

Compléments sur les polynômes

Formule de Taylor

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

- 1 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
 - Définitions
 - Algorithme
 - Racines d'un polynôme
- 2 Formule de Taylor pour un polynôme
 - Dérivées successives
 - Énoncé
 - Exemple
- 3 Racines multiples et caractérisation
- 4 Factorisation
 - Factorisation sur \mathbb{C}
 - Somme et produit des racines
 - Factorisation sur \mathbb{R}
 - Théorème de Rolle et polynômes
- 5 Formule de Taylor-Lagrange
 - Énoncé
 - Conséquences
 - Applications
- 6 Compléments
 - Interpolation de Lagrange

- 1 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
 - Définitions
 - Algorithme
 - Racines d'un polynôme
- 2 Formule de Taylor pour un polynôme
- 3 Racines multiples et caractérisation
- 4 Factorisation
- 5 Formule de Taylor-Lagrange
- 6 Compléments

On rappelle que l'on note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (cf. chapitre 1). $\mathbb{K}[X]^*$ désigne $\mathbb{K}[X]$ privé de la fonction nulle.

Dans la suite, on utilisera pour simplifier le terme **polynôme** pour désigner une fonction polynôme, et la notation X^k pour désigner la fonction $x \mapsto x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) qui permettra de noter toute fonction polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) selon $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Théorème-définition 1.1 (Division euclidienne)

Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ et tout $B \in \mathbb{K}[X]^*$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de A par B .

Définition 1.2 (Divisibilité)

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]^*$.

On dit que **A est divisible par B** (ou que **B divise A**) lorsque le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme **nul**.

Autrement dit, A est divisible par B ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\
 -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\
 \hline
 4X + 9 & \\
 -(4X + 2) & \\
 \hline
 7 &
 \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

Remarque : On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

- En effet, le théorème 1.1 assure l'existence et l'unicité a priori de deux polynômes Q et R , R étant de degré < 1 , tels que $A = BQ + R$.
- R est en fait un polynôme constant : $R = r$ avec $r \in \mathbb{K}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{K}, A(x) = B(x)Q(x) + r$.
- En particulier pour $x = -\frac{1}{2}$, on a $B(-\frac{1}{2}) = 0$ donc $r = A(-\frac{1}{2}) = 7$. Ainsi $R=7$.

De manière générale, si $B = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ (B est donc de degré 1), alors A se décompose selon $A = BQ + r$ avec $r = A(\alpha)$:

$$A = (X - \alpha)Q + A(\alpha).$$

Définition 1.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Proposition 1.4

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.

Corollaire 1.5 (Racines et divisibilité)

① Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de \mathbb{K} **distincts**.

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.

② Tout polynôme (non nul) de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **au plus** n racines distinctes dans \mathbb{K} . Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.

Exemple 1.6 (Racines et divisibilité)

Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P . Donc P est divisible par $X - 1$.
- La division euclidienne de P par $X - 1$ fournit $P = (X - 1)Q$ avec $Q = X^2 - X - 2$ qui admet pour racines -1 et 2 . Ainsi P admet au moins 3 racines.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$.

- 1 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 2 Formule de Taylor pour un polynôme
 - Dérivées successives
 - Énoncé
 - Exemple
- 3 Racines multiples et caractérisation
- 4 Factorisation
- 5 Formule de Taylor-Lagrange
- 6 Compléments

Définition 2.1 (Dérivées successives)

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le

polynôme dérivé P' d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$

et, par un procédé récurrent, ses **dérivées successives** $P^{(k)}$ pour tout entier $k \geq 2$.

Par exemple : $P^{(2)} = P'' = \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k X^{k-2}$, $P^{(3)} = P''' = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)a_k X^{k-3}$.

On prolonge formellement cette définition au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 2.2 (Degré des dérivées successives)

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k \leq \deg(P)$, alors $\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$. Si $k > \deg(P)$, alors $P^{(k)} = 0$.

