

Dérivation des fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

- 1 Dérivabilité en un point
 - Nombre dérivé
 - Dérivabilité à gauche/à droite
 - Interprétation graphique
 - Fonctions à valeurs complexes
- 2 Dérivabilité sur un intervalle
 - Opérations
 - Dérivation d'une réciproque
 - Extremum d'une fonction
 - Théorème de Rolle
 - Théorème des accroissements finis
 - Dérivée et variations
 - Limite de la dérivée
- 3 Dérivation d'ordre supérieur
 - Dérivées successives
 - Classe C^n
 - Opérations
- 4 Convexité d'une fonction
 - Fonctions convexes
 - Point d'inflexion
- 5 Compléments
 - Règle de L'Hospital

- 1 Dérivabilité en un point
 - Nombre dérivé
 - Dérivabilité à gauche/à droite
 - Interprétation graphique
 - Fonctions à valeurs complexes
- 2 Dérivabilité sur un intervalle
- 3 Dérivation d'ordre supérieur
- 4 Convexité d'une fonction
- 5 Compléments

Dans ce qui suit, sauf indication contraire, I désigne un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point, f une application de I dans \mathbb{R} et x_0 un point de I .

Définition 1.1 (Dérivabilité)

- Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, on appelle **taux d'accroissement de f entre x_0 et x** le rapport $\tau_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- On dit que f est **dérivable en x_0** si l'application τ_{x_0} admet une limite **finie** en x_0 . On note alors cette limite **$f'(x_0)$** et on l'appelle le **nombre dérivé de f en x_0** :

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si x_0 est une borne de l'intervalle I , la limite de τ_{x_0} en x_0 est supposée être une limite à gauche ou une limite à droite selon le cas de figure.

Corollaire 1.2 (Dérivabilité \implies continuité)

Si une fonction f est **dérivable** en x_0 alors f est **continue** en x_0 .

Attention, la **réciproque** de cette implication est **fausse**. Par exemple, pour $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$, la fonction f est **continue** mais **pas dérivable** en x_0 .

Exemple 1.3 (Fonction puissance)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Les deux formulations conduisent à $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$:

- $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0x^{n-2} + x_0^2x^{n-3} + \dots + x_0^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} nx_0^{n-1};$$
- $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \binom{n}{1}x_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} nx_0^{n-1}.$$

Exemple 1.4 (Fonction sinus)

Soit $f(x) = \sin x$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Les deux formulations conduisent à $f'(x_0) = \cos x_0$.

En effet, à l'aide de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$:

- $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 2 \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \cos x_0;$$
- $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \sin x_0 \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x_0 \left(\frac{\sin h}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x_0.$$

Définition 1.5 (Dérivabilité à gauche, à droite)

On dit que f est **dérivable à gauche en x_0** (resp. **dérivable à droite en x_0**) lorsque τ_{x_0} admet une limite **finie** à gauche en x_0 (resp. une limite **finie** à droite en x_0).

On note alors $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Proposition 1.6

Si f est définie **dans un voisinage de x_0** :

f est **dérivable** en x_0 ssi f est **dérivable à gauche et à droite** en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

On a alors $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple 1.7 (Valeur absolue)

Soit f la fonction « valeur absolue » : $f(x) = |x|$.

On a $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$.

Ainsi f est dérivable à **droite et à gauche** en 0 : $f'_d(0) = +1$ et $f'_g(0) = -1$, mais $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f **n'est pas** dérivable en 0.

Définition 1.8 (Tangente)

On munit le plan d'un repère orthonormal.

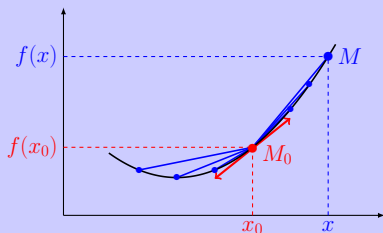
- ① Si f est une fonction **dérivable** en x_0 , la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est appelée **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 .

C'est la position limite des **cordes** reliant un point de la courbe $M(x, f(x))$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$ lorsque M tend vers M_0 .

Dans le cas d'une **dérivabilité** de f uniquement à **gauche** ou à **droite** en x_0 , on parle de **demi-tangente**.

- ② Dans le cas où $\lim_{x \rightarrow x_0^- \text{ ou } x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet une **demi-tangente verticale** en x_0 .

