INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Comparaison locale de fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

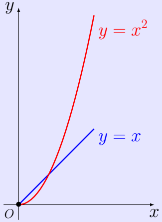
Sommaire

Sommaire

Problématique

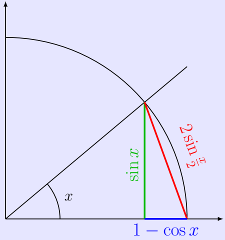
Comparaison d'**« ordre de grandeur »** de deux fonctions au voisinage d'un point.

1. ***Exemple 1 :*** comparaison des fonctions **identité** et **carré**



- x^2 est **« beaucoup plus grand »** que x lorsque x est **« grand » ;**
- x^2 est **« beaucoup plus petit »** que x lorsque x est **« petit ».**

2. ***Exemple 2 :*** comparaison des fonctions **cosinus** et **sinus**



Dans le triangle ci-contre, lorsque l'angle x est **« petit » :**

- les trois côtés sont **« petits »,**
- le côté vertical ($\sin x$) et l'hypothénuse ($2\sin\frac{x}{2}$) sont du **« même ordre de grandeur »,**
- alors que le côté horizontal ($1-\cos x$) est **« beaucoup plus petit ».**

Outil de comparaison

Un outil mathématique pour comparer les **« ordres de grandeur »** de deux fonctions f et g au voisinage d'un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est la limite du rapport de f par g.

Trois cas de figure se présentent :

1. soit la limite de $\dfrac{f}{g}$ en x_0 est **finie non nulle,** c'est donc un réel **non nul** ℓ.
   Dans ce cas, la limite de $\dfrac{f}{\ell g}$ en x_0 vaut 1 ;
2. soit la limite de $\dfrac{f}{g}$ en x_0 est **infinie** ou **nulle.**
   Lorsqu'elle est **infinie,** la limite de $\dfrac{g}{f}$ en x_0 est alors **nulle ;**
3. soit la limite de $\dfrac{f}{g}$ en x_0 **n'existe pas.** (Cette situation ne sera pas considérée ici.)

Les deux premiers cas conduisent à deux situations génériques : on va développer deux notions de comparaisons associées aux cas où la limite de $\dfrac{f}{g}$ en x_0 vaut **0 ou 1.**

Formellement :

- lorsque $\displaystyle\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0$, on introduira la notion de **«négligeabilité locale (ou asymptotique)»;**
- lorsque $\displaystyle\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 1$, on introduira la notion d'**«équivalence locale (ou asymptotique)».**

Sommaire

Définition 2.1 (Négligeabilité)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
*On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 telle que*

$$\forall x \in \mathcal{V}\backslash\{x_0\}, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

*On note alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$ (notation de **Landau**).*
***Remarque :** il s'agit d'une notation abusive, on devrait noter $f \in o_{x_0}(g)$.*

Proposition 2.2 (Formulation simple)

*Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, g **ne s'annulant pas** au voisinage de x_0. Alors* $f \underset{x_0}{=} o(g) \iff \lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g} = 0.$

En particulier : $f \underset{x_0}{=} o(1) \iff \lim\limits_{x_0} f = 0.$

Exemple 2.3 (Croissances comparées)

1. Si $\alpha > \beta$, alors $x^\alpha \underset{x \to 0^+}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha)$.
2. Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:
   - $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\beta x})$
   - $e^{\beta x} \underset{x \to -\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$
   - $(\ln x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$
   - $|\ln x|^\alpha \underset{x \to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$

Proposition 2.4 (Opérations)

Soit f, g, h et k quatre fonctions définies au voisinage de x_0.

