INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Applications linéaires

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'on se donne deux $\mathbb{K}$-e.v. $(E,+_E,\cdot_E)$ et $(F,+_F,\cdot_F)$.

Définition 1.1 (Applications linéaires)

On dit qu'une application $f: E \longrightarrow F$ est ***linéaire*** *si :*

1. $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2,\ f(\vec{u}+_E\vec{v}) = f(\vec{u}) +_F f(\vec{v})$
2. $\forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot_E \vec{u}) = \lambda \cdot_F f(\vec{u})$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
Un élément de $\mathcal{L}(E,E)$, noté plus simplement $\mathcal{L}(E)$, s'appelle un ***endomorphisme*** *de E.*

On peut aussi vérifier qu'une application est linéaire en une seule relation :

Proposition 1.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit f une application de E dans F.

$f \in \mathcal{L}(E,F) \iff \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall(\vec{u},\vec{v})\in E^2,\ f(\lambda\cdot_E\vec{u}+_E\mu\cdot_E\vec{v}) = \lambda\cdot_F f(\vec{u}) +_F \mu\cdot_F f(\vec{v})$

N.B. Dans toute la suite, pour alléger les notations, on utilisera les mêmes symboles $+$ et $\cdot$ (ou rien) pour les lois relatives à E et F.

Proposition 1.3 (Propriétés immédiates)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
- $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n) \in E^n,\ f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(\vec{u}_i)$

  En particulier : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \vec{u} \in E,\ f(n\vec{u}) = n f(\vec{u})$.

Exemple 1.4

1. Les applications linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont toutes de la forme $x \longmapsto ax$ où $a\in\mathbb{K}$.
2. Les applications linéaires de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$ sont toutes de la forme $(x,y) \longmapsto ax+by$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
3. L'application $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'$ est linéaire.
4. L'application $\varphi : \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ est linéaire.

Définition 1.5 (Forme linéaire)

Si $F = \mathbb{K}$ on dit que l'application linéaire est une ***forme linéaire*** *sur E.*

Proposition 1.6 (Structure d'e.v.)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi un $\mathbb{K}$-e.v.

En plus de la stabilité par combinaison linéaire, on a :

Proposition 1.7 (Composition)

1. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g\circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.*
   Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est encore linéaire.
2. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

Définition 1.8 (Isomorphisme, automorphisme)

1. *Toute application* ***linéaire bijective*** *de E dans F s'appelle un* ***isomorphisme*** *de E sur F.*
2. *Tout* ***endomorphisme bijectif*** *de E s'appelle un* ***automorphisme*** *de E.*
3. *L'ensemble des automorphismes de E, noté $\mathrm{GL}(E)$, muni de la loi de composition $\circ$, est un groupe non commutatif appelé* ***groupe linéaire*** *de E.*

Définition 2.1 (Image directe/réciproque)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, A une partie de E et B une partie de F.

1. ***L'image (directe)*** *de A par f est l'ensemble*
$$f(A) = \{\vec{v} \in F : \exists\,\vec{u} \in A,\ \vec{v} = f(\vec{u})\} = \{f(\vec{u}), \vec{u} \in A\}.$$
2. ***L'image réciproque*** *de B par f est l'ensemble*
$$f^{-1}(B) = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) \in B\}.$$

Une propriété importante de conservation de la structure d'e.v. par les applications linéaires :

Proposition 2.2 (Image d'un s.e.v)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, G un s.e.v de E et H un s.e.v de F.
Alors $f(G)$ est un s.e.v de F et $f^{-1}(H)$ est un s.e.v de E.

Définition 2.3 (Image/Noyau)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. *On appelle* ***image*** *de f le s.e.v $f(E)$ de F que l'on note $\operatorname{Im} f$.*
2. *On appelle* ***noyau*** *de f le s.e.v $f^{-1}(\{\vec{0}_F\})$ de E que l'on note $\operatorname{Ker} f$.*

On peut caractériser la surjectivité et l'injectivité d'une application linéaire :

Théorème 2.4 (Injectivité/Surjectivité)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. *f est* ***surjective*** *ssi $\operatorname{Im} f = F$.*
2. *f est* ***injective*** *ssi $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$.*

Remarque 2.5

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\vec{b} \in F$. Si $\vec{b} \in \operatorname{Im} f$ et si $\vec{u}_p$ est une solution particulière de l'équation $f(\vec{u}) = \vec{b}$, alors les solutions de cette équation sont les vecteurs de E de la forme $\vec{u}_p + \vec{u}_h$ où $\vec{u}_h$ décrit $\operatorname{Ker} f$.

