

# Espaces vectoriels

*Aimé Lachal*

**Cours de mathématiques**  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

- 1 Structure d'espace vectoriel
  - Définition et exemples
  - Quelques propriétés immédiates
  - Exemples fondamentaux
- 2 Sous-espaces vectoriels
  - Définition et caractérisation
  - Sous-espace vectoriel engendré par une partie
  - Somme de sous-espaces vectoriels
  - Sous-espaces supplémentaires
- 3 Dimension d'un espace vectoriel
  - Familles libres, liées, génératrices, bases
  - Dimension finie
  - Sous-espace vectoriel en dimension finie
  - Supplémentarité en dimension finie
  - Rang d'une famille de vecteurs

- 1 Structure d'espace vectoriel
  - Définition et exemples
  - Quelques propriétés immédiates
  - Exemples fondamentaux
- 2 Sous-espaces vectoriels
- 3 Dimension d'un espace vectoriel

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

①  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (loi **+** associative)

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

- 1  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (loi + **associative**)
- 2  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (loi + **commutative**)

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

- 1  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (loi + **associative**)
- 2  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (loi + **commutative**)
- 3  $\exists \vec{0} \in E, \forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (existence d'un **élément neutre** pour la loi + appelé **vecteur nul**)

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

- 1  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (loi **+ associative**)
- 2  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (loi **+ commutative**)
- 3  $\exists \vec{0} \in E, \forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (existence d'un **élément neutre** pour la loi **+** appelé **vecteur nul**)
- 4  $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$  (existence d'un **symétrique**, noté  $-\vec{u}$ , pour tout élément  $\vec{u}$  de  $E$ )

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

- 1  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (loi **+ associative**)
- 2  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (loi **+ commutative**)
- 3  $\exists \vec{0} \in E, \forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (existence d'un **élément neutre** pour la loi **+** appelé **vecteur nul**)
- 4  $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$  (existence d'un **symétrique**, noté  $-\vec{u}$ , pour tout élément  $\vec{u}$  de  $E$ )
- 5  $\forall \vec{u} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

- 1  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (loi + **associative**)
- 2  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (loi + **commutative**)
- 3  $\exists \vec{0} \in E, \forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (existence d'un **élément neutre** pour la loi + appelé **vecteur nul**)
- 4  $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$  (existence d'un **symétrique**, noté  $-\vec{u}$ , pour tout élément  $\vec{u}$  de  $E$ )
- 5  $\forall \vec{u} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- 6  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

- 1  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (loi + **associative**)
- 2  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (loi + **commutative**)
- 3  $\exists \vec{0} \in E, \forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (existence d'un **élément neutre** pour la loi + appelé **vecteur nul**)
- 4  $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$  (existence d'un **symétrique**, noté  $-\vec{u}$ , pour tout élément  $\vec{u}$  de  $E$ )
- 5  $\forall \vec{u} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- 6  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
- 7  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne**  $+$  et d'une **loi externe**  $\cdot$  telles que :

- 1  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$  (loi **associative**)
- 2  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (loi **commutative**)
- 3  $\exists \vec{0} \in E, \forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (existence d'un **élément neutre** pour la loi  $+$  appelé **vecteur nul**)
- 4  $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$  (existence d'un **symétrique**, noté  $-\vec{u}$ , pour tout élément  $\vec{u}$  de  $E$ )
- 5  $\forall \vec{u} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- 6  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$
- 7  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
- 8  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

Les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs** et ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés des **scalaires**. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de  $E$  sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois  $+$  et  $\cdot$  sont évidentes, on ne les précise pas.

On écrit, par exemple, « le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  » au lieu de  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

Les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs** et ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés des **scalaires**. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de  $E$  sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois  $+$  et  $\cdot$  sont évidentes, on ne les précise pas.

On écrit, par exemple, « le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  » au lieu de  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

### Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

Les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs** et ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés des **scalaires**. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de  $E$  sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois  $+$  et  $\cdot$  sont évidentes, on ne les précise pas.

On écrit, par exemple, « le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  » au lieu de  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

### Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

$$\textcircled{1} \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{u} = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot \vec{u}$$

$$\text{En particulier : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \vec{u} \in E, \underbrace{\vec{u} + \dots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n \vec{u}$$

Les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs** et ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés des **scalaires**. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de  $E$  sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois  $+$  et  $\cdot$  sont évidentes, on ne les précise pas.

On écrit, par exemple, « le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  » au lieu de  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

### Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

$$\textcircled{1} \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{u} = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot \vec{u}$$

$$\text{En particulier : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \vec{u} \in E, \underbrace{\vec{u} + \dots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n \vec{u}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \lambda \cdot \vec{u}_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \vec{u}_i$$

Les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs** et ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés des **scalaires**. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de  $E$  sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois  $+$  et  $\cdot$  sont évidentes, on ne les précise pas.

On écrit, par exemple, « le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  » au lieu de  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

### Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

$$\textcircled{1} \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{u} = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot \vec{u}$$

En particulier :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \vec{u} \in E, \underbrace{\vec{u} + \dots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n \vec{u}$

$$\textcircled{2} \quad \forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \lambda \cdot \vec{u}_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \vec{u}_i$$

$$\textcircled{3} \quad \forall \vec{u} \in E, 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs** et ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés des **scalaires**. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de  $E$  sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois  $+$  et  $\cdot$  sont évidentes, on ne les précise pas.