1. ***Transitivité :*** $$\left.\begin{array}{l} f \underset{x_0}{=} o(g) \\ g \underset{x_0}{=} o(h) \end{array}\right\} \implies f \underset{x_0}{=} o(h).$$

2. ***Opérations :***
   - ***Multiplication par un réel :*** $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f \underset{x_0}{=} o(g) \implies \alpha f \underset{x_0}{=} o(g).$
   - ***Addition :*** $$\left.\begin{array}{l} f \underset{x_0}{=} o(h) \\ g \underset{x_0}{=} o(h) \end{array}\right\} \implies f + g \underset{x_0}{=} o(h).$$
   - ***Multiplication :*** $$\left.\begin{array}{l} f \underset{x_0}{=} o(h) \\ g \underset{x_0}{=} o(k) \end{array}\right\} \implies f \times g \underset{x_0}{=} o(hk).$$
   - ***Puissances :*** $$f \underset{x_0}{=} o(h) \implies \begin{cases} \forall \alpha > 0, \quad |f|^\alpha \underset{x_0}{=} o(|h|^\alpha) \\ \forall \alpha < 0, \quad |h|^\alpha \underset{x_0}{=} o(|f|^\alpha) \end{cases}.$$

Sommaire

Définition 3.1 (Équivalence)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
*On dit que f est **équivalente à g au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe une fonction φ définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 telle que*

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) = \varphi(x) g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1.$$

*On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ (notation de **Landau**).*

Proposition 3.2 (Formulation simple)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.

1. *Si g **ne s'annule pas** au voisinage de x_0, alors*

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

2. *On a $f \underset{x_0}{\sim} 0 \iff f$ est **nulle** au voisinage de x_0.*

Remarque 3.3

$f \underset{x_0}{\sim} g$ n'implique pas nécessairement l'existence d'une limite en x_0 pour f et g.
Mais si ces limites **existent,** alors elles sont **égales.**

Proposition 3.4 (Relation d'équivalence)

Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0.

1. ***Réflexivité :*** $f \underset{x_0}{\sim} f$.
2. ***Symétrie :*** $f \underset{x_0}{\sim} g \iff g \underset{x_0}{\sim} f$.
3. ***Transitivité :*** $\left[f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{et} \quad g \underset{x_0}{\sim} h\right] \Longrightarrow f \underset{x_0}{\sim} h$.

Proposition 3.5 (Limites et équivalence)

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.

1. $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff f \underset{x_0}{\sim} \ell$.
2. $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell\right] \Longrightarrow f \underset{x_0}{\sim} g$.
3. $\forall \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \left[f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell\right] \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarque 3.6

Lorsque f admet une limite **nulle** ou **infinie** en x_0, la notion d'équivalence est non-triviale... Dans ce cas, un problème intéressant est de rechercher une fonction simple g tel que $f \underset{x_0}{\sim} g$.

Proposition 3.7 (Équivalence et négligeabilité)

1. *$f \underset{x_0}{\sim} g \iff (f-g) \underset{x_0}{=} o(g)$ (et aussi $o(f)$). On écrit alors $g \underset{x_0}{=} f + o(f)$.*
2. *Si $\left[f \underset{x_0}{\sim} g \text{ et } g \underset{x_0}{=} o(h)\right]$ ou si $[f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ et } g \underset{x_0}{\sim} h]$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.*
3. *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si g est non nulle au voisinage de x_0, alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0.*

Remarque 3.8 (Notion relative/absolue)

On fera attention de ne pas confondre $f \underset{x_0}{\sim} g$ avec $\lim\limits_{x_0}(f-g) = 0$. En effet :

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff f \underset{x_0}{=} g + o(g) \quad \text{alors que} \quad \lim_{x_0}(f-g) = 0 \iff f \underset{x_0}{=} g + o(1).$$

Contre-exemple : • $x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$ alors que $(x^2+x) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

• $(x^2 - x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ alors que $x^2 \underset{x \to 0}{\not\sim} x$.

Proposition 3.9 (Multiplication/division/puissances)

Soit f, g, h, k des fonctions définies au voisinage de x_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si $f \underset{x_0}{\sim} h$ et $g \underset{x_0}{\sim} k$, alors :

• $f \times g \underset{x_0}{\sim} h \times k$ • $\dfrac{f}{g} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{h}{k}$ • $|f|^\alpha \underset{x_0}{\sim} |h|^\alpha$

Proposition 3.10 (Dérivabilité et comparaison)

*Supposons la fonction f **dérivable** en x_0.*

1. *Si $f'(x_0) \neq \mathbf{0}$ alors :* $\quad f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0).$
2. *Si $f'(x_0) = \mathbf{0}$ alors :* $\quad f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{=} o(x - x_0).$

