

# Équations différentielles linéaires du premier ordre

*Aimé Lachal*

**Cours de mathématiques**  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

## Problème

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution des **équations différentielles linéaires du premier ordre** d'inconnue  $u$  qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$(E) : \quad \forall t \in I, \quad u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

où  $a$  et  $b$  désignent des **fonctions continues** sur un intervalle  $I$  donné à valeurs réelles.

- 1 En fait, il s'agira de résoudre des équations un peu plus générales, de la forme  $\alpha(t)u'(t) + \beta(t)u(t) = \gamma(t)$ , mais pour le faire on se ramènera toujours à une équation de type (E) quitte à diviser par  $\alpha(t)$  sur un intervalle où  $\alpha(t)$  ne s'annule pas.
- 2 **Résoudre** l'équation (E), c'est trouver **toutes** les fonctions  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  **dérivables** et vérifiant (E). Une telle fonction est alors appelée **une solution** de (E) sur  $I$ .
- 3 Lorsque  $b = 0$ , on dit que l'équation est **sans second membre** et l'équation  $u'(t) + a(t)u(t) = 0$  est appelée **équation homogène associée à (E)**.

### Proposition 1 (Solutions de l'équation homogène)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **continue** sur  $I$ .

Les solutions sur  $I$  de l'équation  $u'(t) + a(t)u(t) = 0$  sont les fonctions de la forme

$$u_H : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où  $A$  est une **primitive** de  $a$  sur  $I$ .

### Proposition 2 (Solution particulière par « variation de la constante »)

Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions **continues** sur un intervalle  $I$  à valeurs réelles.

Une solution **particulière** de l'équation  $u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$  sur  $I$  est la fonction

$$u_p : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$$

où  $A$  est une **primitive** de  $a$  sur  $I$  et  $C$  est une **primitive** sur  $I$  de la fonction  $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ .

### Proposition 3 (Solution générale)

Les solutions sur  $I$  de l'équation (E) :  $u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$  sont les fonctions  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme  $u = u_H + u_p$  où  $u_H$  est une solution quelconque de l'équation homogène associée à (E) et  $u_p$  est une solution particulière de (E).

Plus précisément, en notant  $A$  une primitive de  $a$  et  $C$  une primitive de  $be^A$  sur  $I$  :

$$\forall t \in I, \quad u(t) = \lambda e^{-A(t)} + C(t)e^{-A(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le principe de superposition vu dans le cas des équations différentielles **linéaires** à coefficients constants reste valable :

#### Proposition 4 (Principe de superposition)

Soit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  et  $a, b_1, b_2$  trois fonctions continues sur un intervalle  $I$  à valeurs réelles.

- soit  $u_1$  une solution sur  $I$  de l'équation  $u' + au = b_1$  ;
- soit  $u_2$  une solution sur  $I$  de l'équation  $u' + au = b_2$  ;

alors  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  est une solution sur  $I$  de l'équation  $u' + au = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ .

De même pour le problème de Cauchy :

#### Théorème 5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (facultatif))

Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  et  $t_0 \in I$  et  $u_0 \in \mathbb{R}$  fixés. Il existe une **unique solution** sur  $I$  pour l'équation différentielle avec condition initiale (problème de Cauchy) :

$$\begin{cases} \forall t \in I, u'(t) + a(t)u(t) = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

De plus cette solution est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Elle est explicitement donnée par

$$\forall t \in I, \quad u(t) = u_0 e^{-A(t)} + \left( \int_{t_0}^t b(s) e^{A(s)} ds \right) e^{-A(t)}.$$

## Protocole de résolution

En résumé, voici le protocole de résolution d'une équation de la forme :

$$(E) : \alpha(t)u'(t) + \beta(t)u(t) = \gamma(t)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont des fonctions sur  $\mathbb{R}$ .

- 1 On fait le choix d'un **intervalle**  $I$  sur lequel la fonction  $\alpha$  **ne s'annule pas** de sorte que (E) soit équivalente à une équation ( $\tilde{E}$ ) de la forme  $u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$  où  $a$  et  $b$  sont des fonctions **continues** sur  $I$ .  
On dit que ( $\tilde{E}$ ) est la forme **normalisée** de l'équation (E).
- 2 On écrit les solutions de l'équation homogène associée à ( $\tilde{E}$ ) (pour cela, il faut pouvoir calculer une primitive de la fonction  $a$  sur  $I$ ).
- 3 On détermine une solution particulière sur  $I$  de ( $\tilde{E}$ ), par exemple par la méthode de variation de la constante.
- 4 La solution particulière ajoutée à n'importe quelle solution de l'équation homogène permet d'obtenir toutes les solutions de ( $\tilde{E}$ ) sur  $I$  et donc de (E).