Proposition 2.3 (Formule de Maclaurin)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(0) = k! a_k$.

Ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$
Corollaire 2.4

Une fonction polynôme est la fonction **nulle** ssi **tous** ses coefficients sont **nuls**.

Théorème 2.5 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ ($n \in \mathbb{N}$). On a la formule de **Taylor** :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

En particulier, pour $\deg(P) \leq 3$, la formule de **Taylor** s'écrit :

- si $\deg(P) = 1$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha)$;
- si $\deg(P) = 2$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2$;
- si $\deg(P) = 3$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2 + \frac{P'''(\alpha)}{6}(X - \alpha)^3$.

Remarque 2.6 (Formule de Taylor et formule du binôme)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $(X^n)^{(k)}(\alpha) = \frac{n!}{(n-k)!} \alpha^{n-k}$
 et la formule de **Taylor** donne $X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (X - \alpha)^k$.

On retrouve la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X - \alpha) + \alpha$).

Exemple 2.7

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X + 1)^3 + 2(X + 1)^2 + 3(X + 1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X + 1$:

$$\begin{array}{r} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \quad | \quad X + 1 \\ 4 \quad | \quad X^2 + 4X + 6 \quad | \quad X + 1 \\ 3 \quad | \quad X + 3 \quad | \quad X + 1 \\ 2 \quad | \quad 1 \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$\begin{aligned} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 &= (X^2 + 4X + 6)(X + 1) + 4 \\ &= ((X + 3)(X + 1) + 3)(X + 1) + 4 \\ &= (X + 3)(X + 1)^2 + 3(X + 1) + 4 \\ &= (1(X + 1) + 2)(X + 1)^2 + 3(X + 1) + 4 \\ &= 1(X + 1)^3 + 2(X + 1)^2 + 3(X + 1) + 4. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un **développement arithmétique en base $X + 1$** .

- 1 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 2 Formule de Taylor pour un polynôme
- 3 Racines multiples et caractérisation**
- 4 Factorisation
- 5 Formule de Taylor-Lagrange
- 6 Compléments

Définition 3.1 (Racines et multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Si $\mu = 1$ (resp. $\mu = 2$, $\mu = 3$), α est dite **racine simple** (resp. **double**, **triple**) de P . Lorsque $\mu \geq 2$ c'est une **racine multiple**.

Proposition 3.2 (Racines et divisibilité)

- 1 Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines **distinctes** de P de multiplicités respectives μ_1, \dots, μ_p alors P est divisible par le produit $(X - \alpha_1)^{\mu_1} \cdots (X - \alpha_p)^{\mu_p}$.
- 2 Tout polynôme de degré n admet **au plus** n racines dans \mathbb{K} comptées avec leur multiplicité.

La formule de Taylor permet de donner une caractérisation de multiplicité.

Proposition 3.3 (Un critère de multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

α est racine de P de multiplicité μ ssi

$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et} \\ P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

- 1 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 2 Formule de Taylor pour un polynôme
- 3 Racines multiples et caractérisation
- 4 Factorisation
 - Factorisation sur \mathbb{C}
 - Somme et produit des racines
 - Factorisation sur \mathbb{R}
 - Théorème de Rolle et polynômes
- 5 Formule de Taylor-Lagrange
- 6 Compléments

Théorème 4.1 (Théorème fondamental de l'algèbre : théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet **au moins** une racine dans \mathbb{C} .

Corollaire 4.2

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet **exactement** n racines dans \mathbb{C} comptées avec leur ordre de multiplicité.

Théorème 4.3 (Factorisation sur \mathbb{C})

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines **complexes** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ et A le coefficient de son monôme de plus haut degré. Le polynôme P se **factorise** sur \mathbb{C} selon

$$P = A(X - \alpha_1)^{\mu_1} (X - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (X - \alpha_p)^{\mu_p} = A \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{\mu_k}.$$

Remarque 4.4 (Somme des multiplicités)

La somme des multiplicités des racines sur \mathbb{C} d'un polynôme coïncide avec son degré :

$$\sum_{k=1}^p \mu_k = \deg(P).$$

Corollaire 4.5 (Somme et produit des racines)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** et le **produit** des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 4.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $\deg(P) = 2$: $P = aX^2 + bX + c = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

- Cas $\deg(P) = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$

Complément (facultatif) : $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = \frac{c}{a}$.