On écrit, par exemple, « le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  » au lieu de  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

### Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

$$\textcircled{1} \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{u} = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot \vec{u}$$

En particulier :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \vec{u} \in E, \underbrace{\vec{u} + \dots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n \vec{u}$

$$\textcircled{2} \quad \forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \lambda \cdot \vec{u}_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \vec{u}_i$$

$$\textcircled{3} \quad \forall \vec{u} \in E, 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$\textcircled{4} \quad \forall \vec{u} \in E, (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$$

Les éléments de  $E$  sont appelés des **vecteurs** et ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés des **scalaires**. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de  $E$  sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois  $+$  et  $\cdot$  sont évidentes, on ne les précise pas.

On écrit, par exemple, « le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  » au lieu de  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

### Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

$$\textcircled{1} \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{u} = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot \vec{u}$$

En particulier :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \vec{u} \in E, \underbrace{\vec{u} + \dots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n \vec{u}$

$$\textcircled{2} \quad \forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \lambda \cdot \vec{u}_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \vec{u}_i$$

$$\textcircled{3} \quad \forall \vec{u} \in E, 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$\textcircled{4} \quad \forall \vec{u} \in E, (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$$

$$\textcircled{5} \quad \forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot \vec{u} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

**Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)**

- ① Définissons sur l'ensemble  $\mathbb{K}^n$  les deux opérations  $+$  et  $\cdot$  par  
 $\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K},$

$$\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

Alors  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.

**Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)**

- ① Définissons sur l'ensemble  $\mathbb{K}^n$  les deux opérations  $+$  et  $\cdot$  par  
 $\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K},$

$$\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

Alors  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.

- ② L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  muni des opérations  $+$  et  $\cdot$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.

**Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)**

- ① Définissons sur l'ensemble  $\mathbb{K}^n$  les deux opérations  $+$  et  $\cdot$  par  
 $\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K},$

$$\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

Alors  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.

- ② L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  muni des opérations  $+$  et  $\cdot$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.
- ③ Définissons sur l'ensemble  $\mathcal{A}(E, \mathbb{K})$  des applications définies sur un ensemble  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  les opérations  $+$  et  $\cdot$  par  
 $\forall (f, g) \in \mathcal{A}(E, \mathbb{K})^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},$

$$\forall x \in E, \quad \begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

Alors  $(\mathcal{A}(E, \mathbb{K}), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.

- 1 Structure d'espace vectoriel
- 2 Sous-espaces vectoriels
  - Définition et caractérisation
  - Sous-espace vectoriel engendré par une partie
  - Somme de sous-espaces vectoriels
  - Sous-espaces supplémentaires
- 3 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)**

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $F$  une partie de  $E$ .

On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  (s.e.v. en abrégé) si  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.

### Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $F$  une partie de  $E$ .

On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  (s.e.v. en abrégé) si  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.

En général, on démontre qu'un ensemble est un  $\mathbb{K}$ -e.v. en établissant que c'est un s.e.v. d'un  $\mathbb{K}$ -e.v. connu :

### Proposition 2.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $F$  une partie de  $E$ .

$$F \text{ est un s.e.v de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \text{ (un s.e.v contient toujours le vecteur } \vec{0}\text{)} \\ \text{et} \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in F \\ \text{(} F \text{ est } \mathbf{stable\ par\ combinaison\ linéaire}\text{)} \end{cases}$$

Par la suite, on notera la combinaison linéaire  $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$  plus simplement  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ .

### Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $F$  une partie de  $E$ .

On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  (s.e.v. en abrégé) si  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.

En général, on démontre qu'un ensemble est un  $\mathbb{K}$ -e.v. en établissant que c'est un s.e.v. d'un  $\mathbb{K}$ -e.v. connu :

### Proposition 2.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $F$  une partie de  $E$ .

$$F \text{ est un s.e.v de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \text{ (un s.e.v contient toujours le vecteur } \vec{0}) \\ \text{et} \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in F \\ (F \text{ est } \mathbf{stable par combinaison linéaire}) \end{cases}$$

Par la suite, on notera la combinaison linéaire  $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$  plus simplement  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ .

### Proposition 2.3 (Intersection de deux s.e.v)

L'**intersection** de deux s.e.v est encore un s.e.v. C'est faux pour la réunion.

**Exemple 2.4**

- ① Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$ , l'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  est un s.e.v.

## Exemple 2.4

- 1 Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$ , l'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  est un s.e.v.
- 2 L'ensemble des solutions d'un système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pj}x_j + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

est un s.e.v. de  $\mathbb{K}^n$ .

## Exemple 2.4

- 1 Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$ , l'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  est un s.e.v.
- 2 L'ensemble des solutions d'un système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pj}x_j + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

est un s.e.v. de  $\mathbb{K}^n$ .

- 3 Dans le  $\mathbb{R}$ -e.v. des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , les sous-ensembles des fonctions paires, impaires, continues, dérivables, de classe  $\mathcal{C}^p$  sont des s.e.v.

## Exemple 2.4

- 1 Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$ , l'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  est un s.e.v.
- 2 L'ensemble des solutions d'un système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pj}x_j + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

est un s.e.v. de  $\mathbb{K}^n$ .

- 3 Dans le  $\mathbb{R}$ -e.v. des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , les sous-ensembles des fonctions paires, impaires, continues, dérivables, de classe  $\mathcal{C}^p$  sont des s.e.v.
- 4 Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$ , l'ensemble  $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(\alpha) = 0\}$  est un s.e.v.

## Exemple 2.4

- 1 Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$ , l'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  est un s.e.v.
- 2 L'ensemble des solutions d'un système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pj}x_j + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

est un s.e.v. de  $\mathbb{K}^n$ .

