiplication)

Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et l, l' deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$
$\lim_{x_0} g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$
$\lim_{x_0} (f + g)$	$l + l'$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$?

$\lim_{x_0} f$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x_0} g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} (f \times g)$	$l \times l'$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$?

Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de ces opérations sont de la forme

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$

Exemple 2.20 (Polynômes en $\pm\infty$)

La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus

haut degré : si $a_p \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{k=0}^p a_k x^k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_p x^p = \pm\infty$ si $p \geq 1$ (signe à préciser).

Proposition 2.21 (Division)

Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et l, l' deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\begin{matrix} l > 0 \\ \text{ou } +\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} l < 0 \\ \text{ou } -\infty \end{matrix}$	0
$\lim_{x_0} g$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\begin{matrix} l' > 0 \\ (l' < 0) \end{matrix}$	$\begin{matrix} l' > 0 \\ (l' < 0) \end{matrix}$	$\pm\infty$	$\begin{matrix} 0^+ \\ (0^-) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0^+ \\ (0^-) \end{matrix}$	0
$\lim_{x_0} \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$\begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\infty \\ (+\infty) \end{matrix}$?	$\begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\infty \\ (+\infty) \end{matrix}$?

Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme

$$\bullet \frac{\infty}{\infty} \quad \bullet \frac{0}{0}$$

Exemple 2.22 (Fractions rationnelles en $\pm\infty$)

La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

$$\text{si } a_p \neq 0 \text{ et } b_q \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sum_{k=0}^p a_k x^k}{\sum_{k=0}^q b_k x^k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } p > q \text{ (signe à préciser)} \\ 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_p} & \text{si } p = q \end{cases}$$

Proposition 2.23 (Composition)

Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $x_0, \ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$.
- Application à $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{g(x) \ln f(x)})$ lorsque $f > 0$ au voisinage de x_0 :

$\lim_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell > 1$ ou $+\infty$	$\ell \in [0, 1[$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	0^+	1
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ ($-\infty$)	$+\infty$ ($-\infty$)	$\ell' > 0$ ($\ell' < 0$)	0	$\ell' > 0$ ou $+\infty$ $\ell' < 0$ ou $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} f^g$	$\ell^{\ell'}$	$+\infty$ (0^+)	0^+ ($+\infty$)	$+\infty$ (0^+)	?	0^+ ($+\infty$)	?	?

Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme

$$\bullet \infty^0 \quad \bullet 0^0 \quad \bullet 1^\infty$$

Exemple 2.24 (Exponentielle)

À l'aide de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (cf. exemple 2.34), on voit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Définition 2.25 (Asymptote oblique/ Branche parabolique)

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

- ❶ S'il existe des réels a et b tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0,$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote (oblique)** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

Dans ce cas, les nombres a et b sont donnés par

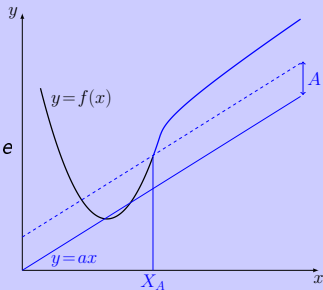
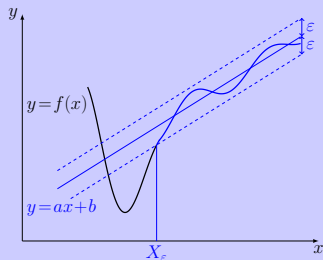
$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

- ❷ S'il existe un réel a tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty,$$

on dit que la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$.

- ❸ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction asymptotique l'axe des ordonnées en $+\infty$.



Exemple 2.26 (Asymptote oblique)

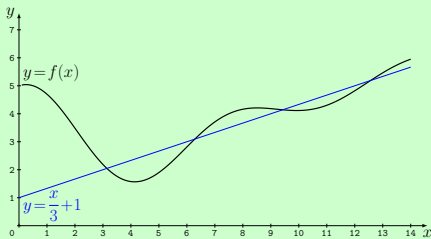
- ① Soit f la fonction définie au voisinage de $+\infty$ par

$$f(x) = \frac{x}{3} + 1 + 4 \frac{\sin x}{x}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (cf. exemple 2.33)

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{3} - 1 \right) = 0$.

La courbe représentative de f admet une **asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = \frac{x}{3} + 1$.