- Cas $\deg(P) = 4$: $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = \frac{e}{a}.$$

Complément (facultatif) : $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4 = \frac{c}{a}$
 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = -\frac{d}{a}$

Proposition 4.7 (Polynôme à coefficients réels et conjugaison)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si ζ est une racine **complexe non réelle** de multiplicité ν de P , alors $\bar{\zeta}$ est également une racine de multiplicité ν de P . Dans ce cas, P est divisible par $(X - \zeta)^\nu (X - \bar{\zeta})^\nu = (X^2 + aX + b)^\nu$ où $a = -2\Re(\zeta) \in \mathbb{R}$ et $b = |\zeta|^2 \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.8 (Factorisation sur \mathbb{R})

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note :

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines **réelles** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$;
- $\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \dots, \zeta_q, \bar{\zeta}_q$ ses racines **complexes non réelles deux à deux conjuguées** distinctes de multiplicités respectives $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$;
- A le coefficient de son monôme de plus haut degré.

Le polynôme P se **factorise** sur \mathbb{R} selon

$$\begin{aligned} P &= A(X - \alpha_1)^{\mu_1} (X - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (X - \alpha_p)^{\mu_p} \\ &\quad \times (X^2 + a_1X + b_1)^{\nu_1} (X^2 + a_2X + b_2)^{\nu_2} \dots (X^2 + a_qX + b_q)^{\nu_q} \\ &= A \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^q (X^2 + a_kX + b_k)^{\nu_k} \end{aligned}$$

où $a_k = -2\Re(\zeta_k)$ et $b_k = |\zeta_k|^2$.

Exemple 4.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur \mathbb{C} . Il admet **au plus** 4 racines dans \mathbb{C} , et plus précisément **exactement** 4 racines dans \mathbb{C} comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4 e^{i(4\theta)} = 4 e^{i\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, soit $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \right\}$.

Les **racines de P dans \mathbb{C}** sont donc

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i & \zeta_2 &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i \\ \zeta_3 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i = \bar{\zeta}_1 & \zeta_4 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -1 - i = \bar{\zeta}_2 \end{aligned}$$

Remarque : la somme et le produit des racines valent $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 0$ et $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 = 4$.

- D'où la **factorisation sur \mathbb{C}** :

$$P = (X - \zeta_1)(X - \zeta_2)(X - \zeta_3)(X - \zeta_4).$$

- Puis la **factorisation sur \mathbb{R}** :

$$P = (X - \zeta_1)(X - \bar{\zeta}_1)(X - \zeta_2)(X - \bar{\zeta}_2) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

Théorème 4.10 (Théorème de Rolle pour les polynômes)

Soit P une fonction polynôme **réelle** admettant au moins **deux racines réelles distinctes** α et β . Alors la fonction polynôme P' admet au moins une **racine réelle** comprise entre α et β .

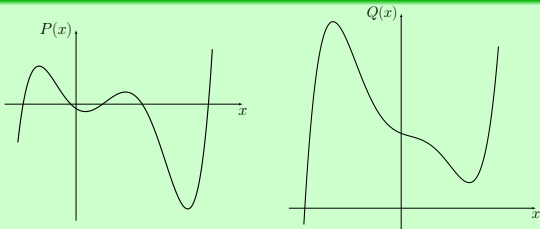
Corollaire 4.11 (Racines des dérivées)

Si P est une fonction polynôme **réelle** de degré n admettant **exactement** n racines **réelles distinctes**, alors la fonction polynôme P' admet **exactement** $(n - 1)$ racines **réelles distinctes** séparant les racines de P .