- 3 Dans le  $\mathbb{R}$ -e.v. des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , les sous-ensembles des fonctions paires, impaires, continues, dérivables, de classe  $\mathcal{C}^p$  sont des s.e.v.
- 4 Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$ , l'ensemble  $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(\alpha) = 0\}$  est un s.e.v.
- 5 Soit  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Dans le  $\mathbb{C}$ -e.v. des applications dérivables de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ , les ensembles des solutions des équations différentielles  $u'(t) + au(t) = 0$  et  $u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0$ ,  $t \in I$ , sont des s.e.v.

**Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)**

Soit  $(E, +, \cdot)$  un e.v. et  $A$  une partie non vide de  $E$ .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par  $A$** , noté  $\text{Vect}(A)$ , le plus petit s.e.v. de  $E$  contenant  $A$ .

Par convention, on pose  $\text{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$ .

**Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)**

Soit  $(E, +, \cdot)$  un e.v. et  $A$  une partie non vide de  $E$ .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par  $A$** , noté  $\text{Vect}(A)$ , le plus petit s.e.v. de  $E$  contenant  $A$ .

Par convention, on pose  $\text{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$ .

**Proposition 2.6 (Ensemble de combinaisons linéaires)**

Soit  $A$  une partie non vide d'un e.v  $E$ .

$\text{Vect}(A)$  est le s.e.v. de  $E$  constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de  $A$ .

En particulier, si  $A$  est une famille finie de vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , alors :

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n\}$$

**Proposition 2.7**

*Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .*

**Proposition 2.7**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

- 1 Le s.e.v  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.

**Proposition 2.7**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

- 1 Le s.e.v  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.
- 2  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$

**Proposition 2.7**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

- 1 Le s.e.v  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.
- 2  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$
- 3  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$

**Proposition 2.7**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

① Le s.e.v  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.

②  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$

③  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$

④  $\forall (\lambda_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^p$  avec  $\lambda_i \neq 0$ ,

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$$

**Proposition 2.7**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

① Le s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.

②  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$

③  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$

④  $\forall (\lambda_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^p$  avec  $\lambda_i \neq 0$ ,

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$$

**Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)**

① Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

Le s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{u}) = \{\lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{K}\}$ , noté aussi  $\mathbb{K}\vec{u}$ , est une **droite vectorielle**.

### Proposition 2.7

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

❶ Le s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.

❷  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$

❸  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$

❹  $\forall (\lambda_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^p$  avec  $\lambda_i \neq 0$ ,

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$$

### Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)

❶ Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

Le s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{u}) = \{\lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{K}\}$ , noté aussi  $\mathbb{K}\vec{u}$ , est une **droite vectorielle**.

❷ Soit  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  deux vecteurs non colinéaires d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  (i.e.  $\vec{w}$  ne coïncide avec aucun  $\lambda \vec{v}$  et  $\vec{v}$  ne coïncide avec aucun  $\mu \vec{w}$ ).

Le s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}, \vec{w}) = \{\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$  est un **plan vectoriel**.

### Proposition 2.7

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

① Le s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.

②  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$

③  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$

④  $\forall (\lambda_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^p$  avec  $\lambda_i \neq 0$ ,

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)$$

### Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)

① Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

Le s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{u}) = \{\lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{K}\}$ , noté aussi  $\mathbb{K}\vec{u}$ , est une **droite vectorielle**.

② Soit  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  deux vecteurs non colinéaires d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  (i.e.  $\vec{w}$  ne coïncide avec aucun  $\lambda \vec{v}$  et  $\vec{v}$  ne coïncide avec aucun  $\mu \vec{w}$ ).

Le s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}, \vec{w}) = \{\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$  est un **plan vectoriel**.

③ L'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  est une **droite vectorielle** dans le  $\mathbb{R}$ -e.v. des complexes  $\mathbb{C}$ .

**Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

- ① On appelle **somme** de  $F$  et  $G$ , l'ensemble noté  $F + G$  défini par

$$F + G = \{\vec{w} \in E : \exists \vec{u} \in F, \exists \vec{v} \in G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\} = \{\vec{u} + \vec{v}, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G\}.$$

**Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

- ① On appelle **somme** de  $F$  et  $G$ , l'ensemble noté  $F + G$  défini par

$$F + G = \{\vec{w} \in E : \exists \vec{u} \in F, \exists \vec{v} \in G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\} = \{\vec{u} + \vec{v}, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G\}.$$

- ② On dit que la somme  $F + G$  est **directe** et on la note  $F \oplus G$  lorsque la décomposition de tout vecteur  $\vec{w}$  de  $F + G$  en  $\vec{u} + \vec{v}$  avec  $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$  est **unique**.

**Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

- ① On appelle **somme** de  $F$  et  $G$ , l'ensemble noté  $F + G$  défini par

$$F + G = \{\vec{w} \in E : \exists \vec{u} \in F, \exists \vec{v} \in G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\} = \{\vec{u} + \vec{v}, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G\}.$$

- ② On dit que la somme  $F + G$  est **directe** et on la note  $F \oplus G$  lorsque la décomposition de tout vecteur  $\vec{w}$  de  $F + G$  en  $\vec{u} + \vec{v}$  avec  $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$  est **unique**.

**Proposition 2.10 (Somme et réunion)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

- ① La somme  $F + G$  est un s.e.v. de  $E$  contenant  $F$  et  $G$  et c'est le plus petit s.e.v de  $E$  contenant  $F \cup G$ , autrement dit :  $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$ .

**Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

- ① On appelle **somme** de  $F$  et  $G$ , l'ensemble noté  $F + G$  défini par

$$F + G = \{\vec{w} \in E : \exists \vec{u} \in F, \exists \vec{v} \in G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\} = \{\vec{u} + \vec{v}, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G\}.$$

- ② On dit que la somme  $F + G$  est **directe** et on la note  $F \oplus G$  lorsque la décomposition de tout vecteur  $\vec{w}$  de  $F + G$  en  $\vec{u} + \vec{v}$  avec  $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$  est **unique**.

**Proposition 2.10 (Somme et réunion)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

- ① La somme  $F + G$  est un s.e.v. de  $E$  contenant  $F$  et  $G$  et c'est le plus petit s.e.v de  $E$  contenant  $F \cup G$ , autrement dit :  $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$ .
- ② La somme  $F + G$  est **directe** ssi  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .

**Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  lorsque :

$$\begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}\} \\ \text{et} \\ F + G = E \end{cases}$$

On note alors  $E = F \oplus G$  et on dit que  $E$  est la **somme directe** de  $F$  et de  $G$ .

**Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  lorsque :

$$\begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}\} \\ \text{et} \\ F + G = E \end{cases}$$

On note alors  $E = F \oplus G$  et on dit que  $E$  est la **somme directe** de  $F$  et de  $G$ .

**Théorème 2.12 (Caractérisation)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ . On a

$$E = F \oplus G \iff \forall \vec{w} \in E, \exists! (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Ainsi,  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  ssi tout vecteur de  $E$  peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ .

**Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  lorsque :

$$\begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}\} \\ \text{et} \\ F + G = E \end{cases}$$

On note alors  $E = F \oplus G$  et on dit que  $E$  est la **somme directe** de  $F$  et de  $G$ .

**Théorème 2.12 (Caractérisation)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un e.v.  $E$ . On a

$$E = F \oplus G \iff \forall \vec{w} \in E, \exists! (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Ainsi,  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  ssi tout vecteur de  $E$  peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ .

**Exemple 2.13 (Fonctions paires/impaires)**

Les s.e.v. des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans  $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ .

- 1 Structure d'espace vectoriel
- 2 Sous-espaces vectoriels
- 3 Dimension d'un espace vectoriel
  - Familles libres, liées, génératrices, bases
  - Dimension finie
  - Sous-espace vectoriel en dimension finie
  - Supplémentarité en dimension finie
  - Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 3.1 (Indépendance linéaire)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

- ❶ On dit qu'une famille de  $p$  vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  de  $E$  est **libre** lorsque :
- $$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,$$

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$  sont **linéairement indépendants**.

**Définition 3.1 (Indépendance linéaire)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

- ❶ On dit qu'une famille de  $p$  vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  de  $E$  est **libre** lorsque :
- $$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,$$

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$  sont **linéairement indépendants**.

- ❷ On dit que la famille  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est **liée** lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \text{ tel que } \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0}.$$

On dit aussi que les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$  sont **linéairement dépendants**.

**Définition 3.1 (Indépendance linéaire)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

- ① On dit qu'une famille de  $p$  vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  de  $E$  est **libre** lorsque :
- $$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,$$

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$  sont **linéairement indépendants**.

- ② On dit que la famille  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est **liée** lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \text{ tel que } \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0}.$$

On dit aussi que les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$  sont **linéairement dépendants**.

**Exemple 3.2 (Vecteurs colinéaires, coplanaires)**

- ① Deux vecteurs formant une famille **liée** sont dits **colinéaires**.
- ② Trois vecteurs formant une famille **liée** sont dits **coplanaires**.

**Proposition 3.3 (Propriétés immédiates)**

**Proposition 3.3 (Propriétés immédiates)**

- 1 Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.

**Proposition 3.3 (Propriétés immédiates)**

- 1 Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.
- 2 Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée**.

**Proposition 3.3 (Propriétés immédiates)**

- 1 Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.
- 2 Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée**.
- 3 Toute famille extraite d'une famille **libre** est **libre**.

**Proposition 3.3 (Propriétés immédiates)**

- 1 Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.
- 2 Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée**.
- 3 Toute famille extraite d'une famille **libre** est **libre**.
- 4 Toute famille contenant une famille **liée** est **liée**.

### Proposition 3.3 (Propriétés immédiates)

- 1 Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.
- 2 Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée**.
- 3 Toute famille extraite d'une famille **libre** est **libre**.
- 4 Toute famille contenant une famille **liée** est **liée**.

### Proposition 3.4 (Extension d'une famille libre)

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille **libre** de vecteurs d'un e.v.  $E$ .  
Soit  $\vec{v} \in E$ . Alors :

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}) \text{ est libre} \iff \vec{v} \notin \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p).$$

Autrement dit, on peut augmenter la taille d'une famille libre de vecteurs en lui ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ces vecteurs.

**Définition 3.5 (Familles génératrices, bases)**

- ① Une famille de vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  d'un e.v.  $E$  est dite **génératrice** si tout vecteur de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ .

**Définition 3.5 (Familles génératrices, bases)**

- 1 Une famille de vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  d'un e.v.  $E$  est dite **génératrice** si tout vecteur de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ .
- 2 Une famille **libre** et **génératrice** de  $E$  est appelée une **base** de  $E$ .

### Définition 3.5 (Familles génératrices, bases)

- 1 Une famille de vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  d'un e.v.  $E$  est dite **génératrice** si tout vecteur de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ .
- 2 Une famille **libre** et **génératrice** de  $E$  est appelée une **base** de  $E$ .

### Proposition 3.6 (Coordonnées)

La famille  $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  est une **base** d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  ssi tout vecteur de  $E$  s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ .

Pour tout vecteur  $\vec{v} \in E$ , il existe donc un **unique**  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$ .

