INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Calculs d'intégrales et de primitives

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

Sommaire

Notations

On a vu dans le chapitre «Intégrale de Riemann» que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives et que celles-ci diffèrent toutes 2 à 2 d'une constante.

- On notera $x \longmapsto \int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive de f sur I définie donc à une constante additive près. On dit que $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est une intégrale **indéfinie** par opposition à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui est appelée intégrale **définie**.

  Exemple : $\int x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + Cste$ où $Cste$ désigne une constante réelle.
- On rappelle la notation $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Théorème 1.1 (Intégration par parties)

*Soit u et v deux applications de **classe $\mathcal{C}^1$** définies sur un intervalle I à valeurs **réelles** ou **complexes**.*

1. $\forall (a,b) \in I^2, \displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

   Formulation mnémotechnique : $\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$

Exemple 1.2 (Polynôme-logarithme)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.
En choisissant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = P(x)$, alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme primitive de P (de degré $n+1$) que l'on choisira sans terme constant (de façon à avoir $Q(0) = 0$), l'IPP donne

$$\int P(x)\,\ln(x)\,\mathrm{d}x = Q(x)\,\ln(x) - \int \frac{Q(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Notons que $x \to \frac{Q(x)}{x}$ est une fonction polynôme de degré n (puisque $Q(0) = 0$), elle admet donc pour primitive une fonction polynôme R de degré $n+1$, et l'on trouve :

$$\int P(x)\,\ln(x)\,\mathrm{d}x = Q(x)\,\ln(x) - R(x) + Cste.$$

Exemples :

- pour $P(x) = 1$, on choisit $Q(x) = x$ qui donne $R(x) = x$ et l'on obtient une primitive de $\ln(x)$:
$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\,\ln(x) - x + Cste.$$
- pour $P(x) = x^n$, on choisit $Q(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ qui donne $R(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ et l'on obtient :
$$\int x^n\,\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + Cste.$$

Exemple 1.3 (Polynôme-exponentielle)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.
En choisissant $u(x) = P(x)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{ax}$, alors $u'(x) = P'(x)$ et $v(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$ et l'IPP donne

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}P(x)\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a}\int P'(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x.$$

Notons que P' est un polynôme de degré $n-1$. Ainsi, l'IPP permet d'« abaisser » le degré du polynôme présent dans l'intégrande initiale.
En réitérant ce procédé, on abaisse progressivement le degré de P pour arriver in fine à une primitive d'intégrande e^{ax} :

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = Q(x)\mathrm{e}^{ax} + Cste$$

où Q est le polynôme de degré n s'exprimant selon

$$Q(x) = \frac{1}{a}P(x) - \frac{1}{a^2}P'(x) + \frac{1}{a^3}P''(x) - \cdots + (-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}P^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{a^{k+1}}P^{(k)}(x).$$

Application : supposons le réel a **négatif**. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P^{(k)}(x)\,\mathrm{e}^{ax} = 0$.
Ainsi, en notant $\int_0^{+\infty} = \lim\limits_{A \to +\infty}\int_0^A$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{a^{k+1}}P^{(k)}(0).$$

Exemple 1.4 (Exponentielle complexe)

Soit a, b deux réels **non simultanément nuls.** Supposons e.g. $a \neq 0$ (sinon $b \neq 0$).
En choisissant $u(x) = \cos(bx)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{ax}$, alors $u'(x) = -b\sin(bx)$ et $v(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$ et l'IPP donne $\displaystyle\int \cos(bx)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cos(bx)\,\mathrm{e}^{ax} + \frac{b}{a}\int \sin(bx)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x.$

En choisissant $u(x) = \sin(bx)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{ax}$, alors $u'(x) = b\cos(bx)$ et $v(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$, une nouvelle IPP donne

$$\int \sin(bx)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(bx)\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}\int \cos(bx)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$

que l'on reporte dans la première formule :

$$\int \cos(bx)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{a}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\sin(bx)\right)\mathrm{e}^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int \cos(bx)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$

d'où l'on extrait $\displaystyle\int \cos(bx)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{a\cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax} + Cste.$

La même méthode conduirait à

$$\int \sin(bx)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{-b\cos(bx) + a\sin(bx)}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax} + Cste.$$

Application : soit $c \in \mathbb{C}^*$. En posant $c = a + \mathrm{i}b$ avec a, b réels non simultanément nuls, et en rappelant que $\mathrm{e}^{cx} = \mathrm{e}^{ax}\big(\cos(bx) + \mathrm{i}\sin(bx)\big)$, on obtient une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{cx}$:

$$\int \mathrm{e}^{cx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx} + Cste.$$

Exemple 1.5 (Formule de Taylor avec reste intégral (facultatif))

❶ ***Un calcul préliminaire***

Soit a, b deux réels et f une application définie sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$) de **classe $\mathcal{C}^2$**. En choisissant $u(x) = (b - x)$ et $v'(x) = f''(x)$, alors $u'(x) = -1$ et $v(x) = f'(x)$ et l'IPP donne

$$\int_a^b (b-x)f''(x)\,\mathrm{d}x = \big[(b-x)f'(x)\big]_a^b + \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)$$

soit
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-x)f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

❷ ***Généralisation***

Soit a, b deux réels et f une application définie sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$) de **classe $\mathcal{C}^{n+1}$**. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque : la fonction $f^{(n+1)}$ étant continue, on peut appliquer la formule de la moyenne :

$$\exists c \in [a, b],\ \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = f^{(n+1)}(c)\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

On retrouve la formule de Taylor-Lagrange avec des hypothèses plus fortes. (La formule de Taylor-Lagrange requière que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$.)