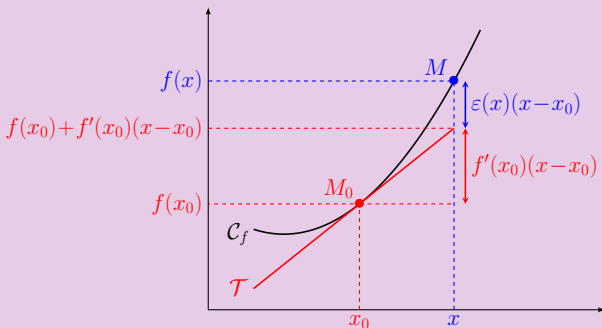
- ③ Si f est **continue** en x_0 et **dérivable à gauche et à droite** en x_0 avec $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ on dit que la courbe représentative de f admet un **point anguleux** en x_0 .



Proposition 1.9 (Approximation affine)

Supposons f **dérivable** en x_0 . Alors il existe une application ε définie dans un voisinage de x_0 avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon = 0$ telle que

$$\text{au voisinage de } x_0, \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$



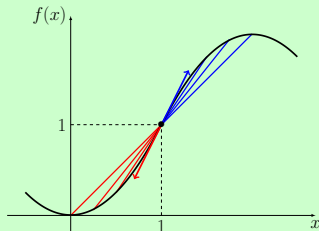
La droite \mathcal{T} d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la **tangente** à la courbe représentative C_f de f (cf. Définition 1.8).

Remarque : la relation $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est appelée **développement limité d'ordre 1 de f en x_0** (cf. chapitre « Développements limités »).

Exemple 1.10 (Raccord dérivable)

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

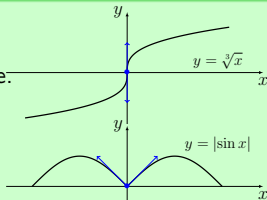
- f est continue sur \mathbb{R} ;
- on a $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1, \\ -x + 3 & \text{si } x > 1, \end{cases}$
 puis $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$;
- donc f est dérivable à droite et à gauche en 1 et $f'_g(1) = f'_d(1) = 2$. Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$;
- la courbe admet la droite d'équation $y = 2x - 1$ pour **tangente** au point de coordonnées $(1, 1)$.



Exemple 1.11 (Fonctions non dérivables en un point)

- ① Soit $g(x) = \sqrt[3]{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = +\infty$
 donc la courbe admet une **tangente verticale** en l'origine.

- ② Soit $h(x) = |\sin x|$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \pm 1$
 donc la courbe admet un **point anguleux** en l'origine.



On peut étendre la notion de dérivabilité aux fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} en utilisant les limites complexes des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

Proposition 1.12 (Dérivée d'une fonction à valeurs complexes)

Soit f une fonction de I dans \mathbb{C} telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions de I dans \mathbb{R} et $x_0 \in I$.

La fonction f est dérivable en x_0 ssi f_1 et f_2 le sont, et l'on a alors

$$f'(x_0) = f_1'(x_0) + if_2'(x_0).$$

Proposition 1.13 (Dérivation de l'exponentielle complexe)

Rappelons que pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$ (exponentielle complexe). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et f définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\lambda x}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lambda e^{\lambda x}.$$

- 1 Dérivabilité en un point
- 2 Dérivabilité sur un intervalle
 - Opérations
 - Dérivation d'une réciproque
 - Extremum d'une fonction
 - Théorème de Rolle
 - Théorème des accroissements finis
 - Dérivée et variations
 - Limite de la dérivée
- 3 Dérivation d'ordre supérieur
- 4 Convexité d'une fonction
- 5 Compléments

Définition 2.1 (Dérivabilité sur un intervalle)

On dit qu'une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I lorsque f est dérivable en tout point de I . On note f' la **fonction dérivée** de f qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$.

Proposition 2.2 (Addition, multiplication, division)

Soit f et g deux fonctions **dérivables** sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les fonctions λf , $f + g$, $f \times g$ sont alors **dérivables** sur I et l'on a :

$$\bullet (\lambda f)' = \lambda f' \quad \bullet (f + g)' = f' + g' \quad \bullet (f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est aussi **dérivable** sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exemple 2.3 (Fonctions homographiques)

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, c étant **non nul**. On définit la fonction f par

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

- Son ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
- La fonction f est **dérivable** sur \mathcal{D}_f comme quotient de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}.$$

Remarque : f est constante ssi les couples (a, b) et (c, d) sont proportionnels.