Les scalaires  $x_1, \dots, x_n$  de cette décomposition sont appelés les **coordonnées** de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Définition 3.5 (Familles génératrices, bases)

- 1 Une famille de vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  d'un e.v.  $E$  est dite **génératrice** si tout vecteur de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ .
- 2 Une famille **libre** et **génératrice** de  $E$  est appelée une **base** de  $E$ .

### Proposition 3.6 (Coordonnées)

La famille  $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  est une **base** d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  ssi tout vecteur de  $E$  s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ .

Pour tout vecteur  $\vec{v} \in E$ , il existe donc un **unique**  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$ .

Les scalaires  $x_1, \dots, x_n$  de cette décomposition sont appelés les **coordonnées** de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Exemple 3.7 (Base canonique)

Dans le  $\mathbb{R}$ -e.v.  $\mathbb{R}^n$ , la famille de vecteurs  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  où  $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (le 1 étant à la  $i$ -ème position), est une base de  $\mathbb{R}^n$  appelée **base canonique de  $\mathbb{R}^n$** .

**Définition 3.8 (E.v. de dimension finie)**

On dit qu'un e.v.  $E$  est de **dimension finie** s'il existe une famille **finie** de vecteurs génératrice de  $E$ . Dans le cas contraire, on dit que  $E$  est de **dimension infinie** et l'on note par convention  $\dim E = +\infty$ .

**Définition 3.8 (E.v. de dimension finie)**

On dit qu'un e.v.  $E$  est de **dimension finie** s'il existe une famille **finie** de vecteurs génératrice de  $E$ . Dans le cas contraire, on dit que  $E$  est de **dimension infinie** et l'on note par convention  $\dim E = +\infty$ .

**Théorème 3.9 (dit de la base incomplète)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**. Si  $\mathcal{L}$  est une famille **libre** de  $E$  et  $\mathcal{G}$  une famille **génératrice** de  $E$ , alors on peut former une **base** de  $E$  en complétant  $\mathcal{L}$  par des vecteurs bien choisis de  $\mathcal{G}$ .

**Définition 3.8 (E.v. de dimension finie)**

On dit qu'un e.v.  $E$  est de **dimension finie** s'il existe une famille **finie** de vecteurs génératrice de  $E$ . Dans le cas contraire, on dit que  $E$  est de **dimension infinie** et l'on note par convention  $\dim E = +\infty$ .

**Théorème 3.9 (dit de la base incomplète)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**. Si  $\mathcal{L}$  est une famille **libre** de  $E$  et  $\mathcal{G}$  une famille **génératrice** de  $E$ , alors on peut former une **base** de  $E$  en complétant  $\mathcal{L}$  par des vecteurs bien choisis de  $\mathcal{G}$ .

**Corollaire 3.10**

Dans un e.v. de **dimension finie** :

- ① toute famille **libre** peut être complétée en une **base** ;
- ② de toute famille **génératrice**, on peut extraire une **base**.

**Corollaire 3.11 (Existence de bases)**

*Tout e.v. de **dimension finie** admet une base (**finie**).*

**Corollaire 3.11 (Existence de bases)**

Tout e.v. de **dimension finie** admet une base (**finie**).

**Théorème-définition 3.12 (Dimension)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

- 1 Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments  $n$  appelé la **dimension de  $E$** . Ce nombre est noté  $\dim E$ .

**Corollaire 3.11 (Existence de bases)**

Tout e.v. de **dimension finie** admet une base (**finie**).

**Théorème-définition 3.12 (Dimension)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

- 1 Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments  $n$  appelé la **dimension de  $E$** . Ce nombre est noté  $\dim E$ .
- 2 Toute famille libre de  $E$  contient **au plus**  $n$  éléments.

**Corollaire 3.11 (Existence de bases)**

Tout e.v. de **dimension finie** admet une base (**finie**).

**Théorème-définition 3.12 (Dimension)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

- 1 Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments  $n$  appelé la **dimension de  $E$** . Ce nombre est noté  $\dim E$ .
- 2 Toute famille libre de  $E$  contient **au plus**  $n$  éléments.
- 3 Toute famille génératrice de  $E$  contient **au moins**  $n$  éléments.

**Corollaire 3.11 (Existence de bases)**

Tout e.v. de **dimension finie** admet une base (**finie**).

**Théorème-définition 3.12 (Dimension)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

- 1 Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments  $n$  appelé la **dimension de  $E$** . Ce nombre est noté  $\dim E$ .
- 2 Toute famille libre de  $E$  contient **au plus**  $n$  éléments.
- 3 Toute famille génératrice de  $E$  contient **au moins**  $n$  éléments.
- 4 Toute famille **libre** de  $n$  éléments de  $E$  est une **base**.

**Corollaire 3.11 (Existence de bases)**

Tout e.v. de **dimension finie** admet une base (**finie**).

**Théorème-définition 3.12 (Dimension)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

- 1 Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments  $n$  appelé la **dimension de  $E$** . Ce nombre est noté  $\dim E$ .
- 2 Toute famille libre de  $E$  contient **au plus**  $n$  éléments.
- 3 Toute famille génératrice de  $E$  contient **au moins**  $n$  éléments.
- 4 Toute famille **libre** de  $n$  éléments de  $E$  est une **base**.
- 5 Toute famille **génératrice** de  $n$  éléments de  $E$  est une **base**.

Par convention, on pose  $\dim \{\vec{0}\} = 0$ .

**Corollaire 3.11 (Existence de bases)**

Tout e.v. de **dimension finie** admet une base (**finie**).