Théorème 1.6 (Changement de variable pour le calcul d'intégrales)

1. *Soit φ une application de* ***classe*** $\mathcal{C}^1$ *sur $[a, b]$ à valeurs* ***réelles*** *et f une application* ***continue*** *sur l'intervalle $\varphi([a, b])$ à valeurs* ***réelles*** *ou* ***complexes****. Alors :*
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. *Si, de plus, φ est* ***bijective*** *de $[a, b]$ sur $[\alpha, \beta] = \varphi([a, b])$,*
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Formellement, on pose $x = \varphi(t)$ et l'on écrit $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 1.7 (Changement de variable pour le calcul de primitives)

Soit I et J deux intervalles, f une application ***continue*** *sur I à valeurs* ***réelles*** *ou* ***complexes*** *et φ une* ***bijection*** *de* ***classe*** $\mathcal{C}^1$ *de J dans I.*

- *Si G est une primitive de $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ sur J, alors $G\circ\varphi^{-1}$ est une primitive de f sur I. Autrement dit, en posant $x = \varphi(t)$ (ou encore $t = \varphi^{-1}(x)$) :*
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + Cste = G(\varphi^{-1}(x)) + Cste$$

Exemple 1.8 (Racine carrée d'un polynôme du 2nd degré)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On propose une méthode de calcul de primitives des fonctions $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, $x \mapsto f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ et $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

1. Le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$ fournit $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t \,\mathrm{d}t$ et $\sqrt{x^2+1} = \operatorname{ch} t$, puis
$$\int f\left(\sqrt{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = \int f(\operatorname{ch} t) \operatorname{ch} t \,\mathrm{d}t.$$
Si l'on dispose d'une primitive F de la fonction $t \mapsto f(\operatorname{ch} t) \operatorname{ch} t$, alors
$$\int f\left(\sqrt{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = F(\operatorname{argsh} x) + Cste.$$
(On rappelle que argsh est la fonction réciproque de sh et que $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.)

Exemple : pour $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$,
$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{ch}^2 t \,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2t)+1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2t) + \frac{1}{2}t + Cste = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + t) + Cste \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{argsh} x\right) + Cste.\end{aligned}$$

Application :
$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{argsh} x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Exemple 1.8 (Racine carrée d'un polynôme du 2nd degré)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On propose une méthode de calcul de primitives des fonctions $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, $x \mapsto f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ et $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

2. Le changement de variable $x = \sin t$ ($x \in [-1,1]$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) fournit $\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, et sur $[-1,1]$:

$$\int f\left(\sqrt{1-x^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(\sin t)\, \sin t \,\mathrm{d}t = F(\arcsin x) + Cste$$

F étant une primitive de la fonction $t \mapsto f(\sin t)\, \sin t$.

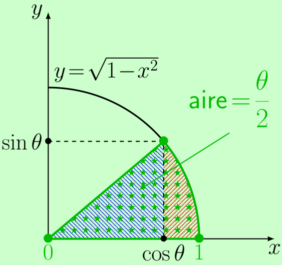
Application :
L'aire sous l'arc de cercle entre $\cos\theta$ et 1 est donnée par

$$\int_{\cos\theta}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\theta} \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta)$$

L'aire du triangle de base $\cos\theta$ vaut $\frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta)$.

L'aire du **triangle circulaire** vaut alors $\frac{\theta}{2}$.



Exemple 1.8 (Racine carrée d'un polynôme du 2^{nd} degré)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On propose une méthode de calcul de primitives des fonctions $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, $x \mapsto f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ et $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

3. Le changement de variable $x = \operatorname{ch} t$ ($x \geqslant 1$, $t \geqslant 0$) fournit $\mathrm{d}x = \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2-1} = \operatorname{sh} t$, et, e.g. sur $[1, +\infty[$:

$$\int f\left(\sqrt{x^2-1}\right) \mathrm{d}x = \int f(\operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t = F(\operatorname{argch} x) + Cste$$

F étant une primitive de la fonction $t \mapsto f(\operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t$.
Sur $]-\infty, -1]$, on pourra procéder au changement de variable $x = -\operatorname{ch} t$ ($x \leqslant -1, t \geqslant 0$).

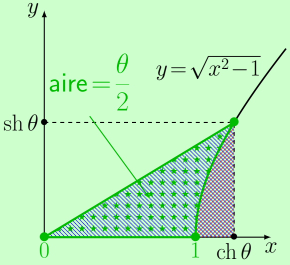
Application :
L'aire sous la branche d'hyperbole entre 1 et $\operatorname{ch}\theta$ est donnée par

$$\int_1^{\operatorname{ch}\theta} \sqrt{x^2-1}\, \mathrm{d}x = \int_0^{\theta} \operatorname{sh}^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\theta} \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(2t) - 1\right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\theta) - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\theta)\operatorname{sh}(\theta) - \frac{\theta}{2}$$

L'aire du triangle de base $\operatorname{ch}\theta$ vaut $\frac{1}{2}\operatorname{ch}(\theta)\operatorname{sh}(\theta)$.