Proposition 2.4 (Composition)

Soit I et J deux intervalles, f une fonction de I dans J et g une fonction de J dans \mathbb{R} . Si f est **dérivable** sur I et g est **dérivable** sur J alors $g \circ f$ est **dérivable** sur I et l'on a la **formule de dérivation d'une fonction composée** :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Exemple 2.5 (Composées usuelles)

Lorsque les conditions le permettent, on a :

- $(e^f)' = f'e^f$
- $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$
- $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$
- $(\sin f)' = f' \cos f$
- $(\cos f)' = -f' \sin f$
- $(\tan f)' = \frac{f'}{\cos^2 f}$

Remarque 2.6

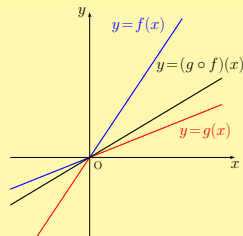
Les conditions f et g dérivables sont **suffisantes** mais **non nécessaires** pour que $g \circ f$ soit dérivable.

Par exemple, soit a et b deux réels et

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leq 0 \\ bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} bx & \text{si } x \leq 0 \\ ax & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction $h = f \circ g = g \circ f$ est définie par $h(x) = (ab)x$.

Ainsi, lorsque $a \neq b$, f et g **ne** sont **pas** dérivables en 0 alors que h l'est.



Théorème 2.7 (Dérivation d'une bijection réciproque)

Soit f une application **continue et strictement monotone** sur un intervalle I . Elle induit une **bijection** de I sur $f(I)$ que l'on notera encore f .

① Supposons f **dérivable** en $x_0 \in I$.

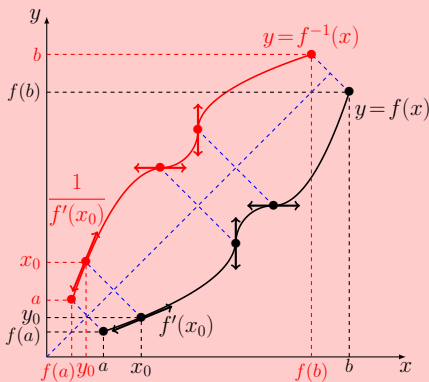
- Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est **dérivable** en $y_0 = f(x_0)$ et l'on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

- Si $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} **n'est pas dérivable** en $y_0 = f(x_0)$ et sa courbe représentative présente une **(demi-)tangente verticale** au point d'abscisse y_0 .

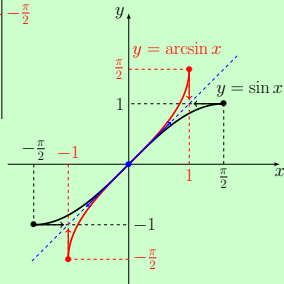
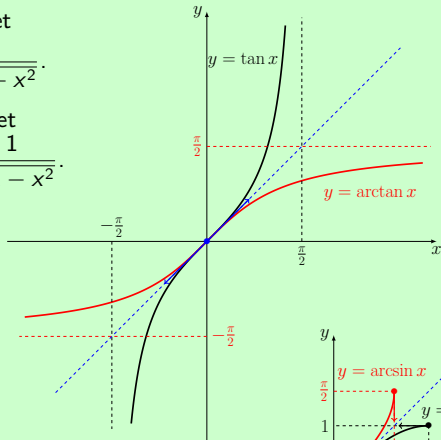
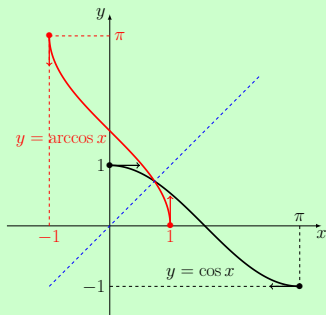
② Supposons $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$.

Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, $(f^{-1})'(y_0) = 0$ et sa courbe représentative présente une **tangente horizontale** au point d'abscisse y_0 .



Exemple 2.8 (Fonctions trigonométriques réciproques)

- arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et
 $\forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ et
 $\forall x \in] -1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- arctan est dérivable sur \mathbb{R} et
 $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.



Définition 2.9 (Extremum)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- ① On dit que f admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en x_0 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Un maximum ou un minimum local est appelé un **extremum local**.

- ② On dit que f admet un **maximum global** (resp. un **minimum global**) sur I en x_0 lorsque : $\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

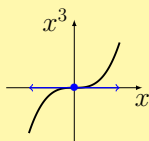
Proposition 2.10 (Condition nécessaire d'extremum)

Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I et $x_0 \in I$ qui **n'est pas** une borne de I .
Si f possède un **extremum local** en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 2.11 (Point critique)

Lorsque $f'(x_0) = 0$ on dit que x_0 est un **point critique** de f .

Attention, la **réciproque** de la proposition 2.10 est **fausse** : un point critique **n'est pas nécessairement** un extremum.
Par exemple, $f(x) = x^3$ et $x_0 = 0$.