**Théorème-définition 3.12 (Dimension)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

- 1 Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments  $n$  appelé la **dimension de  $E$** . Ce nombre est noté  $\dim E$ .
- 2 Toute famille libre de  $E$  contient **au plus**  $n$  éléments.
- 3 Toute famille génératrice de  $E$  contient **au moins**  $n$  éléments.
- 4 Toute famille **libre** de  $n$  éléments de  $E$  est une **base**.
- 5 Toute famille **génératrice** de  $n$  éléments de  $E$  est une **base**.

Par convention, on pose  $\dim \{\vec{0}\} = 0$ .

**Corollaire 3.13 (Dimension infinie)**

Si un e.v. possède des familles libres de cardinal **arbitrairement grand**, alors il est de **dimension infinie**.

**Exemple 3.14**

- 1 Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).

**Exemple 3.14**

- ① Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
- ② Le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$ . C'est le  $\mathbb{K}$ -e.v. **canonique** de dimension  $n$ .

**Exemple 3.14**

- ① Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
- ② Le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$ . C'est le  $\mathbb{K}$ -e.v. **canonique** de dimension  $n$ .
- ③ L'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  de degré au plus  $n$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n + 1$ . La famille de polynômes  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  en est une base appelée **base canonique**.

**Exemple 3.14**

- 1 Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
- 2 Le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$ . C'est le  $\mathbb{K}$ -e.v. **canonique** de dimension  $n$ .
- 3 L'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  de degré au plus  $n$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n + 1$ . La famille de polynômes  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  en est une base appelée **base canonique**.
- 4 Le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  y est libre pour  $n$  arbitrairement grand.

**Exemple 3.14**

- 1 Un e.v. de **dimension 1** (resp. 2) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
- 2 Le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$ . C'est le  $\mathbb{K}$ -e.v. **canonique** de dimension  $n$ .
- 3 L'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  de degré au plus  $n$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n + 1$ . La famille de polynômes  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  en est une base appelée **base canonique**.
- 4 Le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  y est libre pour  $n$  arbitrairement grand.
- 5 L'ensemble  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions  $(x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n}$  y est libre pour  $n$  arbitrairement grand.

**Exemple 3.14**

- ① Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
- ② Le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$ . C'est le  $\mathbb{K}$ -e.v. **canonique** de dimension  $n$ .
- ③ L'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  de degré au plus  $n$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n + 1$ . La famille de polynômes  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  en est une base appelée **base canonique**.
- ④ Le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}[X]$  est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  y est libre pour  $n$  arbitrairement grand.
- ⑤ L'ensemble  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions  $(x \mapsto e^{kx})_{1 \leq k \leq n}$  y est libre pour  $n$  arbitrairement grand.
- ⑥ Soit  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Dans le  $\mathbb{C}$ -e.v. des applications dérivables de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ ,
  - l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $u'(t) + au(t) = 0$ ,  $t \in I$ , est une **droite vectorielle** ;
  - l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0$ ,  $t \in I$ , est un **plan vectoriel**.

**Définition 3.15 (Vecteurs échelonnés)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie** et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Une famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_p)$  de  $E$  est dite **échelonnée relativement à la base  $\mathcal{B}$**  lorsque, pour tout  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ , l'écriture des coordonnées de  $v_{k+1}$  dans la base  $\mathcal{B}$  commence par un nombre de zéros strictement plus grand que celui de  $v_k$ , sauf si  $v_k = v_{k+1} = 0$ .

### Définition 3.15 (Vecteurs échelonnés)

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie** et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Une famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_p)$  de  $E$  est dite **échelonnée relativement à la base  $\mathcal{B}$**  lorsque, pour tout  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ , l'écriture des coordonnées de  $v_{k+1}$  dans la base  $\mathcal{B}$  commence par un nombre de zéros strictement plus grand que celui de  $v_k$ , sauf si  $v_k = v_{k+1} = 0$ .

### Proposition 3.16

Toute famille de vecteurs non nuls **échelonnée** relativement à une base est nécessairement **libre**.

**Théorème 3.17 (Dimension d'un s.e.v.)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

① Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$ .

Alors  $F$  est de **dimension finie** et  $\dim F \leq \dim E$ .

Si de plus  $\dim F = \dim E$  alors  $F = E$ .

**Théorème 3.17 (Dimension d'un s.e.v.)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

① Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$ .

Alors  $F$  est de **dimension finie** et  $\dim F \leq \dim E$ .

Si de plus  $\dim F = \dim E$  alors  $F = E$ .

② Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$ .

- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$  (formule de **Grassmann**).
- Si  $F \subset G$  et  $\dim F = \dim G$  alors  $F = G$ .

**Théorème 3.17 (Dimension d'un s.e.v.)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

① Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$ .

Alors  $F$  est de **dimension finie** et  $\dim F \leq \dim E$ .

Si de plus  $\dim F = \dim E$  alors  $F = E$ .

② Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$ .

- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$  (formule de **Grassmann**).
- Si  $F \subset G$  et  $\dim F = \dim G$  alors  $F = G$ .

**Corollaire 3.18**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**,  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$  tels que  $\dim F + \dim G > \dim E$ . Alors  $F \cap G \neq \{0\}$ .

**Théorème 3.17 (Dimension d'un s.e.v.)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

① Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$ .

Alors  $F$  est de **dimension finie** et  $\dim F \leq \dim E$ .

Si de plus  $\dim F = \dim E$  alors  $F = E$ .

② Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$ .

- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$  (formule de **Grassmann**).
- Si  $F \subset G$  et  $\dim F = \dim G$  alors  $F = G$ .