## Exemple 6

Considérons l'équation différentielle

$$tu'(t) + u(t) = te^t. \quad (\text{E})$$

① On **normalise** l'équation selon

$$u'(t) + \frac{1}{t}u(t) = e^t. \quad (\tilde{\text{E}})$$

On résout  $(\tilde{\text{E}})$  sur les intervalles  $I_1 = ]-\infty, 0[$  et  $I_2 = ]0, +\infty[$ , soit encore sur  $\mathbb{R}^*$ .

② Une primitive de la fonction  $a : t \mapsto \frac{1}{t}$  est donnée par  $A : t \mapsto \ln|t|$ , donc l'**équation homogène associée**  $u'_H(t) + \frac{1}{t}u_H(t) = 0$  admet pour solution générale sur  $\mathbb{R}^*$  :

$$u_H(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{t} & \text{si } t \in I_1 \\ \frac{\lambda_2}{t} & \text{si } t \in I_2 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

③ Une **solution particulière** de (E) est de la forme  $u_P = \frac{C(t)}{t}$  où  $C$  est une fonction vérifiant  $C'(t) = te^t$ , ce qui donne  $C(t) = (t-1)e^t$ . D'où

$$u_P(t) = \frac{(t-1)e^t}{t}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

④ La **solution générale** de (E) sur  $\mathbb{R}^*$  s'écrit finalement :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)e^t + \lambda_1}{t} & \text{si } t \in I_1 \\ \frac{(t-1)e^t + \lambda_2}{t} & \text{si } t \in I_2 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

## Exemple 6

Considérons l'équation différentielle

$$tu'(t) + u(t) = te^t. \quad (\text{E})$$

5 Cherchons s'il existe une (ou plusieurs) solution de (E) définie sur  $\mathbb{R}$  **tout entier**.

- Une telle solution est nécessairement de la forme, sur  $\mathbb{R}^*$  :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)e^t + \lambda_1}{t} & \text{si } t \in I_1 \\ \frac{(t-1)e^t + \lambda_2}{t} & \text{si } t \in I_2 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- La fonction  $u$  doit être **dérivable en 0** et vérifier (E) en 0. Elle doit donc être au moins **continue en 0**, i.e. les limites  $\ell_1 = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t}((t-1)e^t + \lambda_1)$  et  $\ell_2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}((t-1)e^t + \lambda_2)$  doivent exister et coïncider, ce qui impose que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , auquel cas  $\ell_1 = \ell_2 = 0$ .  
D'où la fonction candidate :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)e^t + 1}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

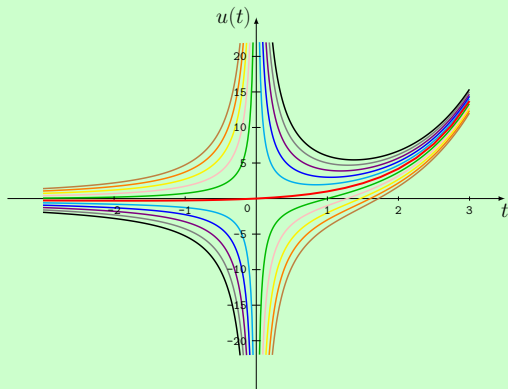
- À l'aide du DL  $(t-1)e^t + 1 = \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ , on trouve  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t-1)e^t + 1}{t^2} = \frac{1}{2}$  ce qui montre que  $u$  est **dérivable en 0** et  $u'(0) = \frac{1}{2}$ .
- Enfin (E) est clairement **vérifiée** pour  $t = 0$ . La fonction  $u$  ci-dessus est l'**unique** solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

## Exemple 6

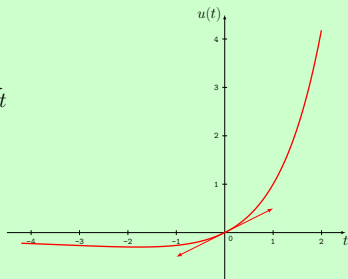
Considérons l'équation différentielle

$$tu'(t) + u(t) = te^t. \quad (E)$$

⑥ « Flot » de l'équation



Quelques courbes pour  $\lambda \in \{-4, -3, \dots, 6\}$



Courbe solution sur  $\mathbb{R}$



## Exemple 7 (Équations non linéaires (facultatif))

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) = u(t)^2. \quad (E)$$

- Notons tout d'abord que la fonction nulle est une solution de (E).
- En se plaçant à présent sur un intervalle sur lequel  $u$  ne s'annule pas, (E) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u} \right) (t) = -1$$

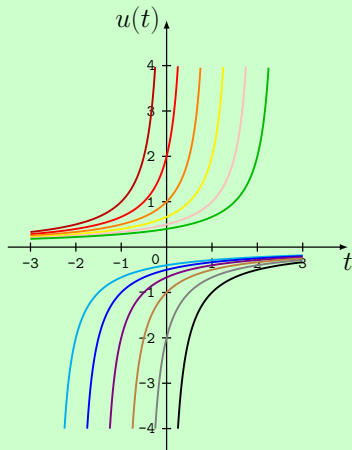
donc  $\frac{1}{u(t)} = -t + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , puis

$$u(t) = \frac{1}{\lambda - t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les intervalles de définition de  $u$  sont  $]-\infty, \lambda[$  et  $]\lambda, +\infty[$ .