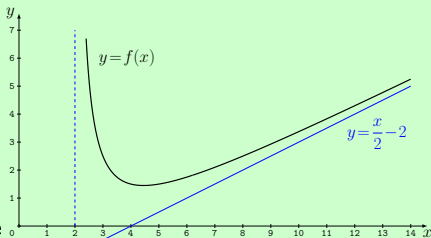
- ② Soit g la fonction définie au voisinage de $+\infty$ par

$$g(x) = \frac{x^2 - 6x + 14}{2x - 4}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$

puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{x}{2} \right) = -2$.

La courbe représentative de g admet une **asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = \frac{x}{2} - 2$.



Théorème 2.27 (Théorème de la limite monotone)

Soit a et b deux réels ou $\pm\infty$ tels que $a < b$ et $I =]a, b[$.

① Soit f une fonction **croissante** sur I .

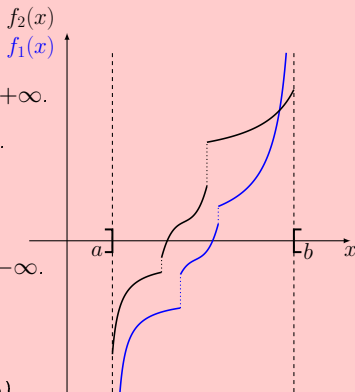
- Si f est **majorée** sur I , alors f admet une **limite à gauche finie** en b .
- Si f n'est **pas majorée** sur I alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, on a $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$.

- Si f est **minorée** sur I , alors f admet une **limite à droite finie** en a .
- Si f n'est **pas minorée** sur I alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

Dans les deux cas, on a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$.

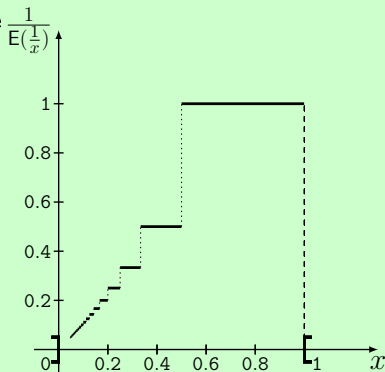
② On a des résultats similaires pour les fonctions **décroissantes** (en échangeant les rôles de a et b).



Exemple 2.28 (Partie entière et inverse)

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{E\left(\frac{1}{x}\right)}$.

- La fonction « partie entière » étant croissante et la fonction « inverse » étant décroissante, par composition, f est **croissante**.
- Pour tout $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{x} > 1$ donc $E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ puis $f(x) \in]0, 1[$.
Ainsi la fonction f est **bornée** sur $]0, 1[$.
- En conséquence, f admet des **limites finies** en 0 à droite et en 1 à gauche.
En fait, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.



Partant de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, à l'aide de changements de variable on déduit les limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ que l'on peut généraliser :

Proposition 2.29 (Croissances comparées)

① Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,

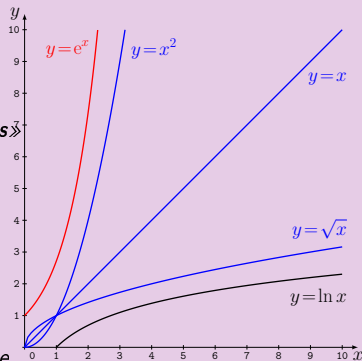
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0.$$

Les puissances du logarithme sont «**négligeables**» devant les fonctions puissances **positives**.

② Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

Les fonctions puissances sont «**négligeables**» devant les puissances **positives** de l'exponentielle.



Proposition 2.30 (Ordre et limites)

- Soit f et g des fonctions telles que $f \leq g$ au voisinage de x_0
 - Si f et g admettent des limites finies l et l' en x_0 alors $l \leq l'$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.
- Si f et g admettent resp. l et l' comme limites en x_0 et si $l < l'$, alors $f < g$ au voisinage de x_0 .
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et si $l > \alpha$ alors $f > \alpha$ au voisinage de x_0 .
En particulier, si $l > 0$ alors $f > 0$ au voisinage de x_0 .

Remarque 2.31 (Inégalités strictes/larges)

On prendra garde aux inégalités **strictes** et **larges** : si f et g sont des fonctions telles que $f < g$ au voisinage de x_0 et admettent des limites l et l' en x_0 , on **n'a pas nécessairement** $l < l'$ et l'on peut avoir $l = l'$.

