INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Intégrale de Riemann

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

Sommaire

Définition 1.1 (Subdivision)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

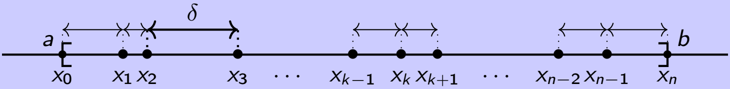
- *Une **subdivision** de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est une famille **finie** de réels $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.*
  Il s'agit donc d'un « découpage » de l'intervalle $[a, b]$.

Définition 1.1 (Subdivision)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- *Une **subdivision** de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est une famille **finie** de réels $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.*
  Il s'agit donc d'un « découpage » de l'intervalle $[a, b]$.
- *Le **pas** d'une telle subdivision est le nombre $\delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x_k - x_{k-1}\}$.*

  *C'est la longueur du **plus grand** intervalle dans le découpage de $[a, b]$.*

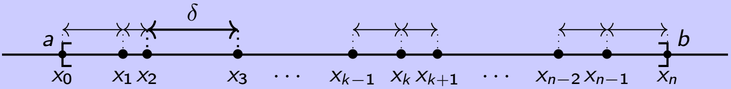


Définition 1.1 (Subdivision)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- *Une **subdivision** de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est une famille **finie** de réels $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.*
  Il s'agit donc d'un « découpage » de l'intervalle $[a, b]$.
- *Le **pas** d'une telle subdivision est le nombre $\delta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x_k - x_{k-1}\}$.*

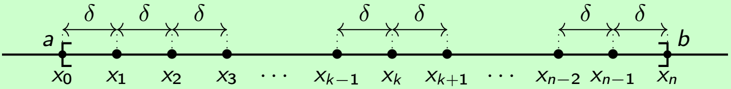
  *C'est la longueur du **plus grand** intervalle dans le découpage de $[a, b]$.*



Exemple 1.2 (Subdivision « équirépartie »)

La subdivision **équirépartie** est issue d'un découpage **équidistant** de $[a, b]$ en n intervalles de longueur identique $\delta = \frac{b-a}{n}$.
Les points de subdivision sont donnés par $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$ (ils sont répartis selon une progression arithmétique de raison δ) :

$$\sigma = \left(a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n}, \dots, b\right).$$



Définition 1.3 (Somme de Riemann)

*Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$, et $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de réels tels que : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (on dit alors que la famille Λ est **adaptée** à la subdivision σ).*

*On appelle **somme de Riemann** de la fonction f associée à σ et à Λ le nombre*

$$S(f, \sigma, \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\lambda_k).$$

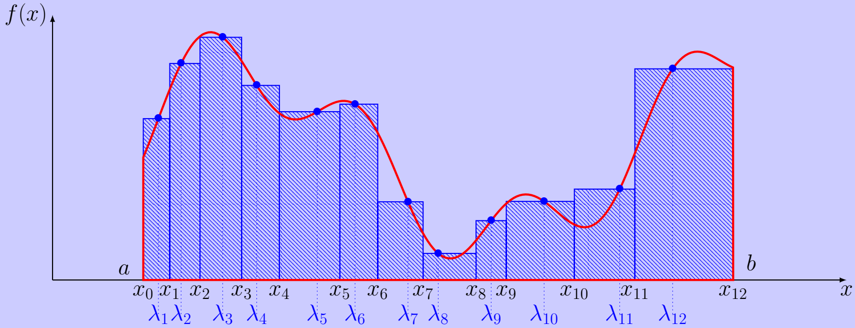
Définition 1.3 (Somme de Riemann)

*Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$, et $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de réels tels que : $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (on dit alors que la famille Λ est **adaptée** à la subdivision σ).*

*On appelle **somme de Riemann** de la fonction f associée à σ et à Λ le nombre*

$$S(f, \sigma, \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\lambda_k).$$

Ce nombre représente l'aire de la réunion des rectangles de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur $f(\lambda_k)$.

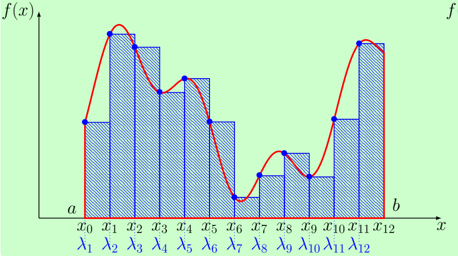


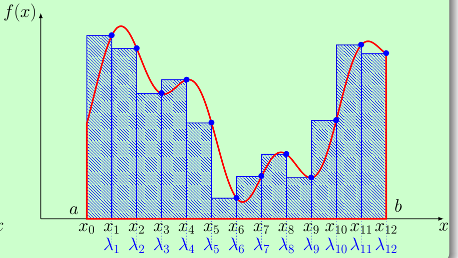
Exemple 1.4 (Subdivision équirépartie)

Considérons une subdivision « équirépartie » avec comme choix des λ_k une des bornes de chaque sous-intervalle : $\begin{cases} x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}, & 0 \leqslant k \leqslant n \\ \lambda_k = x_{k-1} \text{ ou } x_k, & 1 \leqslant k \leqslant n \end{cases}$

Les sommes de Riemann correspondantes s'écrivent :

$$S(f,\sigma,\Lambda) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$





Exemple 1.5 (Sommes de Darboux (facultatif))

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$.
Introduisons les valeurs « extrémales » relatives à chacun des sous-intervalles de σ :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{et} \quad M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Par continuité, f **atteint** ses bornes : il existe donc des λ_k^1, λ_k^2 dans $[x_{k-1}, x_k]$ tels que $f(\lambda_k^1) = m_k$ et $f(\lambda_k^2) = M_k$.