Exemple 2.6 (Dérivation/intégration)

1. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, considérons les applications $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto \int_0^{\cdot} f \end{array}$

   ($\int_0^{\cdot} f$ est la fonction $x \longmapsto \int_0^x f$).

   - φ et ψ sont des **endomorphismes** de E.
   - $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est le s.e.v. des fonctions constantes et $\operatorname{Im}(\varphi) = E$ donc φ est **surjective** mais **pas injective.**
   - $\operatorname{Ker}(\psi) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(\psi)$ est le s.e.v. des fonctions s'annulant en 0 donc ψ est **injective** mais **pas surjective.**
   - On a $\forall f \in E,\ (\varphi\circ\psi)(f) = \left(\int_0^{\cdot} f\right)' = f$ et $(\psi\circ\varphi)(f) = \int_0^{\cdot} f' = f - f(0)$ donc $\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_E$ (mais $\psi\circ\varphi \neq \mathrm{Id}_E$).

2. Le sous-ensemble $E_0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$ est un s.e.v. de E. Considérons à présent les applications $\varphi_0 : \begin{array}{l} E_0 \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{array}$ et $\psi_0 : \begin{array}{l} E \longrightarrow E_0 \\ f \longmapsto \int_0^{\cdot} f \end{array}$

   Dans ce contexte, on a $\varphi_0\circ\psi_0 = \mathrm{Id}_E$ et $\psi_0\circ\varphi_0 = \mathrm{Id}_{E_0}$. Ainsi φ_0 et ψ_0 sont des **isomorphismes** réciproques l'un de l'autre.

Exemple 2.7 (Équation différentielle linéaire du 1er ordre)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $u'(t) + au(t) = g(t)$, $t \in I$.

On introduit l'application linéaire Φ entre les $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ et continues sur I définie par
$$\Phi : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ f \longmapsto f' + af \end{array}$$

- $\operatorname{Ker}(\Phi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$: $u'(t) + au(t) = 0$. C'est la droite vectorielle des fonctions $t \longmapsto \lambda e^{-at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Puis, l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrivant $\Phi(f) = g$, son ensemble de solutions est $u_p + \operatorname{Ker}(\Phi)$ où u_p est une solution particulière de (E). On retrouve ainsi un principe de superposition.

Proposition 2.8 (Image d'une famille de vecteurs)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. *Si $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est liée alors $(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p))$ est liée.*
2. *Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille **libre** dans E.*
   *Si f est **injective** alors $(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p))$ est **libre** dans F.*
3. *Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille **génératrice** de E.*
   *Si f est **surjective** alors $(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p))$ est une famille **génératrice** de F.*
4. *Si $G = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ alors $f(G) = \mathrm{Vect}(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p))$.*
   *En particulier, si $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E, alors $(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n))$ est une famille **génératrice** de $\mathrm{Im}\, f$.*

Définition 3.1 (Homothétie)

*On appelle **homothétie vectorielle** de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $h_\lambda : E \longmapsto E$ définie par $h_\lambda(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. C'est un endomorphisme de E.*

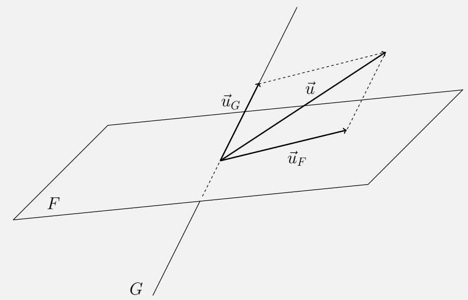
Quelques propriétés immédiates :

Proposition 3.2 (Composition)

1. *Une homothétie vectorielle de $\mathcal{L}(E)$ commute avec tout $f \in \mathcal{L}(E)$.*
2. *$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.*
3. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $h_\lambda \in \mathrm{GL}(E)$ et $(h_\lambda)^{-1} = h_{1/\lambda}$.*