L'aire du **triangle hyperbolique** vaut alors $\frac{\theta}{2}$.



Exemple 1.8 (Racine carrée d'un polynôme du 2nd degré)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On propose une méthode de calcul de primitives des fonctions $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$, $x \mapsto f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ et $x \mapsto f\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

Généralisation : intégrales abéliennes (facultatif)

Ces trois exemples permettent en fait de calculer des primitives de fonctions de la forme $f(\sqrt{ax^2+bx+c})$ lorsque a, b, c sont trois réels tels que $a>0$ ou ($a<0$ et $b^2-4ac>0$).
En effet, il suffit de décomposer le trinôme ax^2+bx+c sous sa forme canonique et de procéder à un changement de variable intermédiaire affine ($x = \alpha u + \beta$) afin d'exprimer ax^2+bx+c en fonction de u^2+1, u^2-1 ou $1-u^2$...

Sommaire

Définition 2.1

*Une **fonction ou fraction rationnelle** F sur $\mathbb{R}$ est le quotient de deux fonctions polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, Q étant non identiquement nulle. On a donc* $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$. On pose* $F = \dfrac{P}{Q}$.

1. *On note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fonctions rationnelles sur $\mathbb{R}$.*
2. *On dit que la fraction F est **réductible** lorsque les polynômes P et Q admettent un facteur commun de degré $\geqslant 1$, i.e. lorsqu'il existe un polynôme R de degré $\geqslant 1$ et des polynômes P_1 et Q_1 tels que $P = P_1 R$ et $Q = Q_1 R$. On a alors* $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1}$.

   *Dans le cas contraire, on dit que F est **irréductible**.*

Définition 2.2

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ *une **fraction irréductible.***

1. *On appelle **partie entière** de F la fonction polynôme **quotient** de la division euclidienne de P par Q.*
2. *On appelle **pôle** de F toute racine du dénominateur Q dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle alors **multiplicité** d'un pôle de F, sa multiplicité en tant que racine de Q.*

Problématique

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fonction rationnelle **réelle**.

L'objectif de ce paragraphe est de calculer une primitive de F sur $\mathbb{R}$.
On commence par présenter quelques exemples avant de décrire une méthode générale.

Exemples étudiés :

1. $F(x) = \dfrac{2x-5}{(x-1)(x-2)}$
2. $F(x) = \dfrac{2x-5}{x^2(x-1)}$
3. $F(x) = \dfrac{3}{x^3-1}$
4. $F(x) = \dfrac{x^6}{(x^2-1)^2}$
5. $F(x) = \dfrac{x^8}{x^4+1}$

Exemple 2.3

Soit $F(x) = \dfrac{2x-5}{(x-1)(x-2)}$.

- La fonction rationnelle F admet deux pôles **simples** réels 1 et 2.
  L'idée est de « séparer » les facteurs du dénominateur $(x-1)$ et $(x-2)$.
- Pour cela on cherche des réels a et b (s'ils existent) tels que $F(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$.
  - ⋆ ***Méthode « provisoire » :***
    - ∗ on réduit au même dénominateur : $F(x) = \frac{(a+b)x-(2a+b)}{(x-1)(x-2)}$;
    - ∗ on identifie avec l'expression initiale de F : $a+b=2$ et $2a+b=5$;
    - ∗ on résout le système et l'on trouve $a=3$ et $b=-1$, soit $F(x) = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{x-2}$.
  - ⋆ ***Méthode « générale » :***
    - ∗ on isole a en multipliant par $(x-1)$: $(x-1)F(x) = a + (x-1)\frac{b}{x-2}$
      et l'on fait tendre x vers 1 : $a = \lim\limits_{x\to1}(x-1)F(x) = \lim\limits_{x\to1}\frac{2x-5}{x-2} = 3$;
    - ∗ on isole b en multipliant par $(x-2)$: $(x-2)F(x) = (x-2)\frac{a}{x-1} + b$
      et l'on fait tendre x vers 2 : $b = \lim\limits_{x\to2}(x-2)F(x) = \lim\limits_{x\to2}\frac{2x-5}{x-1} = -1$.

  Les fractions élémentaires $\frac{3}{x-1}$ et $-\frac{1}{x-2}$ s'appellent « **éléments simples** », ce sont les « **parties polaires** » de F relatives aux pôles 1 et 2.
- Il devient facile de calculer une primitive de F :

$$\int F(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x-1| - \ln|x-2| + Cste.$$

Exemple 2.4

Soit $F(x) = \dfrac{2x-5}{x^2(x-1)}$.

- La fonction rationnelle F admet deux pôles réels : un pôle **simple** 1 et un pôle **double** 0. L'idée est de « séparer » les facteurs du dénominateur x^2 et $(x-1)$.

- Pour cela on cherche des nombres réels a, b et c tels que $F(x) = \dfrac{ax+b}{x^2} + \dfrac{c}{x-1}$.