Ex. : $f(x) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ en $+\infty$. On a $f < g$ sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Théorème 2.32 (Théorème de l'encadrement)

Soit f , g et h des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si les fonctions f , g et h vérifient $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de x_0 , et si

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Exemple 2.33 (Fonction « sinus cardinal »)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

① Étude en 0

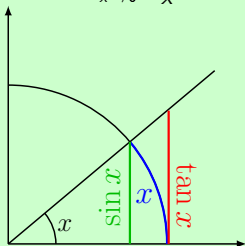
- De l'encadrement géométrique

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \sin x < x < \tan x$$

(l'angle x étant mesuré en **radians**), on obtient $\forall x \in]0, \pi/2[, \cos x < f(x) < 1$ duquel on déduit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Par parité, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



- Avec $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on tire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

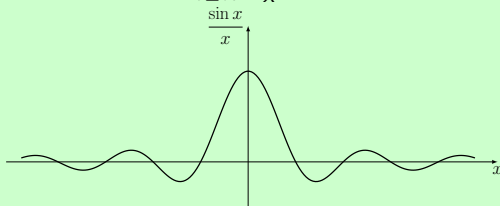
- Avec $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, on tire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

② Étude en $\pm\infty$

- De l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1$, on tire $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{1}{|x|}$ duquel on

déduit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.



Exemple 2.34 (Fonctions logarithme/exponentielle)

- De l'encadrement géométrique

$$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$$

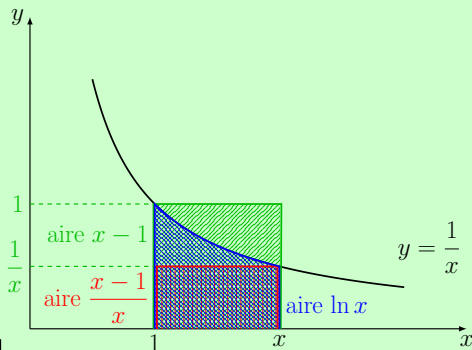
on obtient $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Par symétrie, on tire

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

- Par changements de variables, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



Exemple 2.35 (Fonctions hyperboliques)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

- 1 Propriétés dans l'ensemble des réels
- 2 Limites d'une fonction
- 3 Continuité d'une fonction**
 - Continuité en un point
 - Prolongement par continuité
 - Opérations
 - Continuité sur un intervalle
- 4 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 3.1 (Continuité)

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $x_0 \in D_f$.

- ① On dit que f est **continue en x_0** lorsque f admet une limite en x_0 , et cette limite est alors nécessairement $f(x_0)$ (d'après proposition 2.12). Autrement dit :

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

- ② On dit que f est continue à **gauche** (resp. à **droite**) en x_0 lorsque

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) \quad (\text{resp. } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)).$$

Proposition 3.2

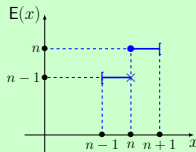
f est continue en x_0 ssi f est continue à gauche et à droite en x_0 .

Exemple 3.3 (Fonction « partie entière »)

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Au voisinage de n , on a

$$E(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [n, n+1[\\ n-1 & \text{si } x \in [n-1, n[\end{cases}$$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} E(x) = n = E(n)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} E(x) = n-1 \neq E(n)$.



La fonction partie entière est **continue à droite** en n mais **pas à gauche**.

Remarque 3.4 (Discontinuité)

- ① Pour une fonction f , il existe deux types de discontinuité en $x_0 \in D_f$:
- **discontinuité de première espèce** : f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 , mais l'une au moins de ces deux limites n'est pas égale à $f(x_0)$.
 - **discontinuité de deuxième espèce** : f n'admet pas de limite à droite et/ou à gauche en x_0 .
- ② Si $x_0 \notin D_f$ et si f admet pour limite le réel ℓ en x_0 , on peut prolonger f en posant :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

La fonction \tilde{f} ainsi obtenue est continue en x_0 : on dit qu'on a **prolongé f par continuité en x_0** .