Définition 3.3 (Projection)

Soit F et G deux s.e.v supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.
*Tout vecteur $\vec{u} \in E$ se décomposant de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ où $\vec{u}_F \in F$ et $\vec{u}_G \in G$, on appelle **projection vectorielle sur F parallèlement à G**, l'application $p : E \longrightarrow E$ définie par $p(\vec{u}) = \vec{u}_F$.*



Théorème 3.4 (Propriétés)

Soit p la projection vectorielle sur F parallèlement à G dans $E = F \oplus G$.
Alors :

1. *p est un endomorphisme de E et $p \circ p = p$ (on dit que p est **idempotent**).*
2. *$F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\, p$.*
   *F est l'ensemble des vecteurs **invariants** par p : $F = \{\vec{u} \in E : p(\vec{u}) = \vec{u}\}$.*

Proposition 3.5 (Caractérisation)

*Tout endomorphisme **idempotent** p de E est la **projection vectorielle** sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$, espaces alors supplémentaires dans E : $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.*

Remarque 3.6

En revanche, il ne suffit pas d'avoir $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$ pour dire que f est une projection.

Exemple 3.7 (Détermination d'une projection)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère le plan vectoriel P d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et la droite vectorielle D de vecteur directeur $(1, 1, 1)$. D a pour équations $x = y = z$.

Déterminons la **projection vectorielle** p sur le plan P parallèlement à la droite D.

1. On vérifie tout d'abord que P et D sont supplémentaires dans E : ceci est dû à $P \cap D = \{(0, 0, 0)\}$ et $\dim P + \dim D = \dim E$.
2. Pour tout vecteur (x, y, z) de E, notons (x', y', z') son image par p : $(x', y', z') = p(x, y, z)$.
3. Le vecteur (x', y', z') est caractérisé par les deux conditions

$$\begin{cases} (x', y', z') \in P \\ (x, y, z) - (x', y', z') \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x' - 2y' + 3z' = 0 \\ x' - y' = x - y \\ x' - z' = x - z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + 2y - 3z) \\ y = \frac{1}{2}(-x + 4y - 3z) \\ z = \frac{1}{2}(-x + 2y - z) \end{cases}$$

4. En conclusion, p est définie analytiquement par

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}(x + 2y - 3z), \frac{1}{2}(-x + 4y - 3z), \frac{1}{2}(-x + 2y - z)\right) \end{array}$$

Exemple 3.8 (Identification d'une projection)

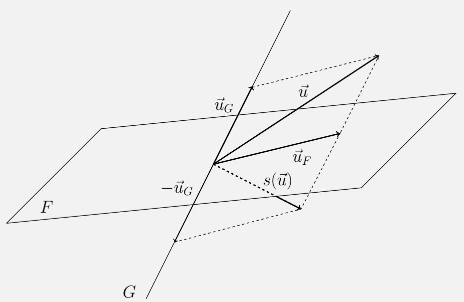
Considérons l'endomorphisme p du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ suivant :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x - 2y + 8z, -x + 2y - 4z, -x + y - 3z) \end{array}$$

1. On vérifie que $p \circ p = p$ donc p est une **projection vectorielle** de E.
2. Déterminons le noyau de p. Soit $(x, y, z) \in E$.
$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,(p) \iff \begin{cases} 3x - 2y + 8z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$
   Donc $\mathrm{Ker}\,(p) = \{(-2\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   C'est la **droite vectorielle** D engendrée par le vecteur $(-2, 1, 1)$.
3. Déterminons les **invariants** de p. Soit $(x, y, z) \in E$.
$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} 3x - 2y + 8z = x \\ -x + 2y - 4z = y \\ -x + y - 3z = z \end{cases} \iff x - y + 4z = 0$$
   Donc $\mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) = \{(x, y, z) \in E : x - y + 4z = 0\} = \{(\lambda, \lambda + 4\mu, \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
   C'est le **plan vectoriel** P engendré par $(1, 1, 0)$ et $(0, 4, 1)$.
4. En conclusion, p est la **projection vectorielle sur P parallèlement à D.**

Définition 3.9 (Symétrie)