  ⋆ ***Méthode « provisoire » :***

  ∗ on réduit au même dénominateur : $F(x) = \frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)}$;

  ∗ on identifie avec l'expression initiale de F : $a+c=0$, $b-a=2$ et $-b=-5$;

  ∗ on trouve $a=3$, $b=5$ et $c=-3$, soit $F(x) = \dfrac{3x+5}{x^2} - \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x-1}$.

  ⋆ ***Méthode « générale » :***

  ∗ on isole c en multipliant par $(x-1)$: $(x-1)F(x) = c + (x-1)\frac{ax+b}{x^2}$
  et l'on fait tendre x vers 1 : $c = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)F(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-5}{x^2} = -3$;

  ∗ on isole b en multipliant par x^2 : $x^2F(x) = b + x\left(a + \frac{cx}{x-1}\right)$
  et l'on fait tendre x vers 0 : $b = \lim\limits_{x\to 0} x^2F(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-5}{x-1} = 5$;

  ∗ on multiplie par x : $xF(x) = \frac{ax+b}{x} + \frac{cx}{x-1}$
  et l'on fait tendre x vers ∞ : $a+c = \lim\limits_{x\to\infty} xF(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-5}{x(x-1)} = 0$; d'où $a=-c=3$.

Exemple 2.4

Soit $F(x) = \dfrac{2x-5}{x^2(x-1)}$.

- ***Résultat***
  On a ainsi obtenu
  $$F(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{3}{x-1}.$$
  Les fractions élémentaires $\frac{3}{x}$, $-\frac{3}{x-1}$ et $\frac{5}{x^2}$ s'appellent « **éléments simples** », $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x}$ et $-\frac{3}{x-1}$ sont les « **parties polaires** » de F relatives aux pôles 0 et 1.
- ***Calcul d'une primitive***
  Il devient facile de calculer une primitive de F :
  $$\int F(x)\,dx = 5\int \frac{1}{x^2}\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx - 3\int \frac{1}{x-1}\,dx = 3\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{5}{x} + Cste.$$
- ***Calcul d'une intégrale définie***
  En notant que $\lim\limits_{x\to+\infty} (3\ln|x| - 3\ln|x-1|) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3\ln\dfrac{x}{x-1} = 0$, on obtient
  $$\int_2^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{X\to+\infty} \int_2^X F(x)\,dx = \frac{5}{2} - 3\ln 2.$$

Exemple 2.5

Soit $F(x) = \dfrac{3}{x^3 - 1}$.

- ***Recherche des pôles de la fraction***

  Le dénominateur se décompose selon $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

  La fonction rationnelle F admet donc trois pôles **simples :**

  un pôle **réel** 1 et deux pôles **complexes conjugués** $\jmath = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\jmath} = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

  L'idée consiste alors à

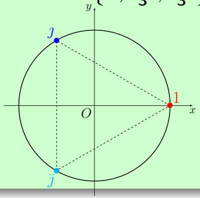
  - ⋆ travailler d'abord sur $\mathbb{C}$: $x^3 - 1 = (x-1)(x-\jmath)(x-\bar{\jmath})$;
  - ⋆ puis de « séparer » les facteurs du dénominateur $(x-1)$, $(x-\jmath)$ et $(x-\bar{\jmath})$;
  - ⋆ puis de revenir à $\mathbb{R}$.

  Remarque : les pôles de F sur $\mathbb{C}$ sont les racines complexes de l'équation $z^3 = 1$.
  On peut résoudre directement cette équation en recherchant z sous la forme $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ selon

  $$z^3 = 1 \iff \rho^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta)} = 1 \iff \rho = 1 \text{ et } 3\theta \in \{0, 2\pi, 4\pi\} \iff \rho = 1 \text{ et } \theta \in \left\{0, \tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{4\pi}{3}\right\}$$

  On obtient ainsi trois racines :

  $$z_1 = 1 \qquad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \jmath \qquad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \bar{\jmath}$$



  Les nombres $1, \jmath, \bar{\jmath}$ sont les **racines cubiques complexes** de 1.
  On observe que $\jmath^3 = 1$, $\jmath^2 = \bar{\jmath}$, $\jmath\bar{\jmath} = 1$ et $1 + \jmath + \bar{\jmath} = 0$.

Exemple 2.5

Soit $F(x) = \dfrac{3}{x^3 - 1}$.

- ***Décomposition sur $\mathbb{C}$***

  On cherche des nombres **complexes** a, b et c tels que $F(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-\jmath} + \dfrac{c}{x-\bar{\jmath}}$.