**Remarques.** Notons que ces intervalles dépendent de  $\lambda$  contrairement au cas linéaire.

De plus la fonction nulle ne fait pas partie de la famille de solutions précédente, on dit que c'est une solution **singulière**.



Quelques courbes pour  $\lambda \in \left\{ -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, \dots, 2, \frac{5}{2} \right\}$

## Exemple 8 (Équations non linéaires (facultatif))

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}. \quad (E')$$

- Notons tout d'abord que la fonction nulle est une solution de  $(E')$ .
- Plaçons-nous à présent sur un intervalle  $I$  sur lequel  $u$  ne s'annule pas. Une solution de  $(E')$  sur  $I$  est nécessairement strictement positive.  $(E')$  s'écrit

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{u})(t) = \frac{1}{2}$$

donc  $\sqrt{u(t)} = \frac{1}{2}(t - \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , puis

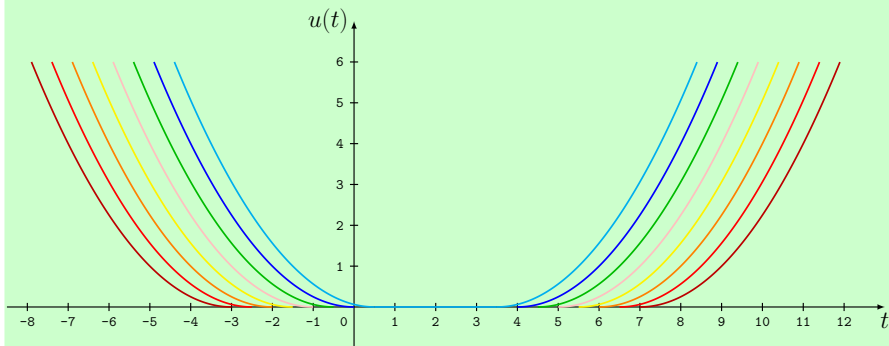
$$u(t) = \frac{1}{4}(t - \lambda)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Les intervalles de non-annulation de  $u$  sont  $]-\infty, \lambda[$  et  $]\lambda, +\infty[$ .

## Exemple 8 (Équations non linéaires (facultatif))

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}. \quad (E')$$



Quelques courbes pour  $\lambda \in \{-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, \dots, 0, \frac{1}{2}\}$   
et  $\lambda \in \{\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, \dots, \frac{13}{2}, 7\}$

## Exemple 8 (Équations non linéaires (facultatif))

Considérons l'équation différentielle

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}. \quad (E')$$

### Remarques.

- Notons que ces intervalles dépendent de  $\lambda$  contrairement au cas linéaire.
- De plus la fonction nulle ne fait pas partie de la famille de solutions précédente, on dit que c'est une solution **singulière**.
- Enfin, les solutions de (E') définies sur  $\mathbb{R}$  s'écrivent

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t - \lambda)^2 & \text{si } t \in ]-\infty, \lambda[ \\ 0 & \text{si } t \in ]\lambda, \mu[ \\ \frac{1}{4}(t - \mu)^2 & \text{si } t \in ]\mu, +\infty[ \end{cases}$$

Pour chaque  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il y a une infinité de solutions telles que  $u(t_0) = 0$ .  
Le problème de Cauchy correspondant admet donc un infinité de solutions  
contrairement au cas linéaire.

**INSA** INSTITUT NATIONAL  
DES SCIENCES  
APPLIQUÉES  
LYON

## Équations différentielles linéaires avec Maple

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/  
diaporama\\_equations\\_differentielles/equations\\_differentielles0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_equations_differentielles/equations_differentielles0.html)

**INSA** INSTITUT NATIONAL  
DES SCIENCES  
APPLIQUÉES  
LYON

## Primitives et équations différentielles

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/  
diaporama\\_primitives\\_equations\\_differentielles.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_primitives_equations_differentielles.pdf)

## Notions à retenir

- Techniques de résolution
  - ★ Équation homogène associée
  - ★ Recherche de solutions particulières à l'aide de la méthode de la variation de la constante
  - ★ Principes de superposition
  - ★ Résolution de problème de Cauchy
  - ★ Raccord de solutions pour des équations définies sur des intervalles contigus