Soit F et G deux s.e.v supplémentaires dans E.
*Tout vecteur $\vec{u} \in E$ se décomposant de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ où $\vec{u}_F \in F$ et $\vec{u}_G \in G$, on appelle **symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G**, l'application $s : E \longrightarrow E$ définie par $s(\vec{u}) = \vec{u}_F - \vec{u}_G$.*



Théorème 3.10 (Propriétés)

Soit s la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G dans $E = F \oplus G$.
Alors :

1. *s est un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (on dit que s est **involutif**) et $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, p étant la projection sur F parallèlement à G.*
2. *$F = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.*
   *F (resp. G) est l'ensemble des vecteurs **invariants** (resp. **anti-invariants**) par s : $F = \{\vec{u} \in E : s(\vec{u}) = \vec{u}\}$ (resp. $G = \{\vec{u} \in E : s(\vec{u}) = -\vec{u}\}$).*

Proposition 3.11 (Caractérisation)

*Tout endormorphisme **involutif** s de E est la **symétrie vectorielle** par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$, espaces alors supplémentaires dans E.*

Théorème 4.1 (Image d'une famille de vecteurs)

*On suppose E de dimension **finie** n et F de dimension quelconque.*
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Alors :

1. *la famille $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est **libre** dans F ssi f est **injective** ;*
2. *la famille $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est **génératrice** dans F ssi f est **surjective** ;*
3. *la famille $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une **base** de F ssi f est un **isomorphisme**.*
   *Dans ce cas, on dit que E et F sont **isomorphes**.*

Corollaire 4.2 (Injectivité/surjectivité et dimension)

*On suppose E et F de dimensions **finies**.*
Alors :

1. *s'il existe une application linéaire de E dans F **injective** alors $\dim F \geqslant \dim E$;*
2. *s'il existe une application linéaire de E dans F **surjective** alors $\dim F \leqslant \dim E$;*
3. *s'il existe un **isomorphisme** de E sur F alors $\dim F = \dim E$.*

Théorème 4.3 (Détermination d'une application linéaire)

*On suppose E de dimension **finie** n et F de dimension quelconque.*
Soit $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E. Alors :

1. *si $f\in\mathcal{L}(E,F)$ vérifie $f(\vec{e}_i)=0$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, alors f est l'application **nulle** ;*
2. *si $(f,g)\in\mathcal{L}(E,F)$ et que $f(\vec{e}_i)=g(\vec{e}_i)$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ alors $f=g$. Autrement dit, si f et g **coïncident sur une base** alors elles sont **égales** ;*
3. *soit $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ des vecteurs de F. Alors, il existe une **unique application linéaire** $f\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(\vec{e}_i)=\vec{\varepsilon}_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$.*

On peut résumer ce résultat en une phrase :
*si l'espace de départ est de dimension finie, une application linéaire est **entièrement déterminée** par la donnée des images d'une base.*

Théorème 4.4 (Représentation analytique)

*On suppose E et F de dimensions **finies** respectives n et m.*
Soit $\mathcal{B}_E=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E, $\mathcal{B}_F=(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m)$ une base de F et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

Notons pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, $f(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\vec{\varepsilon}_i$,

Si le vecteur $\vec{u}\in E$ a pour coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ par rapport à $\mathcal{B}_E$, alors son image par f est le vecteur $f(\vec{u})\in F$ de coordonnées $(y_1,\dots,y_m)$ par rapport à $\mathcal{B}_F$ où pour tout $i\in\{1,\dots,m\}$, $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$. Cela s'écrit explicitement :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n\\ \quad\vdots\\ y_i = a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n\\ \quad\vdots\\ y_m = a_{m1}x_1+\cdots+a_{mj}x_j+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}$$

*Le système précédent s'appelle la **représentation analytique** de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.*

Corollaire 4.5 (Applications linéaires canoniques)

*Les applications linéaires des $\mathbb{K}$-e.v. **canoniques** $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont de la forme*

$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\longmapsto\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j,\dots,\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\right)\in\mathbb{K}^m$ *où les a_{ij} sont des scalaires de $\mathbb{K}$.*

*Il est parfois commode d'écrire la correspondance sous la forme (cf. le cours de calcul différentiel de 2[e] année, calcul de matrice **jacobienne**)*

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m\\ (x_1,x_2,\dots,x_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}\end{array}$$