  - ∗ On isole a en multipliant par $(x-1)$: $(x-1)F(x) = a + (x-1)\left(\frac{b}{x-\jmath} + \frac{c}{x-\bar{\jmath}}\right)$ et l'on fait tendre x vers 1 : $a = \lim\limits_{x \to 1} (x-1)F(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{x^2+x+1} = 1$.
  - ∗ On isole b en multipliant par $(x-\jmath)$: $(x-\jmath)F(x) = b + (x-\jmath)\left(\frac{a}{x-1} + \frac{c}{x-\bar{\jmath}}\right)$ et l'on fait tendre x vers $\jmath$: $b = \lim\limits_{x \to \jmath} (x-\jmath)F(x) = \lim\limits_{x \to \jmath} \frac{3}{(x-1)(x-\bar{\jmath})} = \jmath$.
  - ∗ Rappelons que la fonction F est **réelle**, en conséquence :

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-\jmath} + \frac{c}{x-\bar{\jmath}} = \frac{\bar{a}}{x-1} + \frac{\bar{b}}{x-\bar{\jmath}} + \frac{\bar{c}}{x-\jmath}.$$

    En admettant l'unicité d'une telle décomposition, on peut identifier les coefficients deux à deux : $\bar{a} = a$ et $c = \bar{b}$. Le nombre a est donc **réel** (on a trouvé $a = 1$) et les nombres **complexes** b et c sont **conjugués,** donc $c = \bar{\jmath}$.
  - ∗ À titre de vérification, on multiplie par x : $xF(x) = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx}{x-\jmath} + \frac{cx}{x-\bar{\jmath}}$ et l'on fait tendre x vers ∞ : $a+b+c = \lim\limits_{x \to \infty} xF(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{x^3-1} = 0$; d'où $a+b+c = 0$.

  D'où la décomposition sur $\mathbb{C}$: $F(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{\jmath}{x-\jmath} + \dfrac{\bar{\jmath}}{x-\bar{\jmath}}$.

  Les fractions élémentaires $\frac{1}{x-1}$, $\frac{\jmath}{x-\jmath}$ et $\frac{\bar{\jmath}}{x-\bar{\jmath}}$ s'appellent **« éléments simples de première espèce »**, ce sont les **« parties polaires »** de F relatives aux pôles 1, $\jmath$, $\bar{\jmath}$.

Exemple 2.5

Soit $F(x) = \dfrac{3}{x^3-1}$.

- ***Décomposition sur*** $\mathbb{R}$
  - $*$ On rassemble les parties polaire conjuguées : $\frac{\jmath}{x-\jmath} + \frac{\bar{\jmath}}{x-\bar{\jmath}} = \frac{(\jmath+\bar{\jmath})x-2\jmath\bar{\jmath}}{(x-\jmath)(x-\bar{\jmath})} = \frac{-x-2}{x^2+x+1}$.

    D'où la décomposition sur $\mathbb{R}$: $F(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x^2+x+1}$.

    Les fractions élémentaires $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{x+2}{x^2+x+1}$ s'appellent respectivement **« éléments simples de première espèce »** et **« de deuxième espèce »**.
  - $*$ Au vu du résultat précédent, on aurait pu directement rechercher des nombres **réels** a, b' et c' tels que $F(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b'x+c'}{x^2+x+1}$.
    - $\star$ On isole a comme précédemment en multipliant par $(x-1)$ et en faisant tendre x vers 1 : $a = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)F(x) = 1$.
    - $\star$ On isole b' et c' en multipliant par (x^2+x+1) :

      $$(x^2+x+1)F(x) = b'x+c' + (x^2+x+1)\left(\tfrac{a}{x-1}\right)$$

      et l'on fait tendre x vers $\jmath$:

      $$b'\jmath + c' = \lim_{x\to\jmath}(x^2+x+1)F(x) = \lim_{x\to\jmath}\tfrac{3}{x-1} = \tfrac{3}{\jmath-1} = -\tfrac{3+i\sqrt{3}}{2}.$$

      On déduit le système $\begin{cases} -\frac{1}{2}b' + c' = -\frac{3}{2} \\ b'\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ duquel on tire $b' = -1$ et $c' = -2$.

Exemple 2.5

Soit $F(x) = \dfrac{3}{x^3 - 1}$.

- ***Calcul d'une primitive sur $\mathbb{R}$***

$$
\begin{aligned}
\int F(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + Cste
\end{aligned}
$$

- ***Calcul d'une intégrale définie***

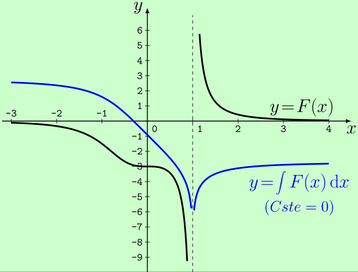
En notant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) = 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}$

et $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{5}{\sqrt{3}} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{5}$,

on trouve

$$
\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{X\to+\infty}\int_2^X F(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln 7 - \sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{5}.
\end{aligned}
$$



Notations (cf. chapitre « Polynômes »)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle **réelle irréductible**. On note :

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses pôles **réels** distincts de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$;
- $\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \dots, \zeta_q, \bar{\zeta}_q$ ses pôles **complexes non réels deux à deux conjugués** distincts de multiplicités respectives $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$;

Le dénominateur Q se **factorise** donc sur $\mathbb{R}$ (en le choisissant de coefficient dominant égal à 1) selon

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \alpha_i)^{\mu_i} \prod_{j=1}^{q} (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{\nu_j}$$

où $\beta_j = -2\Re e(\zeta_j)$ et $\gamma_j = |\zeta_j|^2$ sont des réels tels que $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$.