Ce résultat permet d'établir la plupart des équivalents usuels **à connaître :**

Exemple 3.11 (Équivalents usuels)

1. Fonctions **exponentielle/logarithme/puissance :**

   • $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ • $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ • $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$

2. Fonctions **trigonométriques :**

   • $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ • $\tan x \underset{x \to 0}{\sim} x$ • $\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

   • $\arcsin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ • $\arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x$

3. Fonctions **hyperboliques :**

   • $\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x$ • $\operatorname{th} x \underset{x \to 0}{\sim} x$ • $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

   • $\operatorname{ch} x \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ • $\operatorname{sh} x \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$

En règle générale, **on n'ajoute pas d'équivalents**, c'est-à-dire :

$$\left(f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2\right) \textbf{ n'implique pas } f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2.$$

On a toutefois les résultats suivants :

Proposition 3.12 (Somme et équivalence)

1. *Si* $f \underset{x_0}{\sim} g$ *et* $h \underset{x_0}{=} o(g)$ *alors* $f + h \underset{x_0}{\sim} g$.
2. *Si* $f \underset{x_0}{=} o(g)$ *alors* $f + g \underset{x_0}{\sim} g$.
3. *Soit* f_1, f_2 *et* g *trois fonctions définies au voisinage de* x_0 *et* α_1, α_2 *deux réels tels que*

$$f_1 \underset{x_0}{\sim} \alpha_1 g \quad \text{et} \quad f_2 \underset{x_0}{\sim} \alpha_2 g.$$

Il y a alors deux cas à distinguer pour la somme $f_1 + f_2$ *:*

- *Si* $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ *alors* $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} (\alpha_1 + \alpha_2)g$.
- *Si* $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ *alors* $f_1 + f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$.

Exemple 3.13 (Fonctions polynômes/fractions rationnelles)

1. Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$, $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ des réels tels que $a_m \neq 0$ et $a_n \neq 0$, et P la fonction polynôme définie pour tout réel x par $P(x) = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k x^k$. Alors :

$$P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_m x^m \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Exemple : pour $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$, on a $P(x) \underset{x \to 0}{\sim} -x$ et $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} 3x^4$.

2. Soit P une fonction polynôme non nulle et α une racine de P d'ordre de multiplicité μ. Alors :

$$P(x) \underset{x \to \alpha}{\sim} \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!}(x - \alpha)^{\mu}.$$

Exemple : pour $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$, on a $P(x) \underset{x \to 1}{\sim} 2(x-1)^2$.

3. Soit p et q deux entiers naturels, $a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots, a_0$ et $b_q, b_{q-1}, b_{q-2}, \ldots, b_0$ des réels tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, et P et Q les fonctions polynômes définies pour tout réel x par $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k x^k$. Alors :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}.$$

Exemple 3.14 (Une fonction hyperbolique)

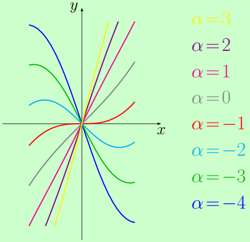
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \operatorname{sh} x + \alpha \operatorname{th} x$.

1. *Analyse en 0 :* on a $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
   - Si $\alpha \neq -1$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} (\alpha+1)x$.
   - Si $\alpha = -1$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

     Dans ce cas :
     $f(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{th} x = \operatorname{th} x\big(\operatorname{ch} x - 1\big)$.

     Or $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

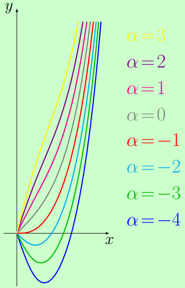
     On obtient alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{2}$.



2. *Analyse en $+\infty$:* on a $\operatorname{sh} x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ et $\operatorname{th} x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.

   Or $1 \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^x}{2}\right)$.

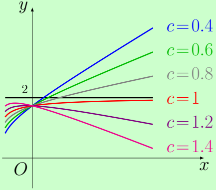
   On en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.



Exemple 3.15 (Un calcul de limite/asymptote)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Analyse en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - cx$.