Exemple 3.5 (Prolongement par continuité)

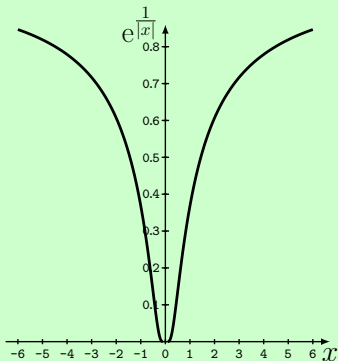
Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

- On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\forall x \in D_f, f(x) = x + 1$.
 - Le prolongement par continuité ainsi construit s'écrit simplement :
 - Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ et l'on peut prolonger la fonction f par continuité en 2 en posant $\tilde{f}(2) = 3$.
- $$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
- $$x \mapsto x + 1$$

Exemple 3.6 (Exponentielle-inverse)

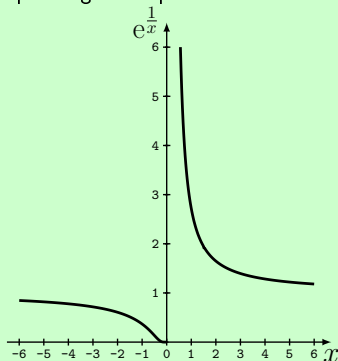
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ Soit } f: \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{-1/|x|} \end{aligned}$$

La fonction f admet une limite **finie** en 0 qui vaut 0. Elle est donc **prolongeable** par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ Soit } g: \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{1/x} \end{aligned}$$

La fonction g admet une limite à gauche **finie** en 0 qui vaut 0 et une limite à droite **infinie** en 0. Elle présente donc une **discontinuité de deuxième espèce** et n'est pas prolongeable par continuité en 0.



Proposition 3.7 (Opérations)**1 Opérations**

Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} **continues** en x_0 et si λ est un réel, alors les fonctions $f + g$, λf et fg sont **continues** en x_0 .

Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est **continue** en x_0 .

2 Composition

Si f est **continue** en x_0 et si g est **continue** en $f(x_0)$ alors $(g \circ f)$ est continue en x_0 .

3 Inégalités

Si f est **continue** en x_0 alors f est **bornée** au voisinage de x_0 .

Si f est **continue** en x_0 et si $f(x_0) > 0$ alors $f(x) > 0$ au voisinage de x_0 .

Remarque 3.8 (Extension aux fonctions à valeurs complexes)

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Alors

la fonction f est **continue** en $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi les fonctions f_1 et f_2 sont **continues** en x_0 .

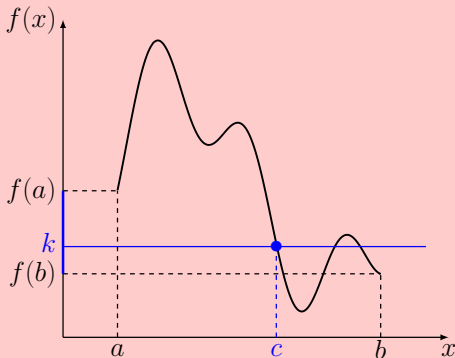
Définition 3.9 (Continuité sur un intervalle)

La fonction f est dite **continue sur l'intervalle I** lorsque f est continue en tout x_0 de I .

Théorème 3.10 (Théorème des valeurs intermédiaires)

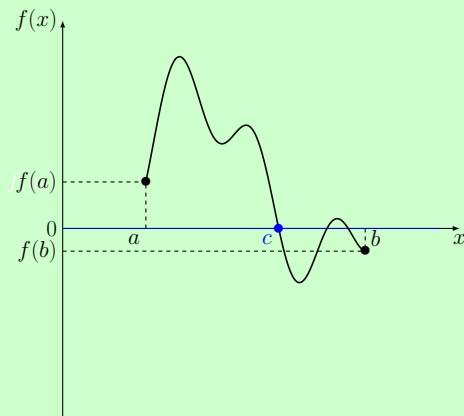
Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$.

- Pour tout réel k **compris** entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.
- En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes opposés**, alors il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.



Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

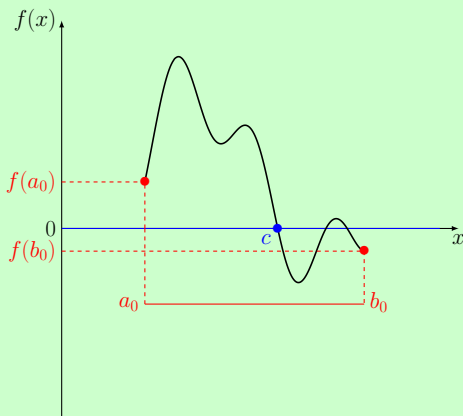
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

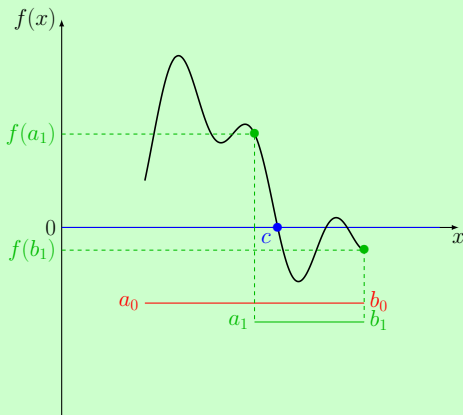
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$).

- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.



Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

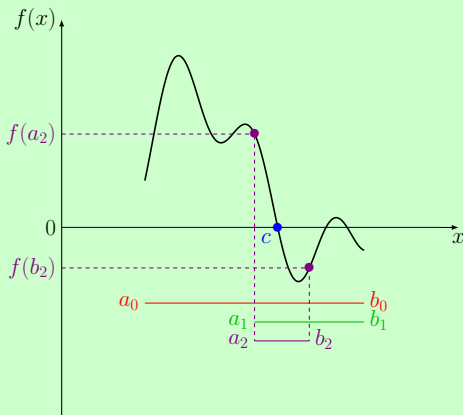
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$).



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

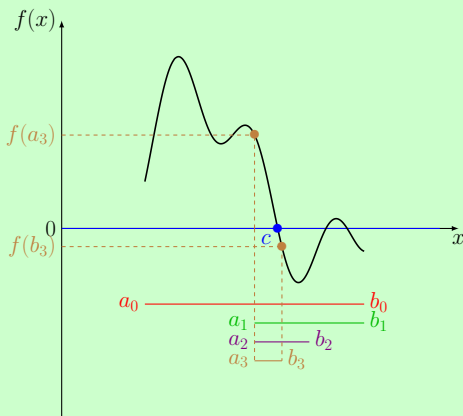
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

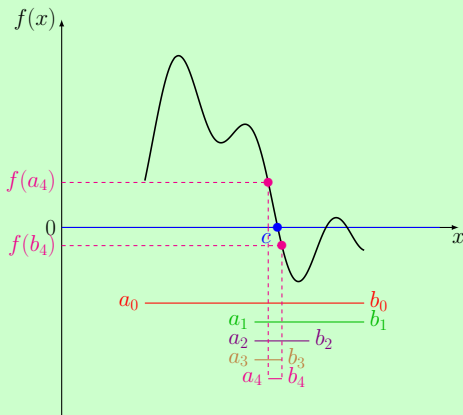
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
On a $f(a_3)f(b_3) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

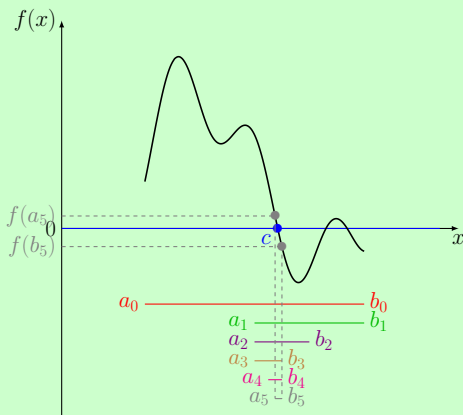
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$).



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
On a $f(a_3)f(b_3) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.
- Posons $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ et $b_4 = b_3$.
On a $f(a_4)f(b_4) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_4, b_4]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

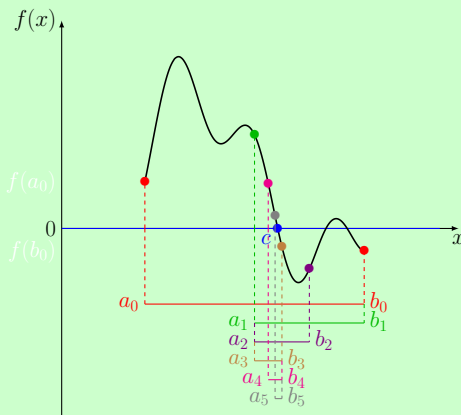
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
On a $f(a_3)f(b_3) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.
- Posons $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ et $b_4 = b_3$.
On a $f(a_4)f(b_4) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_4, b_4]$.
- Posons $a_5 = \frac{a_4+b_4}{2}$ et $b_5 = b_4$.
On a $f(a_5)f(b_5) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_5, b_5]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$).