Théorème 2.6 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)

*La fraction rationnelle F se décompose de manière **unique** sous la forme suivante :*

$$F(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{p} G_i(x) + \sum_{j=1}^{q} H_j(x)$$

où

- *E est la **partie entière** de F ;*
- *$G_i(x) = \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{a_{ik}}{(x-\alpha_i)^k}$ est la **partie polaire** relative au pôle **réel** α_i ;*
- *$H_j(x) = \sum_{l=1}^{\nu_j} \frac{b_{jl}x + c_{jl}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^l}$ est la **partie polaire** relative aux pôles **complexes conjugués** ζ_j et $\bar{\zeta}_j$.*

Dans les quantités précédentes :

* *les coefficients a_{ik}, b_{jl}, c_{jl} sont des nombres **réels ;***
* *les fractions élémentaires $\frac{a_{ik}}{(x-\alpha_i)^k}$ s'appellent **éléments simples de 1re espèce ;***
* *les fractions élémentaires $\frac{b_{jl}x + c_{jl}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^l}$ s'appellent **éléments simples de 2e espèce.***

Autrement dit, toute fraction rationnelle réelle se décompose en somme d'un polynôme et d'éléments simples de 1re et de 2e espèce.

On propose une méthode pratique de calcul de certains éléments simples.

Proposition 2.7 (Élements simples de 1re espèce)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ *une fraction rationnelle **réelle irréductible**.*

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *un pôle **réel** de* F *d'ordre de multiplicité* $\mu \in \mathbb{N}^*$.
Le dénominateur Q *se factorise donc selon* $Q(x) = (x-\alpha)^\mu Q_1(x)$ *avec* $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $Q_1(\alpha) \neq 0$.
    - *La partie polaire de* F *relative à* α *est de la forme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mu} \frac{a_k}{(x-\alpha)^k}$ *où les* a_k *sont des réels. En particulier,* $a_\mu = \displaystyle\lim_{x\to\alpha} (x-\alpha)^\mu F(x) = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.
    - *Si* α *est un pôle **simple** (i.e.* $\mu = 1$*), la partie polaire de* F *relative à* α *est donnée par* $\dfrac{a}{x-\alpha}$ *où* $a = \displaystyle\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)F(x) = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

Remarque 2.8 (Méthode générale (facultatif))

Il est possible de déterminer **tous** les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ simultanément en effectuant une division suivant les puissances croissantes de $P(y+\alpha)$ par $Q_1(y+\alpha)$ à l'ordre $\mu - 1$, puis en divisant le quotient obtenu par y^μ, puis en remplaçant y par $x-\alpha$...

On propose une méthode pratique de calcul de certains éléments simples.

Proposition 2.7 (Élements simples de 2^e espèce)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ *une fraction rationnelle* ***réelle irréductible****.*

2. *Soit* $(\zeta,\bar{\zeta}) \in \mathbb{C}^2$ *des pôles* ***complexes non réels conjugués*** *de* F *de multiplicité* $\nu \in \mathbb{N}^*$. *Le dénominateur* Q *se factorise donc selon* $Q(x) = (x^2+\beta x+\gamma)^\nu Q_1(x)$ *avec* $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $Q_1(\zeta) \neq 0$, $\beta = -2\Re\mathrm{e}(\zeta)$ *et* $\gamma = |\zeta|^2$.
   - *La partie polaire de* F *relative à* $(\zeta,\bar{\zeta})$ *est de la forme* $\displaystyle\sum_{l=1}^{\nu} \frac{b_l x + c_l}{(x^2+\beta x+\gamma)^l}$ *où les* b_l *et* c_l *sont des* ***réels.*** *En particulier,* $b_\nu \zeta + c_\nu = \displaystyle\lim_{x\to\zeta} (x^2+\beta x+\gamma)^\nu F(x) = \frac{P(\zeta)}{Q_1(\zeta)}$.
   - *Si* ζ *est un pôle* ***simple*** *(i.e.* $\nu = 1$*), la partie polaire de* F *relative à* $(\zeta,\bar{\zeta})$ *est donnée par* $\dfrac{bx+c}{x^2+\beta x+\gamma}$ *où* $b_\nu\zeta + c_\nu = \dfrac{P(\zeta)}{Q_1(\zeta)}$.

Remarque 2.8 (Méthode générale (facultatif))

Il est possible de déterminer **tous** les coefficients $b_1, c_1, \ldots, b_\nu, c_\nu$ en effectuant une décomposition en éléments simples (de 1^re espèce) d'abord sur $\mathbb{C}$, puis en rassemblant les parties polaires 2 à 2 conjuguées pour obtenir des éléments simples de 2^e espèce...

Proposition 2.9 (Primitives des éléments simples de 1re espèce)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, et tout réel α, la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^n}$ admet des primitives sur tout intervalle ne contenant pas α données par :

1. *pour $n = 1$,* $\displaystyle\int \frac{1}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = \ln(|x-\alpha|) + Cste$;
2. *pour $n > 1$,* $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + Cste$.

Proposition 2.10 (Primitives de certains éléments simples de 2e espèce)

Pour tous réels a, b, c, d tels que $c^2 - 4d < 0$, un changement de variable de la forme $u = Ax + B$ permet de trouver des réels α et β tels que

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha u+\beta}{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= \alpha \int \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \beta \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\alpha}{2}\ln(u^2+1) + \beta \arctan(u) + Cste \\ &= \frac{\alpha}{2}\ln(x^2+cx+d) + \beta \arctan(Ax+B) + Cste.\end{aligned}$$

Il est utile de connaître la primitive suivante : pour tous réels a, b tels que $b \neq 0$,

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + Cste.$$

Protocole d'intégration

Soit F une fonction rationnelle définie sur un intervalle I.