1. On a $x^2 + ax + b \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ puis $\sqrt{x^2+ax+b} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.



$a = 4$ et $b = 3$

- Si $c \neq 1$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (1-c)x$,

  d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

- Si $c = 1$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

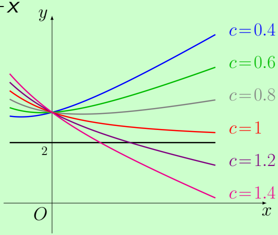
  Dans ce cas, $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - x = \dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+ax+b}+x}$.

  Or $\sqrt{x^2+ax+b} + x \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.

  On obtient alors $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{a}{2} & \text{si } a \neq 0 \\ \dfrac{b}{2x} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$

  (on a $f(x) = 0$ lorsque $a = b = 0$ et $c = 1$)

  d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{2}$.



$a = 4$ et $b = 9$

Exemple 3.15 (Un calcul de limite/asymptote)

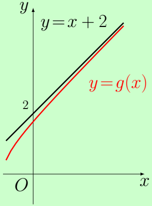
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Analyse en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - cx$.

---

❷ ***Application :*** considérons la fonction g définie par

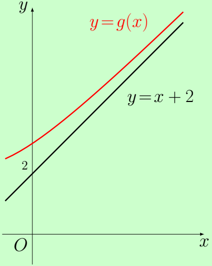
$$g(x) = \sqrt{x^2+ax+b}.$$

- En choisissant $c = 1$ dans f,
  on voit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{a}{2}\right)\right] = 0$
  donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ en $+\infty$
  d'équation $y = x + \dfrac{a}{2}$.



$a = 4$ et $b = 3$

- Puis $$g(x)-\left(x+\frac{a}{2}\right) = \frac{b-\frac{a^2}{4}}{\sqrt{x^2+ax+b}+(x+\frac{a}{2})} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{b-\frac{a^2}{4}}{2x} \text{ si } b \neq \frac{a^2}{4}$$
  (on a $g(x) = x + \dfrac{a}{2}$ lorsque $b = \dfrac{a^2}{4}$).
  On en déduit que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus (resp. au-dessous) de $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $b > \dfrac{a^2}{4}$ (resp. $b < \dfrac{a^2}{4}$).



$a = 4$ et $b = 9$

Proposition 3.16 (Composition « à droite »)

Soit x_0 et t_0 dans $\overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et φ une fonction telle que $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ existent au voisinage de t_0.

$$\text{Si} \quad f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{et} \quad \lim_{t_0} \varphi = x_0, \quad \text{alors} \quad f \circ \varphi \underset{t_0}{\sim} g \circ \varphi.$$

Remarque 3.17 (Composition « à gauche »)

Il n'y a pas de règle générale pour la composition « à gauche » :
En général, si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 et ψ une fonction telle que $\psi \circ f$ et $\psi \circ g$ existent au voisinage de x_0,

$$f \underset{x_0}{\sim} g \;\not\Longrightarrow\; \psi \circ f \underset{x_0}{\sim} \psi \circ g.$$

Contre-exemple :

- On a $x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$ mais $e^{x^2+x} \underset{x \to +\infty}{\not\sim} e^{x^2}$.
- On a $1 + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x$ mais $\ln(1+x^2) \underset{x \to 0}{\not\sim} \ln(1+x)$.

Proposition 3.18 (Cas de l'exponentielle et du logarithme (facultatif))

1. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.*

$$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g \iff \lim_{x_0} (f - g) = 0.$$

2. *Soit f et g sont définies et strictement positives au voisinage de x_0.*
Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in [0, +\infty] \setminus \{1\}$, alors : $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$.

Notions à retenir

- Notions de négligeabilité et d'équivalence asymptotiques
  - ⋆ Comparaison locale de fonctions, ordre de grandeur local
  - ⋆ Exemples usuels à connaître
  - ⋆ Détermination d'équivalents par opérations diverses
  - ⋆ Utilisation pour les calculs de limites
  - ⋆ Étude de l'allure locale d'une courbe
  - ⋆ Détermination de branches infinies, d'asymptotes