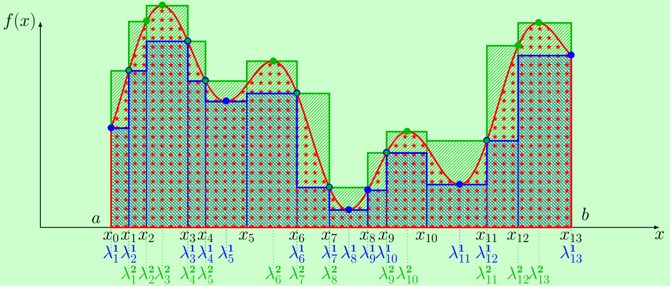
Exemple 1.5 (Sommes de Darboux (facultatif))

Soit f une fonction **continue** sur $[a,b]$, $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$.
Introduisons les valeurs « extrémales » relatives à chacun des sous-intervalles de σ :

$$\forall k \in \{1,2,\dots,n\}, \quad m_k = \min_{[x_{k-1},x_k]} f \quad \text{et} \quad M_k = \max_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

Par continuité, f **atteint** ses bornes : il existe donc des λ_k^1, λ_k^2 dans $[x_{k-1},x_k]$ tels que $f(\lambda_k^1) = m_k$ et $f(\lambda_k^2) = M_k$.
Les sommes de Riemann correspondant aux familles adaptées $\Lambda_1 = (\lambda_1^1,\dots,\lambda_n^1)$ et $\Lambda_2 = (\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)$ sont appelées **sommes de Darboux** :

$$S_1 = S(f,\sigma,\Lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{et} \quad S_2 = S(f,\sigma,\Lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$



Remarque : toutes les sommes de Riemann sont comprises entre S_1 et S_2.

Sommaire

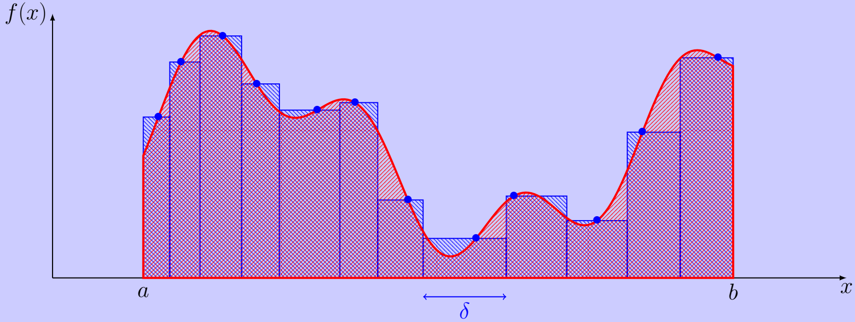
Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction ***bornée****. S'il existe un nombre réel I tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, \sigma \text{ subdivision de pas } < \delta,\ \forall\, \Lambda \text{ adaptée à } \sigma,\ |S(f,\sigma,\Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction f est ***intégrable (au sens de Riemann)*** *sur $[a,b]$ et le nombre I est l'****intégrale de f sur $[a,b]$****. Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f$.*

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi ***toutes*** *ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont* ***convergentes de même limite finie.***



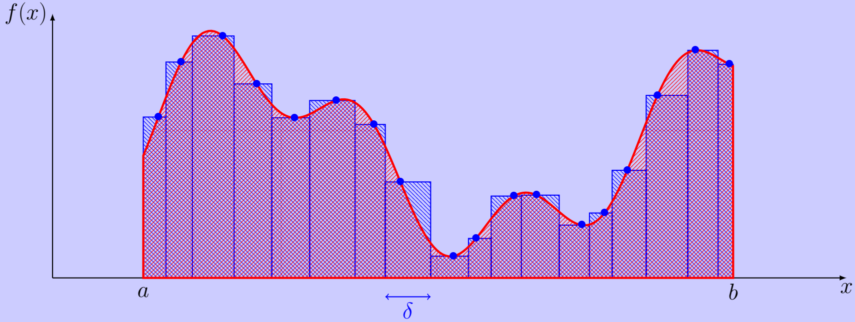
Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction ***bornée****. S'il existe un nombre réel I tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \sigma \text{ subdivision de pas} < \delta,\ \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma,\ |S(f,\sigma,\Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction f est ***intégrable (au sens de Riemann)*** *sur $[a,b]$ et le nombre I est l'****intégrale de f sur $[a,b]$****. Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f$.*

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi ***toutes*** *ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont* ***convergentes de même limite finie.***



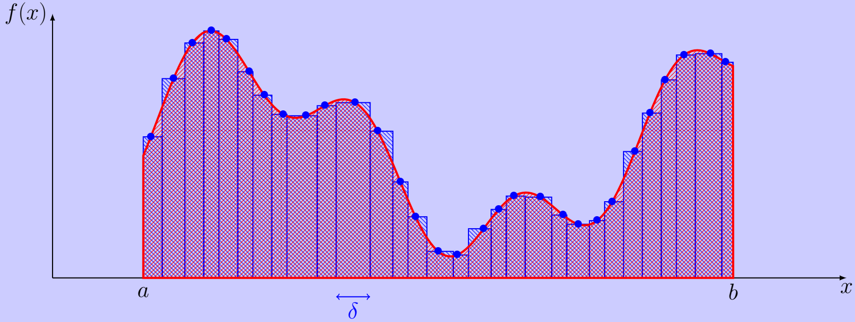
Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction ***bornée****. S'il existe un nombre réel I tel que*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \forall\,\sigma \text{ subdivision de pas} < \delta,\ \forall\,\Lambda \text{ adaptée à } \sigma,\ |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction f est ***intégrable (au sens de Riemann)*** *sur $[a, b]$ et le nombre I est l'****intégrale de f sur $[a, b]$****. Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f$.*

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi ***toutes*** *ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont* ***convergentes de même limite finie.***



Remarque 2.2 (Notations/conventions)

- La variable utilisée dans la notation de l'intégrale est dite **muette** :

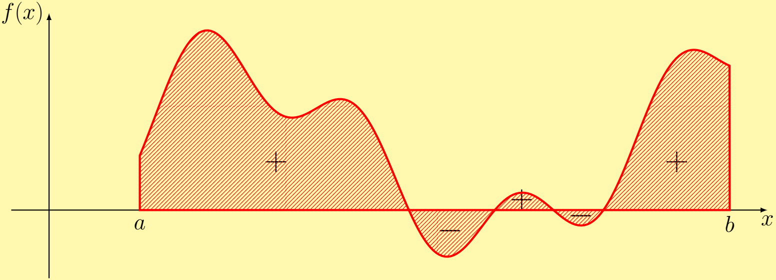
$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(☺)\mathrm{d}☺ = \cdots$$

Remarque 2.2 (Notations/conventions)

- La variable utilisée dans la notation de l'intégrale est dite **muette** :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(☺)\mathrm{d}☺ = \cdots$$

- Le nombre $\int_a^b f$ représente l'« **aire algébrique** » entre la courbe de f dans un repère orthonormal et l'axe des abscisses, en comptant **négativement** les parties **au-dessous** de l'axe et **positivement** les parties **au-dessus.**