Plus généralement, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, la fonction polynôme $P^{(k)}$ admet **exactement** $(n - k)$ racines **réelles distinctes** séparant les racines de $P^{(k-1)}$.

Exemple 4.12 (Courbe et degré)

Que peut-on dire du **degré** des polynômes dont les **courbes représentatives** sont tracées ci-contre ?



- 1 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 2 Formule de Taylor pour un polynôme
- 3 Racines multiples et caractérisation
- 4 Factorisation
- 5 Formule de Taylor-Lagrange**
 - Énoncé
 - Conséquences
 - Applications
- 6 Compléments

Théorème 5.1 (Formule de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^n sur un intervalle $[a, b]$ et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

$$= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

On dit qu'on a écrit la **formule de Taylor-Lagrange** pour f sur $[a, b]$ à l'ordre n .

Remarque 5.2

- ① L'hypothèse plus forte (et plus simple) « Soit f une fonction $(n + 1)$ fois dérivable sur l'intervalle **fermé** $[a, b]$ » est suffisante.
- ② Pour $n = 0$, on retrouve le **théorème des accroissements finis**.
- ③ Pour un polynôme P de degré n , on retrouve la formule de Taylor vue pour les polynômes (théorème 2.5). La formule de Taylor est **exacte** à l'ordre n pour tout polynôme P de degré n car le **reste** $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} P^{(n+1)}(c)$ est alors nul.
- ④ Le théorème reste valable si $b < a$, avec $c \in]b, a[$.

Proposition 5.3 (Autre formulation)

- ① Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $t \in]0, 1[$ tel que

$$f(b) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) + \frac{f^{(n+1)}(a+t(b-a))}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

- ② En particulier, si f est de classe C^n et $(n + 1)$ fois dérivable entre 0 et x ($x \in \mathbb{R}$), alors il existe $t \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) + \frac{f^{(n+1)}(tx)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Proposition 5.4 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$. Si $|f^{(n+1)}|$ admet un majorant $M > 0$ sur $]a, b[$, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple 5.5 (Sur l'exponentielle...)

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{\max(x,0)} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En particulier pour $x = 1$ et $n = 7$, partant de $e \leq 3$, on a $\frac{e}{8!} \leq \frac{3}{8!} \leq 10^{-4}$ et alors

$\sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!} = \frac{685}{252}$ est une approximation de e à 10^{-4} près. On trouve ainsi $e \approx 2,7182\dots$

$$\bullet \text{ On a } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \text{ et alors } e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ où l'on a noté } \sum_{k=0}^{+\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n.$$

$$\bullet \text{ De manière similaire, } \forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ et } \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

• Formellement, en remplaçant x par ix , on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

et l'on retrouve la définition de l'exponentielle complexe : $e^{ix} = \cos x + i \sin x \dots$

Exemple 5.6 (Position relative courbe/tangente)

Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un intervalle I , $x_0 \in I$, $M_0(x_0, f(x_0))$. Sa courbe représentative C_f admet en M_0 une tangente \mathcal{T} d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

- ① Si f est **deux fois dérivable** sur I et $f'' \geq 0$ (resp. ≤ 0) sur I , alors f est **convexe** (resp. **concave**) sur I .

La formule de Taylor-Lagrange donne

$$\forall x \in I, \exists t \in]0, 1[,$$

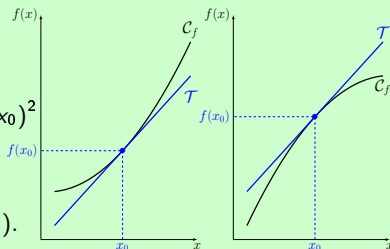
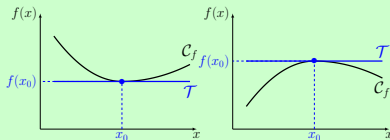
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^2$$

et l'on en déduit

$$\forall x \in I, f(x) \geq (\text{resp. } \leq) f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

En d'autres termes, C_f est **au-dessus** (resp. **au-dessous**) de \mathcal{T} .