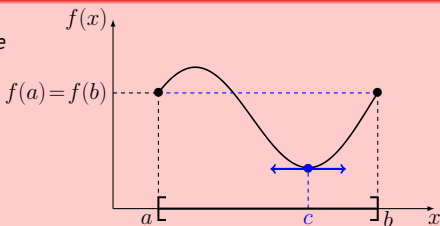


Théorème 2.12 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est **continue** sur $[a, b]$;
- f est **dérivable** sur $]a, b[$;
- $f(a) = f(b)$.

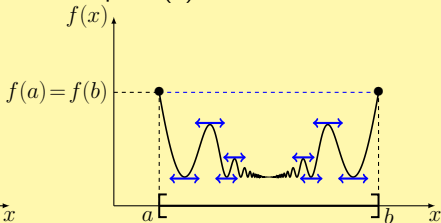
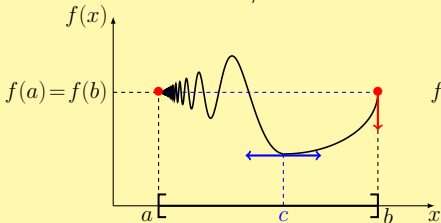
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Remarque 2.13

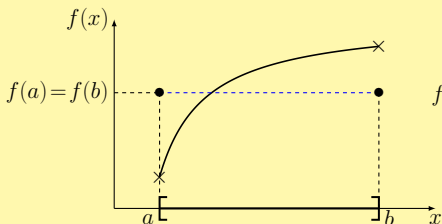
Les hypothèses « f est **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$ » sont équivalentes à « f **dérivable** sur $]a, b[$ et **continue** en a et b . »

- Il n'est pas nécessaire de supposer f dérivable en a ou/et b .
- Il peut y avoir une infinité de réels c tels que $f'(c) = 0$.

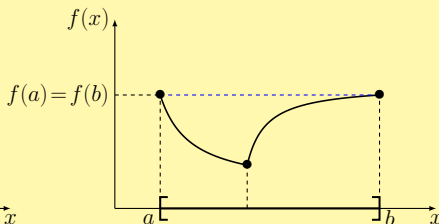


Remarque 2.14 (Contre-exemples)

Le théorème peut être mis en défaut lorsqu'une hypothèse n'est pas satisfaite.



- f **discontinue** aux bornes de l'intervalle, f' ne s'annule pas.



- f **non dérivable** en un point à l'intérieur de l'intervalle, f' ne s'annule pas.

Remarque 2.15

Le théorème de Rolle **ne s'étend pas** aux fonctions à valeurs complexes.

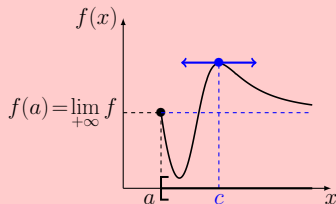
Par exemple, la fonction $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$ est dérivable sur $[0, 2\pi]$, satisfait $f(0) = f(2\pi)$ alors que sa dérivée, $f'(t) = i e^{it}$, ne s'annule pas.

Théorème 2.16 (Théorème de Rolle généralisé (facultatif))

① Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est **continue** sur $[a, +\infty[$;
- f est **dérivable** sur $]a, +\infty[$;
- $\lim_{+\infty} f = f(a)$.

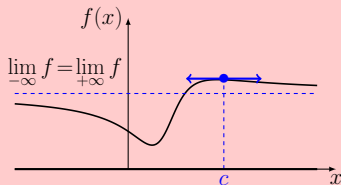
Alors $\exists c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.



② Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est **dérivable** sur \mathbb{R} ;
- $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f$ existent et coïncident.

Alors $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

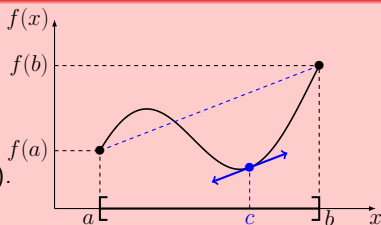


Théorème 2.17 (Théorème des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est **continue** sur $[a, b]$;
- f est **dérivable** sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Corollaire 2.18 (Inégalité des accroissements finis - version 1)

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$ ($a < b$).
 S'il existe des réels m et M tels que $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$, alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Corollaire 2.19 (Inégalité des accroissements finis - version 2)

Si f est **dérivable** sur un intervalle I et si $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ alors :

$$\forall (x, y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

On dit que f est une fonction **k -Lipschitzienne** sur I (cf. cours du 2nd semestre).