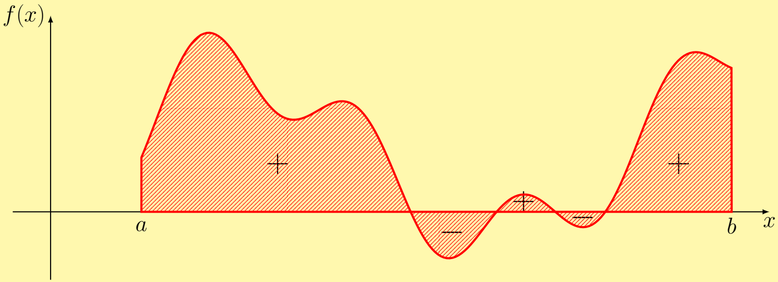


Remarque 2.2 (Notations/conventions)

- La variable utilisée dans la notation de l'intégrale est dite **muette** :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(☺)\mathrm{d}☺ = \cdots$$

- Le nombre $\int_a^b f$ représente l'« **aire algébrique** » entre la courbe de f dans un repère orthonormal et l'axe des abscisses, en comptant **négativement** les parties **au-dessous** de l'axe et **positivement** les parties **au-dessus.**



- Conventions : on convient que $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Théorème 2.3 (Exemples de fonction intégrable (admis))

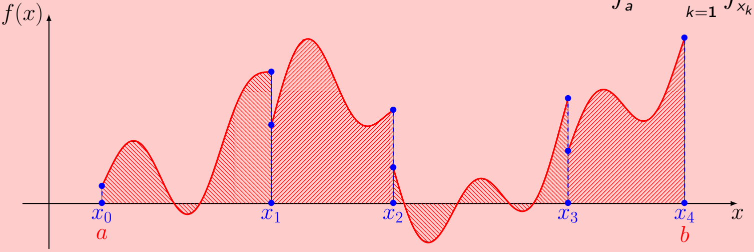
- *Toute fonction* ***continue*** *sur* $[a, b]$ *est* ***intégrable*** *sur* $[a, b]$.

Théorème 2.3 (Exemples de fonction intégrable (admis))

- *Toute fonction **continue** sur* $[a, b]$ *est **intégrable** sur* $[a, b]$.
- *Plus généralement, toute fonction **continue par morceaux** sur* $[a, b]$ *(i.e. admettant un nombre **fini** de discontinuités, celles-ci étant de 1re espèce) est **intégrable** sur* $[a, b]$.

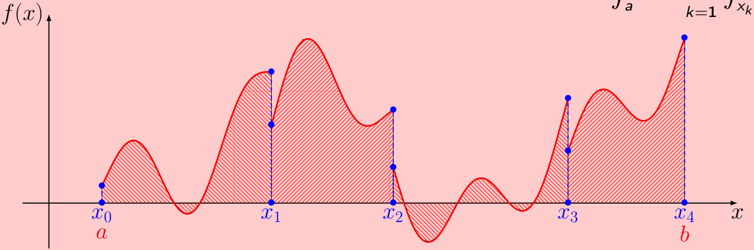
Théorème 2.3 (Exemples de fonction intégrable (admis))

- *Toute fonction* ***continue*** *sur* $[a,b]$ *est* ***intégrable*** *sur* $[a,b]$.
- *Plus généralement, toute fonction* ***continue par morceaux*** *sur* $[a,b]$ *(i.e. admettant un nombre* ***fini*** *de discontinuités, celles-ci étant de 1re espèce) est* ***intégrable*** *sur* $[a,b]$.
  Plus précisément, en notant $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ *ses discontinuités et en posant* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$*, on peut prolonger* f *par continuité sur chaque intervalle* $[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, \dots, n\}$*. Notons* $\tilde{f}_k$ *ce prolongement. Alors* $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{f}_k$.



Théorème 2.3 (Exemples de fonction intégrable (admis))

- *Toute fonction* ***continue*** *sur* $[a,b]$ *est* ***intégrable*** *sur* $[a,b]$.
- *Plus généralement, toute fonction* ***continue par morceaux*** *sur* $[a,b]$ *(i.e. admettant un nombre* ***fini*** *de discontinuités, celles-ci étant de 1re espèce) est* ***intégrable*** *sur* $[a,b]$.
  Plus précisément, en notant $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ *ses discontinuités et en posant* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$, *on peut prolonger* f *par continuité sur chaque intervalle* $[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1,\dots,n\}$. *Notons* $\tilde{f}_k$ *ce prolongement. Alors* $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{f}_k$.

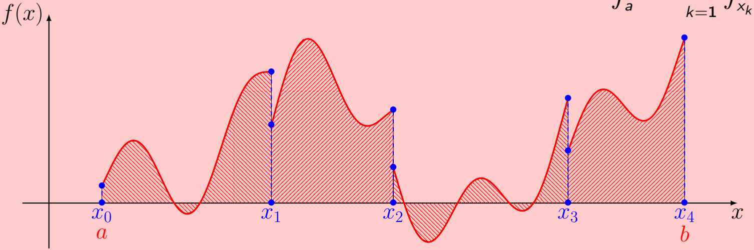


Remarquons que si l'on modifie la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, alors la valeur de son intégrale reste la même.

Théorème 2.3 (Exemples de fonction intégrable (admis))

- *Toute fonction* ***continue*** *sur* $[a, b]$ *est* ***intégrable*** *sur* $[a, b]$.
- *Plus généralement, toute fonction* ***continue par morceaux*** *sur* $[a, b]$ *(i.e. admettant un nombre* ***fini*** *de discontinuités, celles-ci étant de 1re espèce) est* ***intégrable*** *sur* $[a, b]$.

  Plus précisément, en notant $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *ses discontinuités et en posant* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$*, on peut prolonger* f *par continuité sur chaque intervalle* $[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. *Notons* $\tilde{f}_k$ *ce prolongement. Alors* $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{f}_k$.



  Remarquons que si l'on modifie la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, alors la valeur de son intégrale reste la même.
- *Toute fonction* ***monotone*** *sur* $[a, b]$ *est* ***intégrable*** *sur* $[a, b]$.

Exemple 2.4 (Fonctions constante, identité, exponentielle...)

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision **équirépartie,** on trouve pour une fonction intégrable

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 2.4 (Fonctions constante, identité, exponentielle...)

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision **équirépartie,** on trouve pour une fonction intégrable

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Dans le cas d'une fonction **constante,** cela donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \lambda\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda = \lambda(b-a) \quad \textbf{(aire d'un rectangle !)}$$

Exemple 2.4 (Fonctions constante, identité, exponentielle...)