**Corollaire 3.18**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**,  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$  tels que  $\dim F + \dim G > \dim E$ . Alors  $F \cap G \neq \{0\}$ .

**Exemple 3.19**

① Un s.e.v. de dim.  $n - 1$  d'un e.v. de dim.  $n$  est appelé **hyperplan vectoriel**.

**Théorème 3.17 (Dimension d'un s.e.v.)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

① Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$ .

Alors  $F$  est de **dimension finie** et  $\dim F \leq \dim E$ .

Si de plus  $\dim F = \dim E$  alors  $F = E$ .

② Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$ .

•  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$  (formule de **Grassmann**).

• Si  $F \subset G$  et  $\dim F = \dim G$  alors  $F = G$ .

**Corollaire 3.18**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**,  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$  tels que  $\dim F + \dim G > \dim E$ . Alors  $F \cap G \neq \{0\}$ .

**Exemple 3.19**

① Un s.e.v. de dim.  $n - 1$  d'un e.v. de dim.  $n$  est appelé **hyperplan vectoriel**.

② Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . L'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  est un hyperplan vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

**Théorème 3.17 (Dimension d'un s.e.v.)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

① Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$ .

Alors  $F$  est de **dimension finie** et  $\dim F \leq \dim E$ .

Si de plus  $\dim F = \dim E$  alors  $F = E$ .

② Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$ .

- $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$  (formule de **Grassmann**).

- Si  $F \subset G$  et  $\dim F = \dim G$  alors  $F = G$ .

**Corollaire 3.18**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**,  $F$  et  $G$  deux s.e.v. de  $E$  tels que  $\dim F + \dim G > \dim E$ . Alors  $F \cap G \neq \{0\}$ .

**Exemple 3.19**

① Un s.e.v. de dim.  $n - 1$  d'un e.v. de dim.  $n$  est appelé **hyperplan vectoriel**.

② Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . L'ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  est un hyperplan vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

③ Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . L'ensemble  $\{P \in \mathbb{K}_n[X] : P(\alpha) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Proposition 3.20 (Supplémentarité et dimension)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v. d'un e.v.  $E$  de **dimension finie**.

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E \\ &\iff E = F + G \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E \end{aligned}$$

**Proposition 3.20 (Supplémentarité et dimension)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v. d'un e.v.  $E$  de **dimension finie**.

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E \\ &\iff E = F + G \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E \end{aligned}$$

**Proposition 3.21**

Deux s.e.v.  $F$  et  $G$  d'un e.v.  $E$  de **dimension finie** sont **supplémentaires** ssi on peut former une **base**  $\mathcal{B}_E$  de  $E$  en accolant une base  $\mathcal{B}_F$  de  $F$  et une base  $\mathcal{B}_G$  de  $G$  :  $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$  et alors  $\dim E = \dim F + \dim G$ .

Une telle base de  $E$  obtenue en accolant une base de  $F$  et une base de  $G$  est dite **adaptée à la supplémentarité** de  $F$  et  $G$ .

**Proposition 3.20 (Supplémentarité et dimension)**

Soit  $F$  et  $G$  deux s.e.v. d'un e.v.  $E$  de **dimension finie**.

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E \\ &\iff E = F + G \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E \end{aligned}$$

**Proposition 3.21**

Deux s.e.v.  $F$  et  $G$  d'un e.v.  $E$  de **dimension finie** sont **supplémentaires** ssi on peut former une **base**  $\mathcal{B}_E$  de  $E$  en accolant une base  $\mathcal{B}_F$  de  $F$  et une base  $\mathcal{B}_G$  de  $G$  :  $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$  et alors  $\dim E = \dim F + \dim G$ .

Une telle base de  $E$  obtenue en accolant une base de  $F$  et une base de  $G$  est dite **adaptée à la supplémentation** de  $F$  et  $G$ .

**Théorème 3.22 (Existence de s.e.v. supplémentaires)**

Soit  $E$  un e.v. de **dimension finie**.

Tout s.e.v. de  $E$  possède au moins un **supplémentaire** dans  $E$ .

**Définition 3.23 (Rang d'une famille de vecteurs)**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de vecteurs d'un e.v.

On appelle **rang** de la famille  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , et on note  $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , la **dimension** du s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ .

**Définition 3.23 (Rang d'une famille de vecteurs)**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de vecteurs d'un e.v.

On appelle **rang** de la famille  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , et on note  $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , la **dimension** du s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ .

**Proposition 3.24**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de vecteurs d'un e.v.  $E$ .

- 1  $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \leq p$  avec égalité ssi la famille est **libre**.

**Définition 3.23 (Rang d'une famille de vecteurs)**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de vecteurs d'un e.v.

On appelle **rang** de la famille  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , et on note  $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , la **dimension** du s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ .

**Proposition 3.24**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de vecteurs d'un e.v.  $E$ .

- 1  $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \leq p$  avec égalité ssi la famille est **libre**.
- 2 Si  $E$  est de **dimension finie**,
  - $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \leq \dim E$  avec égalité ssi la famille est **génératrice** ;
  - $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = p = \dim E$  ssi  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est une **base** de  $E$ .

**Définition 3.23 (Rang d'une famille de vecteurs)**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de vecteurs d'un e.v.

On appelle **rang** de la famille  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , et on note  $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ , la **dimension** du s.e.v.  $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ .

**Proposition 3.24**

Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de vecteurs d'un e.v.  $E$ .

- ①  $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \leq p$  avec égalité ssi la famille est **libre**.
- ② Si  $E$  est de **dimension finie**,
  - $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \leq \dim E$  avec égalité ssi la famille est **génératrice** ;
  - $rg(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = p = \dim E$  ssi  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est une **base** de  $E$ .