En particulier, si $f'(x_0) = 0$ (i.e. x_0 est un **point critique** de f), alors f admet un **minimum** (resp. **maximum**) **global** en x_0 .

Cas $f'' \geq 0$ Cas $f'' \leq 0$ 

Exemple 5.6 (Position relative courbe/tangente)

Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un intervalle I , $x_0 \in I$, $M_0(x_0, f(x_0))$. Sa courbe représentative C_f admet en M_0 une tangente \mathcal{T} d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

- ② Si f est **trois fois dérivable** sur I , si $f''(x_0) = 0$ et $f''' \geq 0$ (ou ≤ 0) sur I , alors f'' est monotone et change de signe en x_0 .

La formule de Taylor-Lagrange donne

$$\forall x \in I, \exists t \in]0, 1[,$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{6} f'''(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^3$$

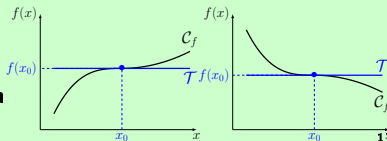
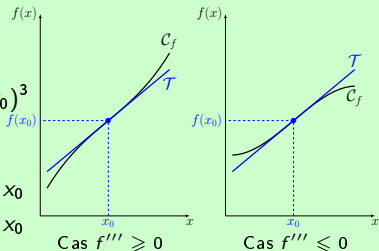
et l'on en déduit, e.g. lorsque $f''' \geq 0$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) \begin{cases} \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \text{si } x \leq x_0 \\ \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

Dans ce cas, la courbe C_f traverse sa tangente \mathcal{T} .

La fonction f **change de concavité** en x_0 et la courbe C_f admet en M_0 un **point d'inflexion**.

En particulier, si $f'(x_0) = 0$ (i.e. x_0 est un **point critique** de f), dans ce cas f n'admet ni **minimum** ni **maximum** en x_0 .



- 1 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 2 Formule de Taylor pour un polynôme
- 3 Racines multiples et caractérisation
- 4 Factorisation
- 5 Formule de Taylor-Lagrange
- 6 Compléments
 - Interpolation de Lagrange

Exemple 6.1 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

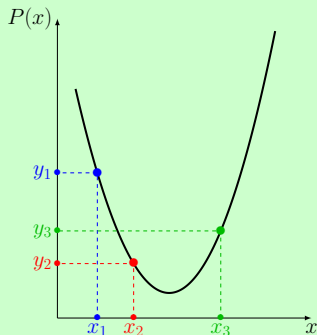
$$L_1 = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3 = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Remarquons que L_1, L_2, L_3 sont de degré 2 et vérifient $L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = L_1(x_3) = 0,$
 $L_2(x_2) = 1, L_2(x_1) = L_2(x_3) = 0$ et $L_3(x_3) = 1, L_3(x_1) = L_3(x_2) = 0$.

Posons alors $P = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$. On constate aisément que P vérifie les conditions requises : $\deg(P) \leq 2$ et $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Remarque : en fait, P est le **seul** polynôme vérifiant ces conditions. En effet, s'il existait un autre tel polynôme Q , le polynôme $Q - P$ serait de degré ≤ 2 et admettrait x_1, x_2, x_3 comme racines, ce qui entraîne nécessairement $Q - P = 0$, soit $Q = P$.

Interprétation géométrique : par 3 points distincts non alignés, il passe une unique parabole d'axe vertical. On dit que l'on a « interpolé » les trois points par une parabole.