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision **équirépartie,** on trouve pour une fonction intégrable

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Dans le cas d'une fonction **constante,** cela donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \lambda\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda = \lambda(b-a) \quad \textbf{(aire d'un rectangle !)}$$

- Dans le cas de la fonction **exponentielle,** cela donne

$$\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{a+k\frac{b-a}{n}} = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a.$$

Exemple 2.4 (Fonctions constante, identité, exponentielle...)

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision **équirépartie,** on trouve pour une fonction intégrable

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Dans le cas d'une fonction **constante,** cela donne

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \lambda\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda = \lambda(b-a) \quad \textbf{(aire d'un rectangle !)}$$

- Dans le cas de la fonction **exponentielle,** cela donne

$$\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{a+k\frac{b-a}{n}} = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a.$$

- Dans le cas de la fonction **identité,** cela donne

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad \textbf{(aire d'un trapèze !)}$$

Exemple 2.4 (Fonctions constante, identité, exponentielle...)

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision **équirépartie,** on trouve pour une fonction intégrable

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Dans le cas d'une fonction **constante,** cela donne

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \int_a^b \lambda\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda = \lambda(b-a) \quad \textbf{(aire d'un rectangle !)}$$

- Dans le cas de la fonction **exponentielle,** cela donne

$$\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{a+k\frac{b-a}{n}} = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a.$$

- Dans le cas de la fonction **identité,** cela donne

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{2}(b^2-a^2) \quad \textbf{(aire d'un trapèze !)}$$

- Dans le cas de la fonction **carré,** cela donne

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}(b^3-a^3).$$

Exemple 2.5 (Fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$)

Considérons la fonction «indicatrice» (ou «caractéristique») de $\mathbb{Q}$. Il s'agit de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 2.5 (Fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$)

Considérons la fonction «indicatrice» (ou «caractéristique») de $\mathbb{Q}$. Il s'agit de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ d'un intervalle $[a, b]$ de pas arbitrairement petit, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ deux familles adaptées à la subdivision σ telles que

$$\forall\, k \in \{1, \dots, n\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \lambda'_k \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}.$$

Exemple 2.5 (Fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$)

Considérons la fonction «indicatrice» (ou «caractéristique») de $\mathbb{Q}$. Il s'agit de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit une subdivision $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ d'un intervalle $[a,b]$ de pas arbitrairement petit, $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $\Lambda'=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_n)$ deux familles adaptées à la subdivision σ telles que

$$\forall\, k \in \{1,\dots,n\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \lambda'_k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Les sommes de Riemann correspondantes valent

$$S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}},\sigma,\Lambda) = b-a \quad \text{et} \quad S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}},\sigma,\Lambda') = 0.$$

Elles ne peuvent pas tendre vers une limite commune.
Ainsi, la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ **n**'est intégrable sur **aucun** intervalle $[a,b]$.

Exemple 2.5 (Fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$)

Considérons la fonction «indicatrice» (ou «caractéristique») de $\mathbb{Q}$. Il s'agit de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ d'un intervalle $[a, b]$ de pas arbitrairement petit, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ deux familles adaptées à la subdivision σ telles que

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \lambda'_k \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}.$$

Les sommes de Riemann correspondantes valent

$$S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda) = b - a \quad \text{et} \quad S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda') = 0.$$

Elles ne peuvent pas tendre vers une limite commune.
Ainsi, la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ **n**'est intégrable sur **aucun** intervalle $[a, b]$.

Annexe (facultatif)

Entre deux réels distincts quelconques, il existe un rationnel et un irrationnel (en fait une infinité de chaque). On dit que les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.5 (Fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$)

Considérons la fonction «indicatrice» (ou «caractéristique») de $\mathbb{Q}$. Il s'agit de la fonction

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soit une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ d'un intervalle $[a, b]$ de pas arbitrairement petit, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ deux familles adaptées à la subdivision σ telles que

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \lambda'_k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Les sommes de Riemann correspondantes valent

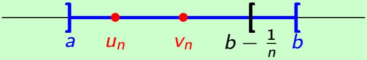
$$S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda) = b - a \quad \text{et} \quad S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda') = 0.$$

Elles ne peuvent pas tendre vers une limite commune.
Ainsi, la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ **n**'est intégrable sur **aucun** intervalle $[a, b]$.

Annexe (facultatif)

Entre deux réels distincts quelconques, il existe un rationnel et un irrationnel (en fait une infinité de chaque). On dit que les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$.

En effet : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Alors il existe un entier n tel que $a < b - \frac{1}{n}$.
Posons $u_n = \frac{\mathrm{E}(na)+1}{n}$ et $v_n = \frac{\mathrm{E}(na\sqrt{2})+1}{n\sqrt{2}}$. Les nombres u_n et v_n sont compris entre a et b, u_n est rationnel et v_n est irrationnel.



Proposition 2.6 (Opérations)

1. ***Linéarité***
   Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   La fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 2.6 (Opérations)

1. ***Linéarité***

   Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$$

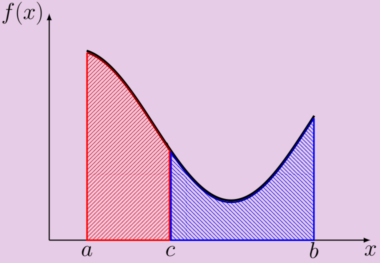
2. ***Relation de Chasles***

   Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$) Pour tout $c \in [a, b]$, f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

ou encore

$$\int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\, \mathrm{d}x$$



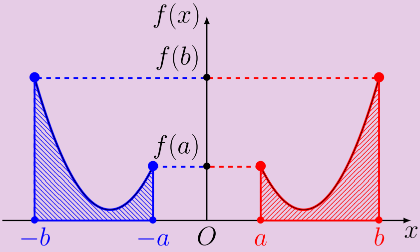
Ces propriétés restent valables lorsque $b < a$.

Proposition 2.7 (Parité)

Soit f une fonction intégrable sur $[-b,-a] \cup [a,b]$ $(0 \leqslant a \leqslant b)$.

- Si f est **paire**, alors

$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

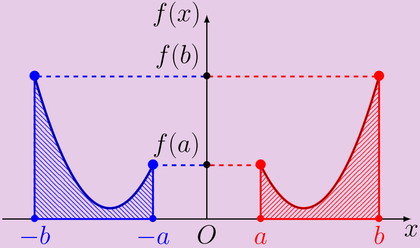


Proposition 2.7 (Parité)

Soit f une fonction intégrable sur $[-b, -a] \cup [a, b]$ $(0 \leqslant a \leqslant b)$.