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
On a $f(a_3)f(b_3) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.
- Posons $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ et $b_4 = b_3$.
On a $f(a_4)f(b_4) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_4, b_4]$.
- Posons $a_5 = \frac{a_4+b_4}{2}$ et $b_5 = b_4$.
On a $f(a_5)f(b_5) < 0$,
donc f admet un zéro dans $[a_5, b_5]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

On construit ainsi de proche en proche deux suites de points a_0, a_1, a_2, \dots et b_0, b_1, b_2, \dots dans $[a, b]$ telles que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est l'une des deux "moitiés" de $[a_n, b_n]$ et $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

On a donc une suite d'intervalles **fermés emboîtés** $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ de longueurs $\ell_0 = b_0 - a_0$, $\ell_1 = \ell_0/2$, $\ell_2 = \ell_0/2^2 \dots$

En conséquence, les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient :

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

On a donc affaire à deux suites **adjacentes** (cf. cours du 2nd semestre).

Elles sont **convergentes** et admettent la **même** limite $c \in [a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c \quad (\text{ou encore } \bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] = \{c\}).$$

Par continuité, on en tire

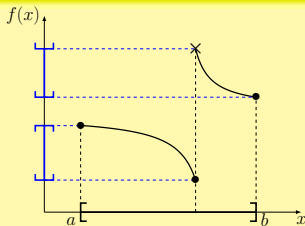
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c).$$

Enfin, la propriété $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ entraîne $f(c)^2 \leq 0$ soit $f(c) = 0$. L'algorithme de dichotomie conduit donc à un zéro de la fonction f .

Corollaire 3.12 (Image d'un intervalle)

L'image d'un **intervalle** par une fonction **continue** est un **intervalle**.

Remarque 3.13



Si la fonction présente au moins une discontinuité, son image peut **ne pas** être un intervalle.

Exemple 3.14 (Fonction caractéristique de \mathbb{Q} (facultatif))

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

La fonction f prend les deux seules valeurs 0 et 1. On a $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ et plus généralement, pour tous réels a, b tels que $a < b$, il existe un **rationnel** et un **irrationnel** entre a et b (on dit que \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses** dans \mathbb{R}), donc $f([a, b]) = \{0, 1\}$.

La fonction f n'est donc **continue sur aucun intervalle** (non réduit à un point) de \mathbb{R} .

Théorème 3.15 (Image d'un fermé borné : théorème des valeurs extrêmes)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle **fermé borné** $[a, b]$.

Alors f est **bornée** sur $[a, b]$ et **atteint** ses bornes inférieure et supérieure m et M : $f(x)$

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

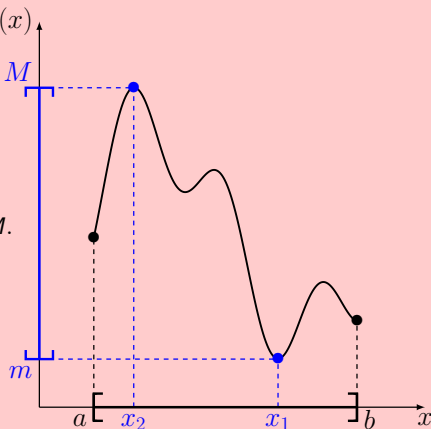
$$\text{et } M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Autrement dit : il existe deux réels x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

De plus,

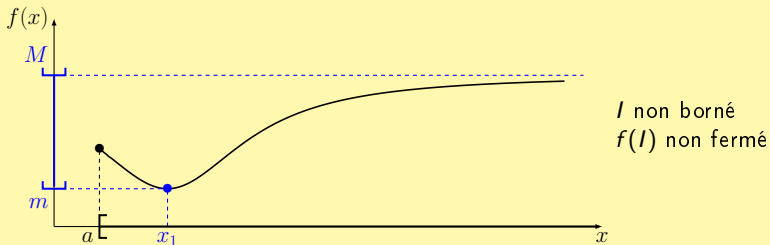
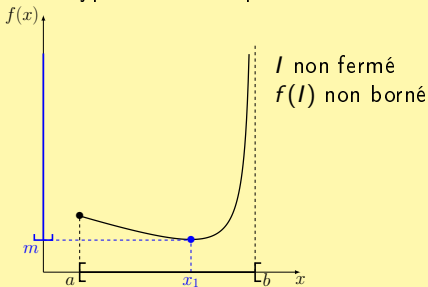
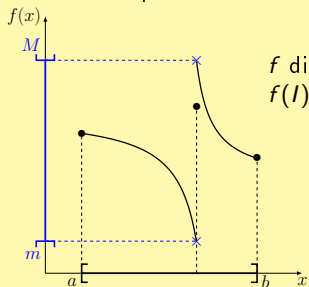
$$f([a, b]) = [m, M].$$

L'image d'un intervalle **fermé borné** par une fonction **continue** est encore un intervalle **fermé borné**.