**Proposition 3.25**

On **ne modifie pas** le **rang** d'une famille de vecteurs lorsque :

- on change l'ordre des vecteurs de la famille ;
- on multiplie un vecteur par un scalaire non nul ;
- on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.

**Remarque 3.26 (Rang d'un système linéaire)**

Si  $(S)$  est un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Alors le rang du système  $(S)$  est égal au rang de la famille de vecteurs  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  où  $\vec{v}_j$  est le vecteur de  $\mathbb{K}^n$  de coordonnées  $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

**Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)**

Dans le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{K}^4$  rapporté à sa base canonique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on considère la famille de vecteurs  $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$  où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que  $\text{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$ , le système  $\mathcal{S}$  est donc **lié**.

**Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)**

Dans le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{K}^4$  rapporté à sa base canonique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on considère la famille de vecteurs  $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$  où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que  $\text{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$ , le système  $\mathcal{S}$  est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de  $\mathcal{S}$ , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

---

## Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{K}^4$  rapporté à sa base canonique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on considère la famille de vecteurs  $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$  où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que  $\text{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$ , le système  $\mathcal{S}$  est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de  $\mathcal{S}$ , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

- ① Faisons apparaître des zéros sur la **première** ligne à partir de la **deuxième** colonne :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \vec{u}'_3 & \vec{u}'_4 & \vec{u}'_5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -14 & -14 & -5 & -19 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec  $\vec{u}'_1 = \vec{u}_1$ ,  $\vec{u}'_2 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}'_3 = \vec{u}_3 - 4\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}'_4 = \vec{u}_4 - \vec{u}_1$ ,  $\vec{u}'_5 = \vec{u}_5 - 4\vec{u}_1$ .

## Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{K}^4$  rapporté à sa base canonique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on considère la famille de vecteurs  $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$  où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que  $\text{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$ , le système  $\mathcal{S}$  est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de  $\mathcal{S}$ , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

- ② Faisons apparaître des zéros sur la **deuxième** ligne à partir de la **troisième** colonne :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \vec{u}'_3 & \vec{u}'_4 & \vec{u}'_5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -14 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec  $\vec{u}'_1 = \vec{u}_1$ ,  $\vec{u}'_2 = \vec{u}_2$ ,  $\vec{u}'_3 = \vec{u}_3 - \vec{u}_2$ ,  $\vec{u}'_4 = 3\vec{u}_4 - \vec{u}_2$ ,  $\vec{u}'_5 = 3\vec{u}_5 - 4\vec{u}_2$ .

## Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{K}^4$  rapporté à sa base canonique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on considère la famille de vecteurs  $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$  où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que  $\text{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$ , le système  $\mathcal{S}$  est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de  $\mathcal{S}$ , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

- ③ Le terme apparaissant à l'intersection des **troisième** ligne et **troisième** colonne étant nul, on permute par exemple les vecteurs  $\vec{u}_3''$  et  $\vec{u}_5''$  :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1'' & \vec{u}_2'' & \vec{u}_5'' & \vec{u}_4'' & \vec{u}_3'' \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

## Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{K}^4$  rapporté à sa base canonique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on considère la famille de vecteurs  $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$  où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que  $\text{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$ , le système  $\mathcal{S}$  est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de  $\mathcal{S}$ , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

- 4 Faisons apparaître des zéros sur la **troisième** ligne à partir de la **quatrième** colonne :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1''' & \vec{u}_2''' & \vec{u}_3''' & \vec{u}_4''' & \vec{u}_5''' \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec  $\vec{u}_1''' = \vec{u}_1'$ ,  $\vec{u}_2''' = \vec{u}_2'$ ,  $\vec{u}_3''' = \vec{u}_3'$ ,  $\vec{u}_4''' = \vec{u}_4' - \vec{u}_5'$ ,  $\vec{u}_5''' = \vec{u}_3'$ .

## Exemple 3.27 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{K}^4$  rapporté à sa base canonique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on considère la famille de vecteurs  $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$  où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que  $\text{card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$ , le système  $\mathcal{S}$  est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de  $\mathcal{S}$ , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

5 Ainsi,

$$\text{Vect}(\mathcal{S}) = \text{Vect}(\vec{u}_1'', \vec{u}_2'', \vec{u}_3'') = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1, 3\vec{u}_5 - 4\vec{u}_2 - 4\vec{u}_1).$$

La famille  $((1, 1, 0, 5), (0, -3, 2, -14), (0, 0, 1, -1))$  est une **base** de  $\text{Vect}(\mathcal{S})$  et alors

$$\text{rang}(\mathcal{S}) = 3.$$

De plus les égalités  $\vec{u}_4'' = \vec{u}_5'' = \vec{0}$  conduisent progressivement à  $\vec{u}_4' - \vec{u}_5' = \vec{u}_3' = \vec{0}$ , puis  $\vec{u}_2' + \vec{u}_4' - \vec{u}_5' = \vec{u}_3' - \vec{u}_2' = \vec{0}$  et enfin

$$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u}_5 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4.$$

## Notions à retenir

- Espaces vectoriels
  - ★ Axiomes, calcul vectoriel
  - ★ Exemples canoniques
  - ★ Dimension
- Sous-espaces vectoriels
  - ★ Caractérisation
  - ★ Notion d'engendrement
  - ★ Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentarité
- Famille de vecteurs
  - ★ Familles libres, liées, génératrices, bases
  - ★ Dépendance, indépendance linéaires
  - ★ Rang, méthode des zéros échelonnés