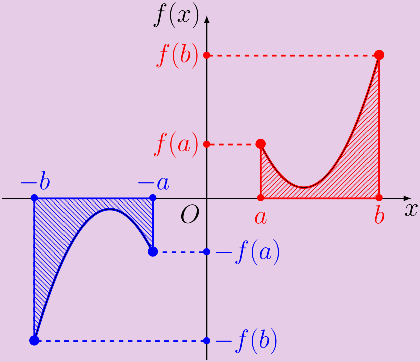
- Si f est **paire**, alors

$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



- Si f est **impaire**, alors

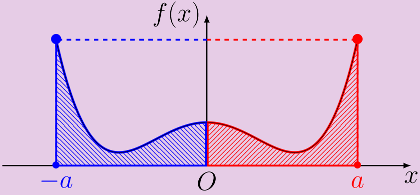
$$\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Proposition 2.7 (Parité)

Cas particulier : soit f une fonction intégrable sur $[-a, a]$ ($a \geqslant 0$).

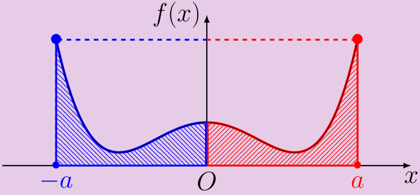
- Si f est **paire**, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Autrement dit, la fonction
$$x \in [-a, a] \longmapsto \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
est **impaire**.



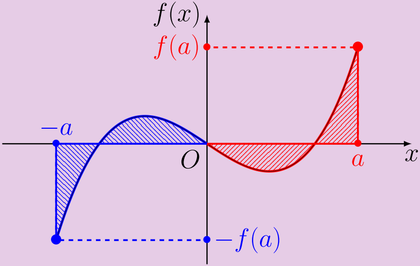
Proposition 2.7 (Parité)

Cas particulier : soit f une fonction intégrable sur $[-a, a]$ ($a \geqslant 0$).

- Si f est **paire**, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Autrement dit, la fonction
$$x \in [-a, a] \longmapsto \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
est **impaire**.



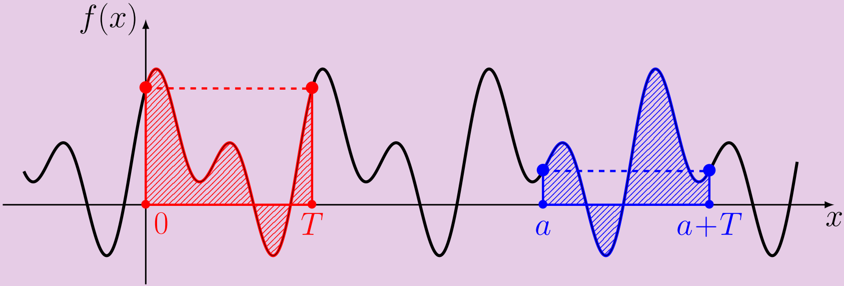
- Si f est **impaire**, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
Autrement dit, la fonction
$$x \in [-a, a] \longmapsto \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
est **paire**.



Proposition 2.8 (Périodicité)

Soit f une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$ intégrable sur $[0, T]$ ($T > 0$). Alors, pour tout réel a, f est intégrable sur $[a, a+T]$ et

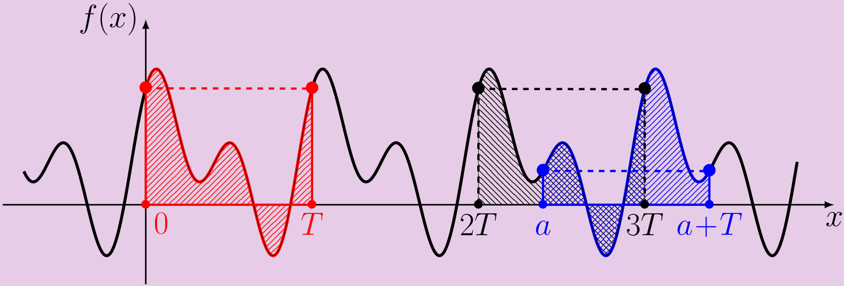
$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Proposition 2.8 (Périodicité)

Soit f une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$ intégrable sur $[0, T]$ ($T > 0$). Alors, pour tout réel a, f est intégrable sur $[a, a+T]$ et

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$



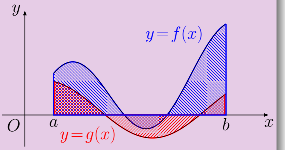
Proposition 2.9 (Ordre)

1. ***Croissance/Positivité***

   Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$).

   Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

   En particulier : si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.



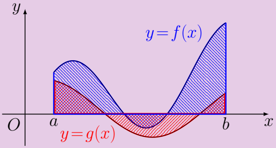
Proposition 2.9 (Ordre)

1. ***Croissance/Positivité***

   Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$).

   Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

   En particulier : si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.



2. ***Inégalité triangulaire***

   Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$).

   On a $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

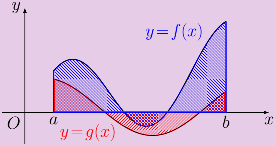
Proposition 2.9 (Ordre)

1. ***Croissance/Positivité***

   Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$).

   Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

   En particulier : si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.



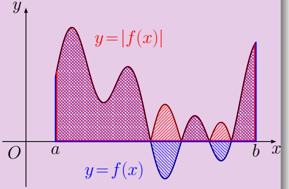
2. ***Inégalité triangulaire***

   Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$).

   On a $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$

   Plus généralement, quel que soit l'ordre de a et b,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right| \leqslant |b-a| \times \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$



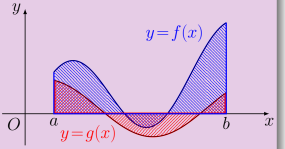
Proposition 2.9 (Ordre)

1. ***Croissance/Positivité***

   Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$).

   Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

   En particulier : si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.



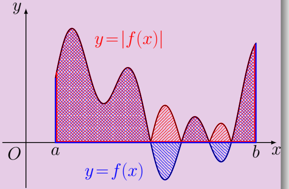
2. ***Inégalité triangulaire***

   Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ ($a \leqslant b$).