Remarque 3.16 (Contre-exemples)

Le théorème peut être mis en défaut si l'une des hypothèses n'est pas satisfaite.

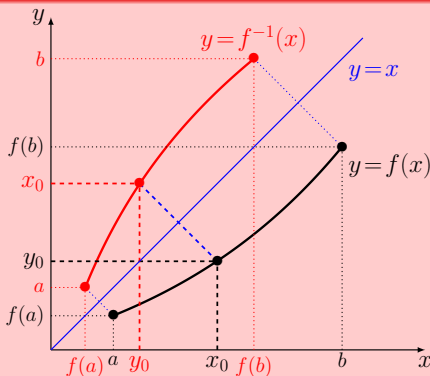


Théorème 3.17 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un **intervalle** I .

- $f(I)$ est un **intervalle** dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I .
- f réalise une **bijection** de I sur $f(I)$.
- f^{-1} est **continue** et **strictement monotone** sur $f(I)$, de même sens de variation que f .

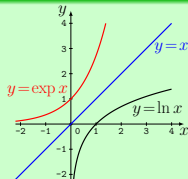
Rappel : les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormal du plan sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exemple 3.18 (Logarithme/exponentielle)

La fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est **continue**, **strictement croissante** de limites $-\infty$ et $+\infty$ en 0^+ et $+\infty$ respectivement.

Elle est donc **bijective**. Sa réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.



- 1 Propriétés dans l'ensemble des réels
- 2 Limites d'une fonction
- 3 Continuité d'une fonction
- 4 Fonctions trigonométriques réciproques
 - La fonction arcsin
 - La fonction arccos
 - La fonction arctan
 - Exemples

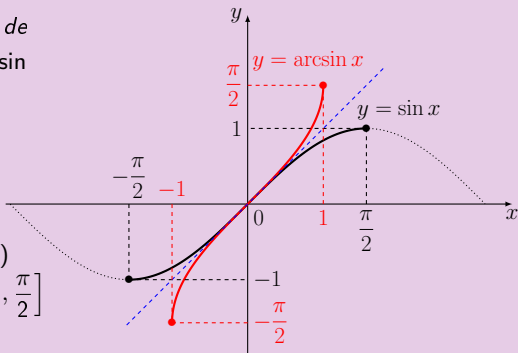
Proposition 4.1

La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$ et l'on note arcsin sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longmapsto \arcsin(x)$$

et
$$\begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$


Proposition 4.2

① arcsin est **continue, strictement croissante et impaire** sur $[-1, 1]$.

②
$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], & \sin(\arcsin(x)) = x \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \arcsin(\sin(x)) = x \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], & \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2} \\ \forall x \in [-1, 1], & \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{cases}$$

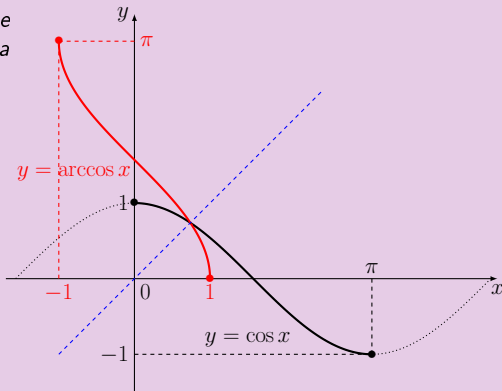
Proposition 4.3

La fonction \cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et l'on note \arccos sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$x \longmapsto \arccos(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$


Proposition 4.4

① \arccos est **continue, strictement décroissante** sur $[-1, 1]$.