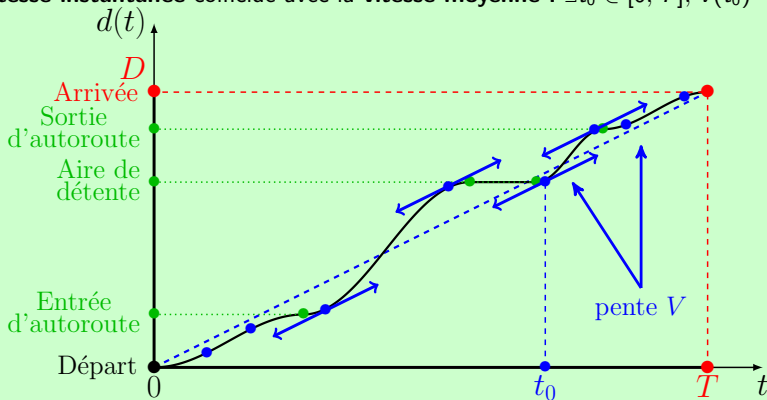
Exemple 2.20 (Cinématique)

Un véhicule parcourt une distance de D km durant un laps de temps de T minutes.

Soit $d : [0, T] \rightarrow [0, D]$ la fonction modélisant le problème : à chaque instant $t \in [0, T]$, $d(t)$ représente la distance parcourue durant l'intervalle de temps $[0, t]$.

L'application d (« loi horaire » du mouvement) est dérivable sur $[0, T]$, sa dérivée étant la **vitesse instantanée** du véhicule : $d'(t) = v(t)$. La **vitesse moyenne** est $V = \frac{D}{T}$.

Le théorème des accroissements finis stipule qu'il existe au moins un instant en lequel la **vitesse instantanée** coïncide avec la **vitesse moyenne** : $\exists t_0 \in [0, T], v(t_0) = V$.



Théorème 2.21 (Dérivée et variations)

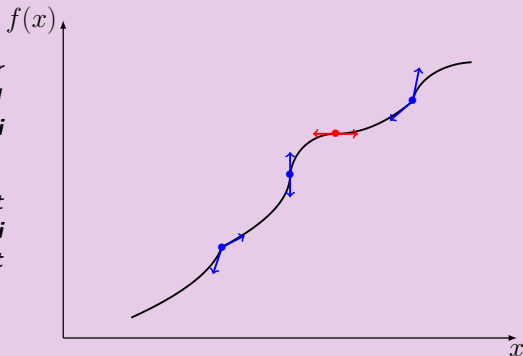
Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I . On a les équivalences suivantes :

- ① f est **croissante** sur I $\iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$
- ② f est **décroissante** sur I $\iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$
- ③ f est **constante** sur I $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

Proposition 2.22 (Condition suffisante de stricte monotonie)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et **dérivable** sur I sauf peut-être en un **nombre fini** de points.

Si f' est de **signe constant** et ne s'**annule** qu'en un **nombre fini** de points, alors f est **strictement monotone** sur I .



Théorème 2.23 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I , **dérivable** sur $I \setminus \{x_0\}$, où $x_0 \in I$.

- Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est **dérivable** en x_0 et $f'(x_0) = \ell$
(et donc f' est même continue en x_0). On dit que f est de **classe \mathcal{C}^1** en x_0 .
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^- \text{ ou } x_0^+} f'(x) = \pm\infty$, alors f n'est **pas dérivable** en x_0 et sa courbe représentative admet une (demi-)tangente **verticale** en x_0 .
- Si f' admet des limites à gauche et à droite en x_0 **distinctes** alors f n'est **pas dérivable** en x_0 . Si ces limites sont finies, f est dérivable à gauche et à droite en x_0 .

Exemple 2.24 (Raccord de classe \mathcal{C}^1)

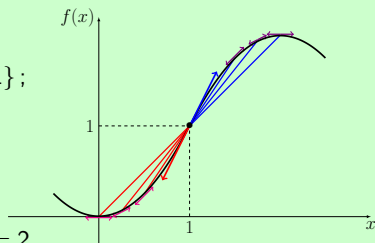
$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- f est **continue** sur \mathbb{R} et **dérivable** sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

- on a $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1, \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1, \end{cases}$

$$\text{puis } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = 2;$$

- donc f est **dérivable** en 1 (et \mathcal{C}^1) et $f'(1) = 2$.



Remarque 2.25

Dans le théorème 2.23, l'hypothèse « f est **continue** sur I et **dérivable** sur $I \setminus \{x_0\}$ » est équivalente à « f est **continue** en x_0 et **dérivable** sur $I \setminus \{x_0\}$ ».