   On a $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

   Plus généralement, quel que soit l'ordre de a et b,

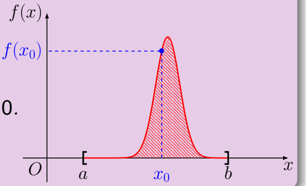
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |b-a| \times \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$



3. ***Stricte positivité***

   *Supposons f **continue** et **positive**.*

   - *S'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.
   - *Si* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *alors, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.*



Définition 2.10 (Valeur moyenne)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

On appelle ***valeur moyenne de f sur [a, b]*** *le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Définition 2.10 (Valeur moyenne)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

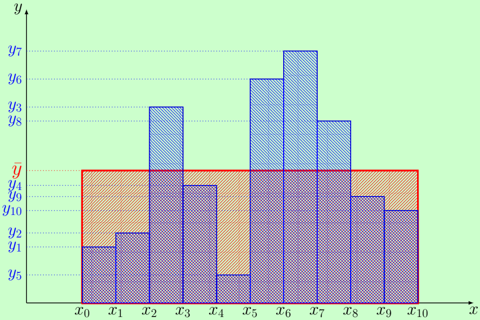
*On appelle **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.*

Exemple 2.11

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des nombres réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction **constante par morceaux** définie par $f(x) = y_k$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$ où l'on a posé $x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$.

Alors la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ coïncide avec la **moyenne arithmétique** des nombres $y_1, \ldots, y_n$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \bar{y}.$$



Théorème 2.12 (Formule de la moyenne)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** *et soit* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ **intégrable de signe constant**.
Alors

$$\exists\, c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 2.12 (Formule de la moyenne)

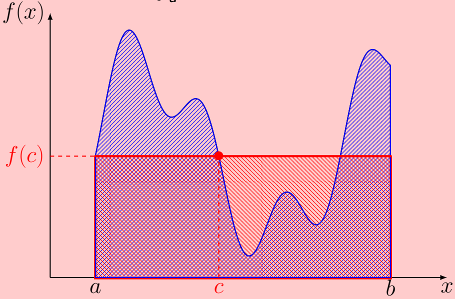
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** *et soit* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ **intégrable de signe constant**.
Alors

$$\exists\, c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour $g = 1$ *:*

$$\exists\, c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b - a).$$

Autrement dit, il existe un $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c)$ *coïncide avec la* ***valeur moyenne*** *de* f *sur* $[a, b]$.



Théorème 2.12 (Formule de la moyenne)

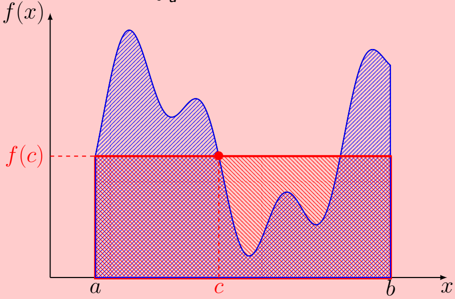
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** *et soit* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ **intégrable de signe constant**.
Alors

$$\exists\, c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour $g = 1$ *:*

$$\exists\, c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Autrement dit, il existe un $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c)$ *coïncide avec la* ***valeur moyenne*** *de* f *sur* $[a, b]$.



Exemple 2.13

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

Théorème 2.12 (Formule de la moyenne)

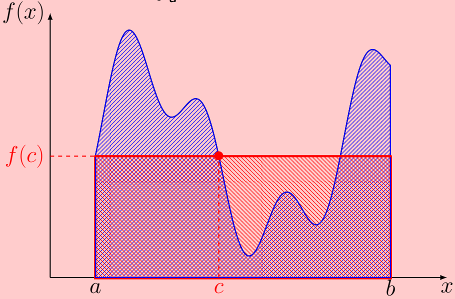
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue** *et soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$* **intégrable de signe constant***.*
Alors

$$\exists\, c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour $g = 1$:

$$\exists\, c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Autrement dit, il existe un $c \in [a,b]$ tel que $f(c)$ coïncide avec la ***valeur moyenne*** *de f sur $[a,b]$.*



Exemple 2.13

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-nx}$ étant intégrable positive sur $[a,b]$,

$$\exists\, c_n \in [a,b], \quad u_n = f(c_n)\int_a^b \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} f(c_n)(\mathrm{e}^{-na} - \mathrm{e}^{-nb}).$$

Théorème 2.12 (Formule de la moyenne)

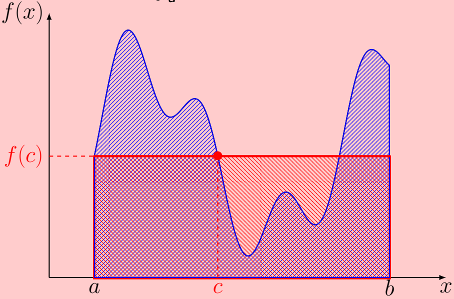
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** *et soit* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ **intégrable de signe constant**.
Alors

$$\exists\, c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour $g = 1$ *:*

$$\exists\, c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Autrement dit, il existe un $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c)$ *coïncide avec la* ***valeur moyenne*** *de* f *sur* $[a, b]$.



Exemple 2.13

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-nx}$ étant intégrable positive sur $[a, b]$,

$$\exists\, c_n \in [a, b], \quad u_n = f(c_n)\int_a^b \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} f(c_n)(\mathrm{e}^{-na} - \mathrm{e}^{-nb}).$$

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, donc bornée, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Sommaire

Le théorème de la moyenne permet d'obtenir une relation de **réciprocité** entre les opérations d'**intégration** et de **dérivation** décrite dans le résultat suivant :

Théorème-définition 3.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et $a \in I$ fixé.*
On définit la fonction suivante F sur I par $\forall\, x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$
*Alors F est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I et $F' = f$.*
*On dit que F est une **primitive** de f sur I.*
*F est en fait l'**unique** primitive de f sur I qui s'annule en a.*

Le théorème de la moyenne permet d'obtenir une relation de **réciprocité** entre les opérations d'**intégration** et de **dérivation** décrite dans le résultat suivant :

Théorème-définition 3.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et $a \in I$ fixé.*
On définit la fonction suivante F sur I par $\forall\, x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

*Alors F est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I et $F' = f$.*

*On dit que F est une **primitive** de f sur I.*
*F est en fait l'**unique** primitive de f sur I qui s'annule en a.*

Remarque 3.2 (Raffinement de la formule de la moyenne (facultatif))

La formule de la moyenne précédemment énoncée stipule l'existence d'un c appartenant à l'intervalle **fermé** $[a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$.
En fait, le théorème des accroissements finis appliqué à une primitive de f permet d'assurer plus précisément l'existence d'un tel c dans l'intervalle **ouvert** $]a, b[$.