Pour déterminer une primitive de F sur I on procède de la manière suivante :

1. on détermine la **partie entière** de F à l'aide d'une division euclidienne (si le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière est nulle) ;
2. on détermine tous les **pôles** de F, ou on factorise le dénominateur **au maximum ;**
3. on écrit la décomposition en **éléments simples** de F en faisant apparaître les éléments simples de **1re et de 2e espèce.**
4. on **intègre** chaque terme de la décomposition.

Remarque 2.11 (Méthode générale (facultatif))

Il est possible de calculer des primitives pour **tous** les éléments simples de 2e espèce de la forme $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On se ramène tout d'abord à l'aide d'un changement de variable $x = Au + B$ à des éléments simples de 2e espèce de la forme $\frac{u}{(u^2+1)^n}$ et $\frac{1}{(u^2+1)^n}$, puis

1. $\displaystyle\int \frac{u}{(u^2+1)^n}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(u^2+1)^{n-1}} + Cste$ pour $n > 1$;
2. on peut calculer $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,\mathrm{d}u$ par récurrence ou à l'aide du changement de variable $u = \tan t$ conduisant à un calcul de primitive d'un polynôme trigonométrique...

Exemple 2.12

Soit $F(x) = \dfrac{x^6}{(x^2-1)^2}$.

- ***Factorisation du dénominateur et pôles de la fraction***
  Le dénominateur de F se factorise selon $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$.
  La fonction rationnelle F admet donc deux pôles **réels doubles** 1 et -1.

- ***Calcul de la partie entière***
  La division euclidienne de x^6 par $(x^2-1)^2 = x^4-2x^2+1$ donne pour quotient la partie entière de F :
  $$\begin{array}{r|l} x^6 & x^4-2x^2+1 \\ \hline 3x^2-2 & x^2+2 \end{array} \qquad \text{soit} \quad E(x) = x^2+2.$$

- ***Forme de la décomposition***
  La fonction rationnelle F admet une décomposition de la forme
  $$F = E + G_1 + G_2 \quad \text{avec} \quad G_1(x) = \frac{a_1}{(x-1)^2} + \frac{b_1}{x-1} \quad \text{et} \quad G_2(x) = \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{b_2}{x+1}$$
  les coefficients a_1, b_1, a_2, b_2 étant **réels**.
  Les fractions élémentaires G_1, G_2 sont les **parties polaires** relatives aux pôles $1, -1$.
  Notant que F (et donc E) est une fonction **paire**, l'identité $F(x) = F(-x)$ conduit à
  $$\frac{a_1}{(x-1)^2} + \frac{b_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{b_2}{x+1} = \frac{a_1}{(x+1)^2} - \frac{b_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} - \frac{b_2}{x-1}.$$
  Par **unicité** de la décomposition, on peut identifier les éléments simples deux à deux, d'où les relations entre coefficients : $a_2 = a_1$ et $b_2 = -b_1$.

Exemple 2.12

Soit $F(x) = \dfrac{x^6}{(x^2-1)^2}$.

- ***Calcul des coefficients***
  - On trouve a_1 en multipliant $F(x)$ par $(x-1)^2$ et en faisant tendre x vers 1 : $a_1 = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{1}{4}$.
  - Puis avec $a_2 = a_1$ on trouve $a_2 = \frac{1}{4}$.
  - Pour calculer b_1 (et b_2), on utilise une valeur particulière de x, e.g. $x = 0$: d'une part on a directement $F(0)=0$, d'autre part en utilisant la forme $F = E + G_1 + G_2$ on obtient
  $$F(0) = 2 + a_1 - b_1 + a_2 + b_2 = 2 + 2a_1 - 2b_1$$
  d'où l'on tire l'équation $b_1 = a_1 + 1$ soit $b_1 = \frac{5}{4}$.
  - Enfin avec $b_2 = -b_1$ on trouve $b_2 = -\frac{5}{4}$.
- ***Décomposition en éléments simples***
$$F(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{5}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{5}{4(x+1)}$$
- ***Calcul d'une primitive sur $\mathbb{R}$***
$$\begin{aligned}\int F(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{5}{4}\ln|x+1| + Cste \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{x}{2(x^2-1)} + \frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + Cste\end{aligned}$$

Exemple 2.13

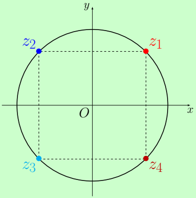
Soit $F(x) = \dfrac{x^8}{x^4+1}$.

- ***Recherche des pôles de la fraction***
  Les pôles de F sur $\mathbb{C}$ sont les racines complexes de l'équation $z^4 = -1$.
  On peut résoudre directement cette équation en recherchant z sous la forme $z = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ selon

  $$z^4 = -1 \iff \rho^4 e^{i(4\theta)} = -1 \iff \rho = 1 \text{ et } 4\theta \in \{\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi\} \iff \rho = 1 \text{ et } \theta \in \left\{\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}\right\}$$

  On obtient ainsi quatre racines :

  $$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$
  $$z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \qquad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

  Les nombres z_1, z_2, z_3, z_4 sont les **racines quatrièmes complexes** de -1. Elles sont deux à deux **conjuguées :** $z_4 = \bar{z}_1$ et $z_3 = \bar{z}_2$.