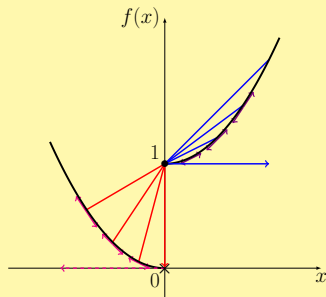
Le théorème est mis en défaut si f n'est **pas continue** en x_0 , f n'est évidemment **pas dérivable** en x_0 même si la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$ existe comme le montre l'exemple ci-dessous.

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0$;
- mais f n'est **pas dérivable** en 0 (discontinue en 0).

En fait f est **dérivable à droite** en 0, $f'_d(0) = 0$, mais **pas à gauche**.

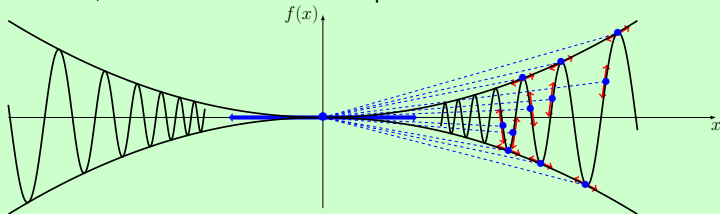
Le graphe de f admet ainsi une demi-tangente horizontale à **droite** en 0, mais contrairement aux apparences, **pas à gauche**.



Exemple 2.26 (Une fonction dérivable non \mathcal{C}^1)

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- f est clairement dérivable sur \mathbb{R}^* .
- Avec $|f(x)| \leq x^2$, on voit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.
- On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq |x|$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$, et alors f est dérivable en 0 de dérivée 0.
- On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. On voit que f' n'a pas de limite en 0.
- En conclusion, f est dérivable en 0 mais pas de classe \mathcal{C}^1 en 0.



- 1 Dérivabilité en un point
- 2 Dérivabilité sur un intervalle
- 3 Dérivation d'ordre supérieur**
 - Dérivées successives
 - Classe \mathcal{C}^n
 - Opérations
- 4 Convexité d'une fonction
- 5 Compléments

Définition 3.1 (Dérivées successives)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction f est **n fois dérivable** lorsqu'on peut dériver successivement n fois en commençant par f . On note alors $f^{(2)}$ (ou f'') la **dérivée 2^{nde}** de f , $f^{(3)}$ (ou f''') sa **dérivée 3^e**, etc., $f^{(n)}$ sa **dérivée n^e** . Par convention : $f^{(0)} = f$.

Remarque 3.2

Pour que f soit **n fois dérivable** en x_0 , il est implicitement nécessaire que $f^{(n-1)}$ soit définie sur un voisinage de x_0 , i.e. que f soit **$(n-1)$ fois dérivable** sur un **voisinage** de x_0 . En effet :

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Exemple 3.3 (Fonctions usuelles)

$$\bullet \exp^{(n)}(x) = \exp(x) \quad \bullet \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \bullet \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bullet \operatorname{ch}^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \bullet \operatorname{sh}^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\bullet \text{si } \varphi(x) = x^p \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} p(p-1)\dots(p-n+1)x^{p-n} & \text{si } n < p \\ p! & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$$

$$\bullet \text{si } \psi(x) = \frac{1}{x^p} \text{ avec } p \in \mathbb{N}, \psi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{x^{p+n}}$$

Définition 3.4 (Classe \mathcal{C}^n)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . On dit que :

- 1 f est de **classe \mathcal{C}^0** en x_0 lorsque f est **continue** en x_0 .
- 2 f est de **classe \mathcal{C}^n** en x_0 ($n \in \mathbb{N}^*$) lorsque f est **n fois dérivable** en x_0 et lorsque $f^{(n)}$ est **continue** en x_0 .
- 3 f est de **classe \mathcal{C}^∞** en x_0 lorsque elle est de classe \mathcal{C}^n en x_0 **pour tout $n \in \mathbb{N}$** .

Proposition 3.5 (Hiérarchie)

- 1 f est de **classe \mathcal{C}^n** \implies f est **n fois dérivable** \implies f est de **classe \mathcal{C}^{n-1}**
- 2 f est **n fois dérivable** \implies f est de **classe \mathcal{C}^{n-1}** \implies f est **$(n-1)$ fois dérivable**

Exemple 3.6 (Fonctions usuelles)

- 1 Les fonctions \exp , \cos , \sin , ch , sh , polynômes sont de **classe \mathcal{C}^∞** sur \mathbb{R} .
- 2 Les fonctions \ln et puissances sont de **classe \mathcal{C}^∞** sur $]0, +\infty[$.
- 3 Les fonctions rationnelles sont de **classe \mathcal{C}^∞** sur leur ensemble de définition.