Corollaire 3.3

Soit f une fonction ***continue*** *sur un intervalle I. Alors :*

1. *f admet des primitives sur I ;*

Corollaire 3.3

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Alors :*

1. *f admet des primitives sur I ;*
2. *si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f s'obtiennent en ajoutant une constante réelle à F ;*

Corollaire 3.3

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Alors :*

1. *f admet des primitives sur I ;*
2. *si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f s'obtiennent en ajoutant une constante réelle à F ;*
3. *pour toute primitive F de f et $(a, b) \in I^2$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.*

Corollaire 3.3

Soit f une fonction ***continue*** *sur un intervalle I. Alors :*

1. *f admet des primitives sur I ;*
2. *si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f s'obtiennent en ajoutant une constante réelle à F ;*
3. *pour toute primitive F de f et $(a, b) \in I^2$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.*

Notations :

- *la quantité $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(t)]_a^b$;*
- *on note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ toute primitive de f (définie à une constante additive près).*

Corollaire 3.3

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Alors :*

1. *f admet des primitives sur I ;*
2. *si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f s'obtiennent en ajoutant une constante réelle à F ;*
3. *pour toute primitive F de f et $(a,b) \in I^2$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.*

Notations :

- *la quantité $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(t)]_a^b$;*
- *on note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ toute primitive de f (définie à une constante additive près).*

Corollaire 3.4

*Soit f une fonction de **classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I.*

Alors on a pour tout $(a,b) \in I^2$: $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Corollaire 3.3

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I. Alors :*

1. *f admet des primitives sur I ;*
2. *si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f s'obtiennent en ajoutant une constante réelle à F ;*
3. *pour toute primitive F de f et $(a,b) \in I^2$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.*

Notations :

- *la quantité $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(t)]_a^b$;*
- *on note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ toute primitive de f (définie à une constante additive près).*

Corollaire 3.4

*Soit f une fonction de **classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I.*

Alors on a pour tout $(a,b) \in I^2$: $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

*On fera attention de ne pas confondre la formule précédente avec la suivante (valable pour f **continue**), l'**ordre** d'intégration et de dérivation n'étant pas le même :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

1. ***La fonction d'intérêt :*** soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

1. ***La fonction d'intérêt :*** soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{x-1}{\ln x}$$

   - La fonction f est continue sur $]0,1[$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

1. ***La fonction d'intérêt :*** soit $f : \left]0,1\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$

   - La fonction f est continue sur $\left]0,1\right[$.
   - On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

1. ***La fonction d'intérêt :*** soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x-1}{\ln x}$$

- La fonction f est continue sur $]0,1[$.
- On a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.
- Donc f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(1) = 1$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

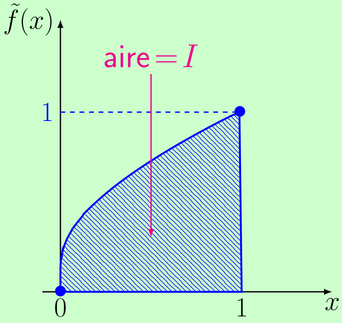
1. ***La fonction d'intérêt :*** soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln x}$

- La fonction f est continue sur $]0,1[$.
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.
- Donc f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(1) = 1$. Plus précisément :

$$\tilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On se propose alors de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$



Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

2. ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

- ***Limite en*** 0^+**.**

  Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, \mathrm{d}t$$

- ***Limite en*** 0^+***.***

  Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$.

  En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln[c(x)]}$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

2. ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

- ***Limite en*** 0^+.

  Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$.

  En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln[c(x)]}$.

  Or $\lim\limits_{x \to 0^+} c(x) = 0$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

② ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$$

- ***Limite en*** 0^+**.**

  Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$.

  En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln[c(x)]}$.

  Or $\lim\limits_{x \to 0^+} c(x) = 0$. D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

- ***Limite en*** 0^+***.***

  Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$.
  En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln[c(x)]}$.
  Or $\lim\limits_{x \to 0^+} c(x) = 0$. D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0$.

- ***Limite en*** 1^-***.***

  En décomposant $\varphi(t) = f(t) \times \dfrac{1}{t-1}$ et en appliquant la formule de la moyenne, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ étant négative sur $[x^2, x]$,

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

2. ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

- ***Limite en 0^+.***

  Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$.

  En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln[c(x)]}$.

  Or $\lim\limits_{x\to 0^+} c(x) = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0$.

- ***Limite en 1^-.***

  En décomposant $\varphi(t) = f(t) \times \dfrac{1}{t-1}$ et en appliquant la formule de la moyenne, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ étant négative sur $[x^2, x]$, il existe $d(x) \in [x^2, x]$ tel que

  $$F(x) = f\big(d(x)\big) \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = f\big(d(x)\big)\ln(x+1).$$

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, \mathrm{d}t$$

- ***Limite en*** 0^+.

  Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$.

  En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln[c(x)]}$.

  Or $\lim\limits_{x \to 0^+} c(x) = 0$. D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0$.

- ***Limite en*** 1^-.

  En décomposant $\varphi(t) = f(t) \times \dfrac{1}{t-1}$ et en appliquant la formule de la moyenne, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ étant négative sur $[x^2, x]$, il existe $d(x) \in [x^2, x]$ tel que

  $F(x) = f\big(d(x)\big) \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\, \mathrm{d}t = f\big(d(x)\big) \ln(x+1)$.

  Or $\lim\limits_{x \to 1^-} d(x) = 1$ et $\lim\limits_{u \to 1^-} f(u) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f\big(d(x)\big) = 1$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

- ***Limite en*** 0^+.

  Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0,1[$.

  En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln[c(x)]}$.

  Or $\lim\limits_{x\to 0^+} c(x) = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0$.

- ***Limite en*** 1^-.

  En décomposant $\varphi(t) = f(t) \times \dfrac{1}{t-1}$ et en appliquant la formule de la moyenne, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ étant négative sur $[x^2, x]$, il existe $d(x) \in [x^2, x]$ tel que

  $F(x) = f\big(d(x)\big) \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = f\big(d(x)\big) \ln(x+1)$.

  Or $\lim\limits_{x\to 1^-} d(x) = 1$ et $\lim\limits_{u\to 1^-} f(u) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f\big(d(x)\big) = 1$.

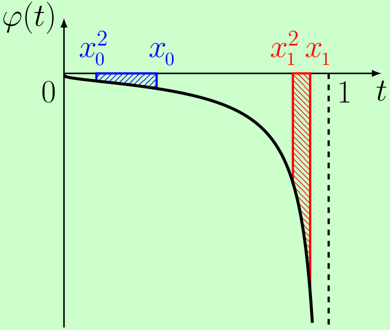
  D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \ln 2$.