Définition 4.6 (Matrice d'une application linéaire)

*On suppose E et F de dimensions **finies** respectives n et m.*
Soit $\mathcal{B}_E=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E, $\mathcal{B}_F=(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_m)$ une base de F et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.
*On appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$**, le tableau de nombres à m lignes et n colonnes, noté $[f]_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$ (ou $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$), obtenu en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs $f(\vec{e}_j)$, $j\in\{1,\dots,n\}$, dans la base $\mathcal{B}_F$.*

Ainsi, si pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, $f(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\vec{\varepsilon}_i$,

$$[f]_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

Proposition-définition 4.7 (Rang d'une application linéaire)

*On suppose E de dimension **finie** n, F de dimension quelconque et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.*
*Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension **finie.** Sa dimension est appelée le **rang** de f et notée $\operatorname{rg}(f)$.*
Ainsi, si $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E, $\operatorname{rg}(f)$ est le rang de la famille de vecteurs $(f(\vec{e}_1),\dots,f(\vec{e}_n))$.

Quelques propriétés du rang d'une application linéaire :

Proposition 4.8 (Propriétés immédiates)

*On suppose E de dimension **finie**, F de dimension quelconque et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.*

1. $\operatorname{rg}(f)\leqslant\dim E$, *avec égalité ssi f est **injective.***
2. $\operatorname{rg}(f)\leqslant\dim F$, *avec égalité ssi f est **surjective.***
3. $\operatorname{rg}(f)=\dim E=\dim F$ *ssi f est un **isomorphisme.***

Proposition 4.9 (Composition et rang)

Soit E, F des $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies et G un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque.
Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\operatorname{rg}(g\circ f)\leqslant\min(\operatorname{rg}(f),\operatorname{rg}(g)).$$

De plus,

1. *si f est **surjective** alors $\operatorname{rg}(g\circ f)=\operatorname{rg}(g)$;*
2. *si g est **injective** alors $\operatorname{rg}(g\circ f)=\operatorname{rg}(f)$.*

Une conséquence importante :

Corollaire 4.10

On ne modifie pas la rang d'une application linéaire en composant celle-ci avec un isomorphisme.

Théorème 4.11 (Théorème du rang)

*On suppose E de dimension **finie**, F de dimension quelconque et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.*
Si G est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E alors $f_{|G}:G\longrightarrow\operatorname{Im} f$ est un isomorphisme.
En particulier :

$$\dim(\operatorname{Ker} f)+\operatorname{rg}(f)=\dim E.$$

Corollaire 4.12 (Équivalence injectivité/surjectivité)

*On suppose E et F de **même dimension finie** et $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

$$f \text{ est } \textbf{injective} \iff f \text{ est } \textbf{surjective} \iff f \text{ est un } \textbf{isomorphisme}$$

En particulier, ces équivalences sont vérifiées pour tout endomorphisme f de E.

Théorème 4.13 (Espaces isomorphes)

Deux e.v. de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.
*Ainsi, tous les $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension finie n** sont **isomorphes à $\mathbb{K}^n$**.*

Exemple 4.14 (Dérivation/intégration)

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-e.v. des polynômes à coefficients réels de degré au plus n et $F=\mathbb{R}_{n-1}[X]\times\mathbb{R}$. Considérons l'application linéaire $\varphi: \begin{array}{l}E\longrightarrow F\\ P\longmapsto(P',P(0))\end{array}$

1. Déterminons le **noyau** de φ : $P\in\operatorname{Ker}(\varphi)\iff P'=0$ et $P(0)=0\iff P=0$. Donc φ est **injective**.
2. Comme les e.v. E et F sont de **même dimension finie** $n+1$, φ est aussi **surjective**, c'est donc un **isomorphisme.**
3. Son **isomorphisme réciproque** s'écrit φ^{-1} : $\begin{array}{l}F\longrightarrow E\\ (Q,a)\longmapsto\int_0^{\cdot}Q+a\end{array}$

Notions à retenir

- Applications linéaires
  - Caractérisation
  - Représentation analytique
  - Matrice
  - Noyau, image ; lien avec l'injectivité, la surjectivité ; isomorphisme
  - Image d'une famille de vecteurs
  - Théorème du rang
  - Exemples géométriques : homothéties, projections, symétries