Proposition 3.7 (Opérations)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- ① les fonctions λf et $f + g$ sont n fois dérivables sur I et l'on a :

$$\bullet (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)} \quad \bullet (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

- ② la fonction $f \times g$ est n fois dérivable sur I et l'on a (**formule de Leibniz**) :

$$\bullet (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exemple 3.8 (Formule de Leibniz)

- ① Pour $n = 2$ et $n = 3$, la formule de Leibniz s'écrit :

$$\bullet (fg)'' = fg'' + 2f'g' + f''g \quad \bullet (fg)''' = fg''' + 3f'g'' + 3f''g' + f'''g.$$

- ② Soit φ la fonction définie $\varphi(x) = x^2 e^x$.

Posons $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$.

On a $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ puis $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $f^{(k)}(x) = 0$.

Par ailleurs $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(x) = e^x$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$.

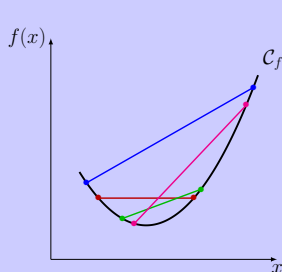
- 1 Dérivabilité en un point
- 2 Dérivabilité sur un intervalle
- 3 Dérivation d'ordre supérieur
- 4 Convexité d'une fonction**
 - Fonctions convexes
 - Point d'inflexion
- 5 Compléments

Définition 4.1 (Fonction convexe)

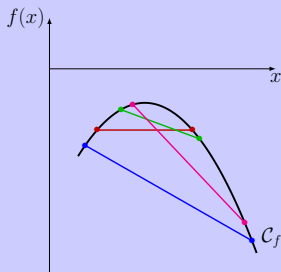
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative \mathcal{C}_f .

① Définition géométrique

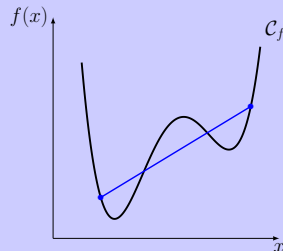
- On dit que f est **convexe sur I** (resp. **concave sur I**) lorsque toutes les cordes reliant deux points de \mathcal{C}_f sont **au-dessus** (resp. **au-dessous**) de \mathcal{C}_f .
- La fonction f est **concave sur I** ssi la fonction $-f$ est **convexe sur I** .



f convexe



f concave



f ni convexe
ni concave

Définition 4.1 (Fonction convexe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative \mathcal{C}_f .

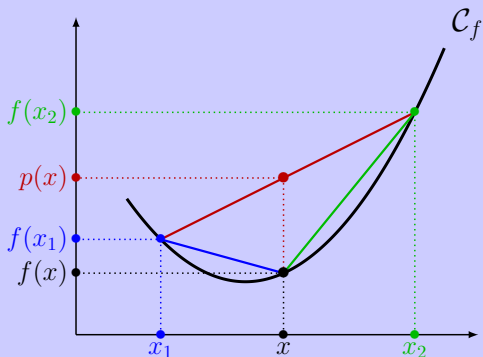
② Définition analytique

f est **convexe** ssi

$$\forall x_1, x_2 \in I (x_1 < x_2), \forall x \in]x_1, x_2[, \quad f(x) \leq f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

ou encore

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$



$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1) \\ &= f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

— pente $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

— pente $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

— pente $\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$

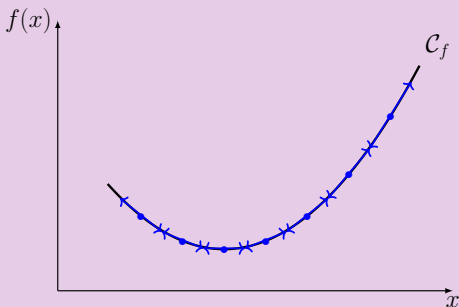
Proposition 4.2 (Fonction convexe et dérivation)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- 1 La fonction f est **convexe sur I** ssi la fonction f' est **croissante sur I** .
- 2 La fonction f est **concave sur I** ssi la fonction f' est **décroissante sur I** .

Proposition 4.3 (Position courbe/tangentes)

La courbe représentative d'une fonction **convexe** (resp. **concave**) est **au-dessus** (resp. **au-dessous**) de chacune de ses tangentes.