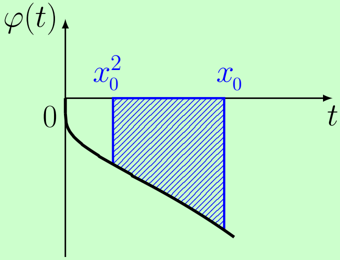
Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

- ***Graphe de φ.***





Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

2. ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt$$

- ***Prolongement par continuité sur [0,1].***

  Donc F admet un prolongement par continuité $\tilde{F}$ en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{F}(0) = 0$ et $\tilde{F}(1) = \ln 2$ (F étant continue sur $]0,1[$).

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

- ***Prolongement par continuité sur*** $[0,1]$**.**

  Donc F admet un prolongement par continuité $\tilde{F}$ en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{F}(0) = 0$ et $\tilde{F}(1) = \ln 2$ (F étant continue sur $]0,1[$).

- ***Dérivée de*** $\tilde{F}$**.**

  La fonction φ étant continue sur $]0,1[$, elle admet une primitive Φ.
  On peut écrire $F(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$, Φ étant dérivable sur $]0,1[$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$$

- ***Prolongement par continuité sur $[0,1]$.***

  Donc F admet un prolongement par continuité $\tilde{F}$ en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{F}(0) = 0$ et $\tilde{F}(1) = \ln 2$ (F étant continue sur $]0,1[$).

- ***Dérivée de $\tilde{F}$.***

  La fonction φ étant continue sur $]0,1[$, elle admet une primitive Φ.
  On peut écrire $F(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$, Φ étant dérivable sur $]0,1[$.
  On voit alors que F est dérivable sur $]0,1[$ et $F'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = f(x)$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❷ ***Une fonction intermédiaire :*** soit $F :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

- ***Prolongement par continuité sur*** $[0,1]$.

  Donc F admet un prolongement par continuité $\tilde{F}$ en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{F}(0) = 0$ et $\tilde{F}(1) = \ln 2$ (F étant continue sur $]0,1[$).

- ***Dérivée de*** $\tilde{F}$.

  La fonction φ étant continue sur $]0,1[$, elle admet une primitive Φ.
  On peut écrire $F(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$, Φ étant dérivable sur $]0,1[$.
  On voit alors que F est dérivable sur $]0,1[$ et $F'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = f(x)$.
  Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^+} F'(x) = \tilde{f}(0)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} F'(x) = \tilde{f}(1)$, donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\tilde{F}$ est dérivable en 0 et en 1 et $\tilde{F}' = \tilde{f}$ sur $[0,1]$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

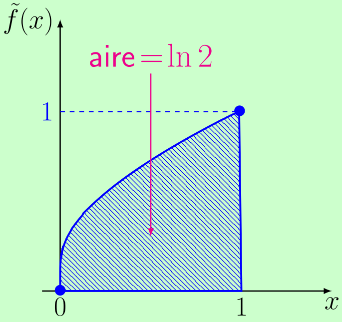
3. ***Le calcul d'aire :***

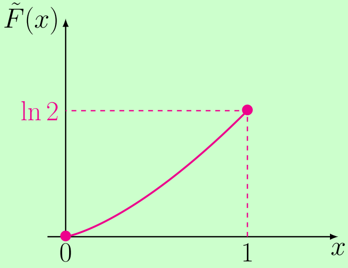
Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

❸ ***Le calcul d'aire :***

- La fonction $\tilde{F}$ est une **primitive** de $\tilde{f}$ sur $[0, 1]$.
  En conséquence, $I = \left[\tilde{F}(x)\right]_0^1 = \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0)$ soit

$$I = \ln 2.$$





Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives **à connaître :**

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

1. $\displaystyle\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + Cste$ ou encore $\displaystyle\int \frac{1}{x^p} \, dx = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{x^{p-1}} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives **à connaître :**

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

1. $\displaystyle\int x^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + Cste$ ou encore $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + Cste$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$

Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives **à connaître :**

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

1. $\displaystyle\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + Cste$

   ou encore $\displaystyle\int \frac{1}{x^p} \, dx = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{x^{p-1}} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

2. $\displaystyle\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + Cste$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$

3. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + Cste$ et $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + Cste$

   $\displaystyle\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + Cste$

Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives **à connaître :**

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

1. $\displaystyle\int x^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + Cste$
   ou encore $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax} + Cste$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$
3. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + Cste$ et $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + Cste$
   $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + Cste$
4. $\displaystyle\int \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + Cste$ et $\displaystyle\int \mathrm{sh}\, x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + Cste$
   $\displaystyle\int \mathrm{th}\, x\,\mathrm{d}x = \ln \mathrm{ch}\, x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{th}\, x + Cste$

Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives **à connaître :**

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

1. $\displaystyle\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + Cste$

   ou encore $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + Cste$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$
3. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + Cste$ et $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + Cste$

   $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + Cste$
4. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + Cste$ et $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + Cste$

   $\displaystyle\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x = \ln\operatorname{ch} x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{th} x + Cste$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsh} x + Cste$

Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives **à connaître :**

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

1. $\displaystyle\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + Cste$
   ou encore $\displaystyle\int \frac{1}{x^p} \, dx = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{x^{p-1}} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$
2. $\displaystyle\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + Cste$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$
3. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + Cste$ et $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + Cste$
   $\displaystyle\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + Cste$
4. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + Cste$ et $\displaystyle\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + Cste$
   $\displaystyle\int \operatorname{th} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x + Cste$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{argsh} x + Cste$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \arctan x + Cste$

Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives **à connaître :**

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

1. $\displaystyle\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + Cste$
   ou encore $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}} + Cste$ pour tout $p \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + Cste$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$
3. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + Cste$ et $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + Cste$
   $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + Cste$
4. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + Cste$ et $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + Cste$
   $\displaystyle\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x = \ln \operatorname{ch} x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{th} x + Cste$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + Cste$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsh} x + Cste$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x + Cste$

Et pour aller plus loin...

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Série de Riemann

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Formule de Stirling

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_stirling.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Entre Machin et Plouffe...

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_machin_plouffe.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Sinus et produit eulérien

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf

Notions à retenir

- Sommes de Riemann
  - ⋆ Application au calcul de limites de certaines suites
- Intégrale de Riemann
  - ⋆ Interprétation géométrique
  - ⋆ Opérations
  - ⋆ Inégalités, théorème de la moyenne
- Primitives
  - ⋆ Théorème fondamental de l'analyse : lien entre intégrale définie et primitive
  - ⋆ Primitives usuelles à connaître