  La fonction rationnelle F admet donc quatre pôles **simples complexes non réels deux à deux conjugués**.

- ***Factorisation du dénominateur***
  On écrit la factorisation de x^4+1 sur $\mathbb{C}$: $x^4+1 = (x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)$
  de laquelle on déduit celle sur $\mathbb{R}$: $x^4+1 = [(x-z_1)(x-\bar{z}_1)]\,[(x-z_2)(x-\bar{z}_2)]$
  $$= (x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1).$$

Exemple 2.13

Soit $F(x) = \dfrac{x^8}{x^4+1}$.

- ***Calcul de la partie entière***
  La division euclidienne de x^8 par x^4+1 donne pour quotient la partie entière de F :

$$\begin{array}{r|l} x^8 & x^4+1 \\ \hline 1 & x^4-1 \end{array} \qquad \text{soit} \quad E(x) = x^4 - 1.$$

- ***Forme de la décomposition***
  La fonction rationnelle F admet une décomposition de la forme

$$F = E + H_1 + H_2 \quad \text{avec} \quad H_1(x) = \frac{a_1x+b_1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} \quad \text{et} \quad H_2(x) = \frac{a_2x+b_2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$$

les coefficients a_1, b_1, a_2, b_2 étant **réels**.
Les fractions élémentaires H_1 et H_2 sont des **éléments simples de 2e espèce.**

Notant que F est une fonction **paire**, l'identité $F(x) = F(-x)$ conduit à

$$x^4+1+\frac{a_1x+b_1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{a_2x+b_2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}=x^4+1+\frac{-a_1x+b_1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+\frac{-a_2x+b_2}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}.$$

Par **unicité** de la décomposition, on peut identifier les éléments simples deux à deux, d'où les relations entre coefficients : $a_2 = -a_1$ et $b_2 = b_1$.

Notons également que la **parité** de F entraîne celle de sa partie entière E.

Exemple 2.13

Soit $F(x) = \dfrac{x^8}{x^4+1}$.

- ***Calcul des éléments simples***

  $*$ Pour calculer a_1 et b_1, on multiplie F par $x^2-\sqrt{2}\,x+1$ et on fait tendre x vers z_1 :

$$a_1 z_1 + b_1 = \lim_{x\to z_1} (x^2-\sqrt{2}\,x+1)F(x) = \left.\frac{x^8}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right|_{x=z_1} = \frac{{z_1}^8}{{z_1}^2+\sqrt{2}\,z_1+1}$$

  Rappelant que ${z_1}^4=-1$ et ${z_1}^2-\sqrt{2}\,z_1+1=0$, on trouve ${z_1}^8=1$ et ${z_1}^2+\sqrt{2}\,z_1+1=2\sqrt{2}\,z_1$ d'où $a_1 z_1 + b_1 = \frac{\bar{z}_1}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\mathrm{i}}{4}$.

  On en déduit le système $\begin{cases} \frac{a_1}{\sqrt{2}} + b_1 = \frac{1}{4} \\ \frac{a_1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} \end{cases}$ duquel on tire $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$.

  D'où l'élément simple correspondant : $H_1(x) = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$.

  $*$ La parité de F fournit l'autre élément simple : $H_2(x) = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$.

- ***Décomposition en éléments simples***

$$F(x) = x^4+1+\frac{1}{4}\,\frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}$$

Exemple 2.13

Soit $F(x) = \dfrac{x^8}{x^4+1}$.

- ***Calcul d'une primitive sur $\mathbb{R}$***

  ∗ On a $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}x$

  $$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right) + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,x+1\right) + Cste$$

  ∗ De manière analogue :

  $$\int \frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right) + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,x-1\right) + Cste$$

  ∗ En intégrant enfin la partie entière, on trouve :

  $$\int F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + x + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan\left(\sqrt{2}\,x+1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}\,x-1\right)\Big) + Cste$$

- ***Un calcul d'intégrale définie***

  $$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}-1\right)\Big)$$

  soit après quelques simplifications... $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5} + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Primitives et équations différentielles

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_primitives_equations_differentielles.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Fractions rationnelles avec Maple

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_fractions_rationnelles/fractions_rationnelles.html

Notions à retenir

- Techniques de calculs de primitives
  - ⋆ Intégration par parties
  - ⋆ Changement de variable
- Calcul des primitives des fractions rationnelles (décomposition en éléments simples)
  - ⋆ Connaître la forme théorique de la DEL
  - ⋆ Savoir calculer la partie entière
  - ⋆ Savoir calculer les éléments simples de première et deuxième espèces relatifs à des pôles simples
  - ⋆ Savoir utiliser des propriétés de symétrie pour déterminer des éléments simples relatifs à des pôles multiples
  - ⋆ Connaître les primitives des éléments simples de première espèce, et celles des éléments simples de deuxième espèce relatives à des pôles simples