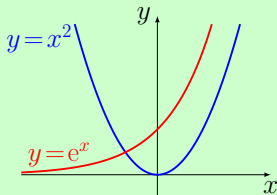
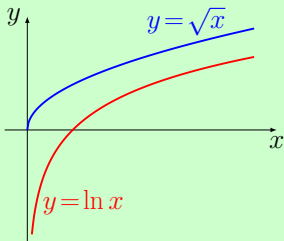
Proposition 4.4 (Un critère de convexité)

Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I .

f est **convexe** sur I (resp. **concave** sur I) ssi $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$).

Exemple 4.5 (Fonctions usuelles)

- Les fonctions carré et exponentielle sont **convexes** sur \mathbb{R} .
- Les fonctions racine carrée et logarithme sont **concaves** sur $]0, +\infty[$.
- Plus généralement : la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est **convexe** pour tout $\alpha \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ **concave** pour tout $\alpha \in [0, 1]$ sur $]0, +\infty[$

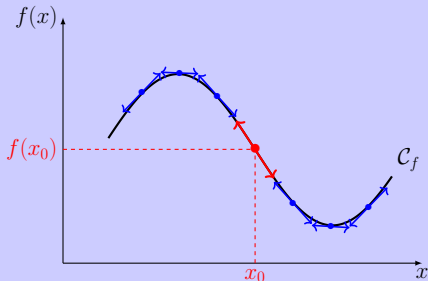


Remarque 4.6 (Convexité et réciprocité)

Une **bijection convexe** admet une **réciproque concave** et réciproquement.

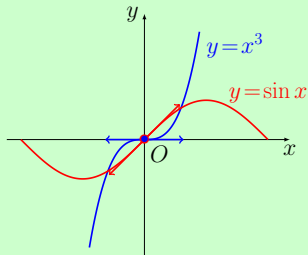
Définition 4.7 (Point d'inflexion)

Lorsque f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, on dit que sa courbe représentative **change de concavité** et le point d'abscisse x_0 est alors appelé **point d'inflexion** de la courbe.



Exemple 4.8 (Fonctions « cube » et sinus)

- 1 Les fonctions cube et sinus admettent un **point d'inflexion** en l'origine.
- 2 Plus généralement, pour tout **entier positif impair** n , la fonction $x \mapsto x^n$ admet un **point d'inflexion** en l'origine.

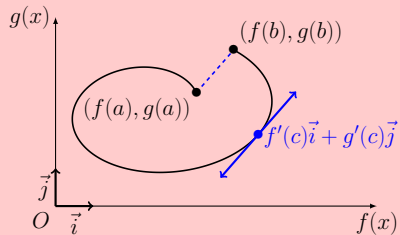


- 1 Dérivabilité en un point
- 2 Dérivabilité sur un intervalle
- 3 Dérivation d'ordre supérieur
- 4 Convexité d'une fonction
- 5 Compléments
 - Règle de L'Hospital

La connaissance des résultats suivants est **facultative** mais peut parfois s'avérer utile :

Théorème 5.1 (Accroissements finis généralisés (facultatif))

Soit f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle $[a, b]$ et **dérivables** sur $]a, b[$.
Alors il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que
 $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.



Corollaire 5.2 (Règle de L'Hospital (facultatif))

Soit f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I , **dérivables** sur $I \setminus \{x_0\}$ où $x_0 \in I$, telles que $g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{x_0\}$. Alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \ell.$$

Cette règle permet d'étudier certaines **formes indéterminées** $\frac{0}{0}$.

Corollaire 5.3 (Initiation à la formule de Taylor-Young (cf. chapitre « Développements limités »))

① Soit f une fonction **deux fois dérivable** en x_0 . Alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

② Plus généralement, si f est une fonction **n fois dérivable** en x_0 , alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Exemple 5.4 (Fonctions cosinus/sinus et cosinus/sinus hyperbolique)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Dérivabilité

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lhopital/Lhopital0.html

Fonctions convexes

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_fonctions_convexes.pdf

Formule de Stirling

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_stirling.pdf

Notions à retenir

- Dérivée
 - ★ Opérations, techniques de calcul
 - ★ Ordre supérieur, classe C^n
- Tangente
 - ★ Équation à connaître
 - ★ Position relative de la courbe par rapport à sa tangente
- Dérivabilité
 - ★ Théorèmes fondamentaux (théorème de Rolle, TAF, IAF)
 - ★ Dérivée de la réciproque d'une bijection
- Variations
 - ★ Monotonie
 - ★ Détermination d'extremums
 - ★ Étude de la convexité, détermination de points d'inflexion
- Fonctions trigonométriques réciproques
 - ★ Dérivées à connaître