②
$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{cases}$$

④
$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

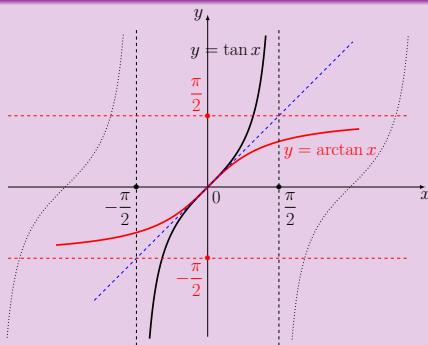
Proposition 4.5

La fonction \tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} et l'on note \arctan sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$x \longmapsto \arctan(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$



Proposition 4.6

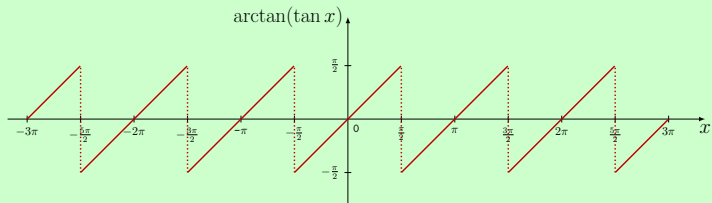
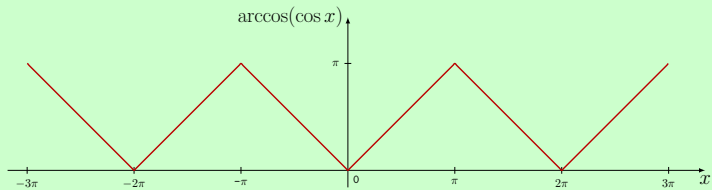
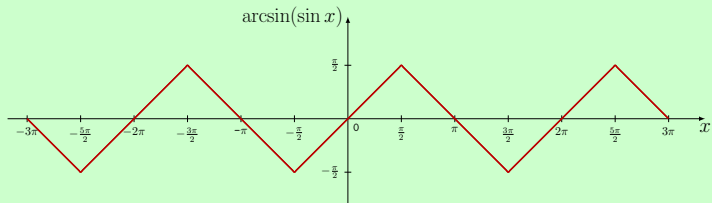
① \arctan est **continue, strictement croissante** et **impaire** sur \mathbb{R} .

②
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \tan(\arctan(x)) = x \\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, & \arctan(\tan(x)) = x \end{cases}$$

③
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

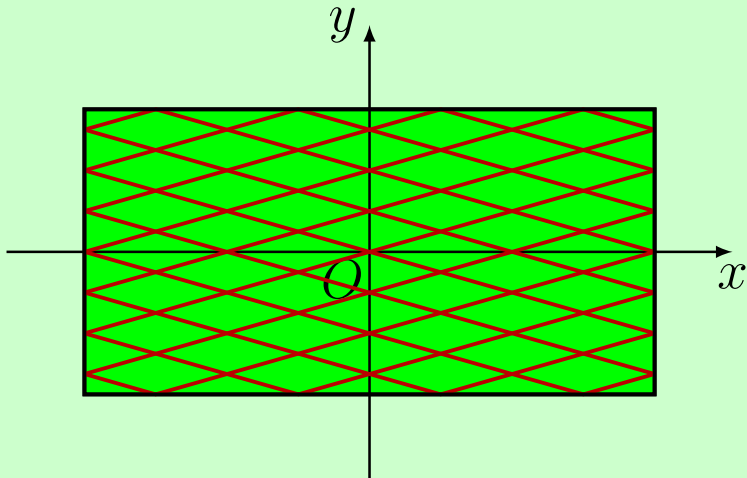
④
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

Exemple 4.7 (Courbes en « dents de scie »)



Exemple 4.8 (Billard rectangulaire)

Courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 2 \arcsin(\sin(7t)) \\ y(t) = \arcsin(\sin(4t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$



Continuité Discontinuité

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_continuite/continuite0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_continuite/continuite0.html)

Suites récurrentes

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html)

Notions à retenir

- Maîtrise de la valeur absolue
- Borne supérieure/inférieure
 - ★ Identification et caractérisation
- Limites
 - ★ Maîtrise des techniques de calculs
 - ★ Théorème de la limite monotone
 - ★ Recherche d'asymptote
 - ★ Limites usuelles à connaître...
- Continuité
 - ★ Prolongement par continuité
 - ★ Opérations
 - ★ Théorèmes fondamentaux
(TVI/TVE/théorème de la bijection)
- Fonctions trigonométriques réciproques
 - ★ Graphes et quelques propriétés à connaître
 - ★ Maîtrise de la réciprocité