Exemple 6.1 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Généralisation : étant donnés n réels **distincts** x_1, \dots, x_n et n réels y_1, \dots, y_n , on peut construire selon le même procédé un polynôme P tel que $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Application : interpolation d'une fonction

Déterminons la fonction polynôme de degré ≤ 4 qui interpole la fonction sinus aux points

$$x_1 = -\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{\pi}{2}, x_5 = \pi.$$

Les polynômes de Lagrange élémentaires associés à ces points s'écrivent

$$L_1 = \frac{2}{3\pi^4} (X + \frac{\pi}{2})X(X - \frac{\pi}{2})(X - \pi)$$

$$L_2 = -\frac{8}{3\pi^4} (X + \pi)X(X - \frac{\pi}{2})(X - \pi)$$

$$L_3 = \frac{4}{\pi^4} (X + \pi)(X + \frac{\pi}{2})(X - \frac{\pi}{2})(X - \pi)$$

$$L_4 = -\frac{8}{3\pi^4} (X + \pi)(X + \frac{\pi}{2})X(X - \pi)$$

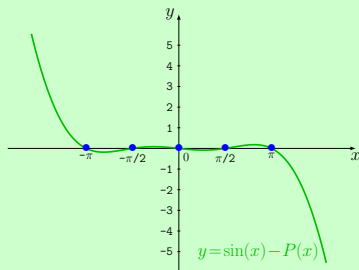
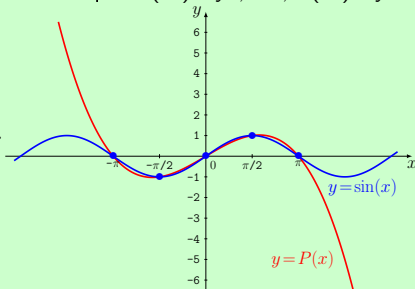
$$L_5 = \frac{2}{3\pi^4} (X + \pi)(X + \frac{\pi}{2})X(X - \frac{\pi}{2})$$

et le **polynôme d'interpolation** s'obtient selon

$$P = \sum_{k=1}^5 f(x_k)L_k$$

soit

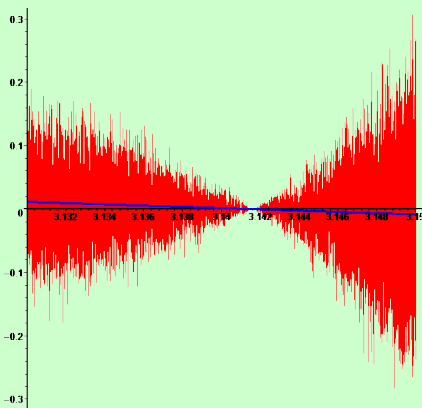
$$P = -\frac{8}{3\pi^3}X^3 + \frac{8}{3\pi}X.$$



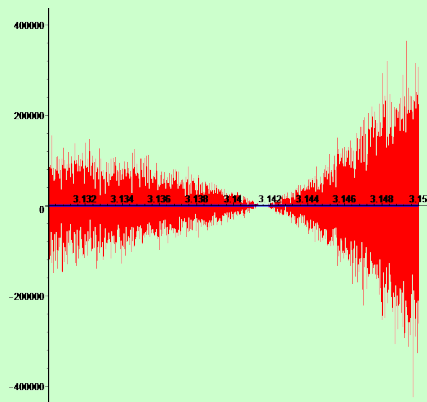
Exemple 6.1 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Remarque : l'interpolation ne fournit pas nécessairement une bonne approximation globale...

Exemple : pour la fonction sinus avec des points équirépartis sur $[-\pi, \pi]$, il y a un « effet de bord » (**phénomène de Runge**)...



$n = 60$ points



$n = 80$ points

Au voisinage de π

INSA INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Sinus et produit eulérien

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_sinus_eulerien.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf)

Notions à retenir

- Division euclidienne
- Racines (multiplicité, caractérisation, factorisation sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R})
- Formule de Taylor-Lagrange (énoncé et applications)
 - ★ Cas des polynômes
 - ★ Inégalité de Taylor-Lagrange et calcul numérique
 - ★ Détermination de la position courbe/tangente
 - ★ Étude de la convexité, détermination de points d'inflexion