

# Matrices

*Aimé Lachal*

**Cours de mathématiques**  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

- ① L'espace vectoriel des matrices
  - Définition d'une matrice
  - Matrice d'une application linéaire
  - Structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- ② Le produit matriciel
  - Matrice d'une composée d'applications linéaires
  - Propriétés du produit matriciel
  - Transvection
  - Dilatation
  - Matrice d'échange de lignes/colonnes
- ③ Inverse d'une matrice
- ④ Matrices particulières
  - Transposition de matrices
  - Diverses matrices particulières
- ⑤ Similitude de matrices
  - Matrice de passage
  - Changement de base
  - Matrices équivalentes/semblables
  - Rang d'une matrice

- 1 L'espace vectoriel des matrices
  - Définition d'une matrice
  - Matrice d'une application linéaire
  - Structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- 2 Le produit matriciel
- 3 Inverse d'une matrice
- 4 Matrices particulières
- 5 Similitude de matrices

### Définition 1.1 (Matrice)

- ① Soit  $n$  et  $p$  des naturels non nuls. **Une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , est un tableau de nombres à  $n$  lignes et  $p$  colonnes :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où les  $a_{ij}$  sont des éléments de  $\mathbb{K}$  appelés **coefficients** de  $A$ .

On notera aussi  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  ou encore  $A = (a_{ij})$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille de  $A$ .

- ② L'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Lorsque  $n = p$ , on parle de **matrices carrées** et l'on note plus simplement  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- ③ On appelle **matrice unité**, notée  $I_n$ , la matrice  $(\delta_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \delta_{ii} = 1$  et  $\forall i \neq j, \delta_{ij} = 0$ .
- ④ On appelle **matrice colonne** tout élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et **matrice ligne** tout élément de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ .

**Définition 1.2 (Matrice d'une application linéaire)**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions respectives  $p$  et  $n$ .

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  une base de  $F$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On appelle **matrice de  $f$  par rapport aux (ou dans les) bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$** , la matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, notée  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  ou parfois  $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ , dont la  $j^{\text{e}}$  colonne est constituée des coordonnées du vecteur  $f(\vec{u}_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

Si l'on écrit, pour  $1 \leq j \leq p$ ,  $f(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{v}_i$ , alors  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

**Cas particulier :**

Lorsque  $E = F$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ , on note plus simplement  $[f]_{\mathcal{B}}$  au lieu de  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ .

L'addition et la multiplication par un scalaire des applications linéaires se **transportent** de la manière suivante :

### Proposition 1.3

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions respectives  $p$  et  $n$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ . Soit  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ .

Si  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = (a_{ij})$  et  $[g]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = (b_{ij})$  alors :

- 1  $[f + g]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = (a_{ij} + b_{ij})$  ;
- 2  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, [\lambda \cdot f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = (\lambda a_{ij})$ .

Cela permet de munir  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  d'une structure d'e.v. :

### Définition 1.4 (Opérations matricielles)

On définit sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  une loi interne  $+$  et une loi externe  $\cdot$  de la manière suivante :

- 1  $\forall ((a_{ij}), (b_{ij})) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$  ;
- 2  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ .

### Théorème 1.5 (Structure d'espace vectoriel)

- ①  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie  $n \times p$  dont une base (dite **canonique**) est constituée par la famille de matrices **élémentaires**  $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  définies par

$$E_{ij} = i \rightarrow \begin{matrix} & & j & & \\ & & \downarrow & & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- ② Pour toutes bases  $\mathcal{B}$  de  $E$  et  $\mathcal{C}$  de  $F$  **fixées**, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \end{aligned} \quad \text{est un **isomorphisme** d'e.v.}$$

et l'on a donc  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$ .

- 1 L'espace vectoriel des matrices
- 2 Le produit matriciel
  - Matrice d'une composée d'applications linéaires
  - Propriétés du produit matriciel
  - Transvection
  - Dilatation
  - Matrice d'échange de lignes/colonnes
- 3 Inverse d'une matrice
- 4 Matrices particulières
- 5 Similitude de matrices



### Proposition 2.1 (Matrice et composition)

Soit  $E, F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions respectives  $p, n$  et  $q$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{C}$  une base de  $F$  et  $\mathcal{D}$  une base de  $G$ .

On considère  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  et l'on pose :

$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n} = [g]_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}$ .

Alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$  admet pour matrice

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = \left( \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} \right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$$

En cohérence avec la propriété précédente (en modifiant l'ordre des notations), on peut définir le **produit de deux matrices** sous certaines conditions sur leurs tailles :

### Définition 2.2 (Produit matriciel)

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ .

On définit la **matrice produit**  $A \times B = AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}, c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

En conséquence, avec les notations de la proposition 2.1,

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} \times [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}.$$

Le transport des lois  $(+, \cdot, \circ)$  opérant sur l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  vers les lois  $(+, \cdot, \times)$  opérant sur l'espace  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , permet d'en déduire des propriétés pour les opérations sur les matrices :

### Proposition 2.3 (Propriétés du produit matriciel)

$A, B, C$  étant des matrices et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , les égalités suivantes sont vérifiées à condition que les nombres de lignes et de colonnes des matrices y figurant soient compatibles :

- 1  $A(BC) = (AB)C$  (*associativité*)
- 2  $A(B + C) = AB + AC$  (*distributivité à gauche*)
- 3  $(A + B)C = AC + BC$  (*distributivité à droite*)
- 4  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

### Remarque 2.4

Tout comme la loi de composition des applications, le produit de matrices **ne commute pas** : en général,  $AB \neq BA$ .

## Remarque 2.5

Pour pouvoir faire le produit d'une matrice  $A$  avec elle-même, il faut et il suffit qu'elle ait le même nombre de lignes et de colonnes, i.e. qu'elle soit **carrée**.

## Définition 2.6 (Puissance d'une matrice carrée)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$  et, par convention,  $A^0 = I_n$ .

S'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = O$  (i.e. la matrice dont tous les coefficients sont nuls), on dit que  $A$  est **nilpotente**.

## Théorème 2.7 (Formule du binôme matricielle (facultatif))

Si  $A$  et  $B$  sont des matrices **carrées** de même taille qui **commutent** (i.e.  $AB = BA$ ), alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

## Exemple 2.8 (Formule du binôme et matrices nilpotentes)

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ .

❶ On décompose  $A$  en  $I_3 + B$  avec  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

❷ Remarquons que  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B^3 = O$ ,

puis pour tout entier  $k \geq 3$ ,  $B^k = O$ . La matrice  $B$  est donc **nilpotente**.

❸ De plus  $I_3$  **commute** avec  $B$ . On peut donc appliquer la **formule du binôme** :

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad A^p = \sum_{k=0}^2 \binom{p}{k} B^k = I_3 + pB + \frac{1}{2}p(p-1)B^2$$

soit

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{1}{2}p(p+1) \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Proposition 2.9 (Représentation analytique)

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .  
Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $A = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  et  $(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times F$ .

Alors, si on note  $X$  la matrice colonne obtenue en écrivant les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $Y$  celle obtenue en écrivant les coordonnées du vecteur  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{C}$ , on a :

$$\vec{v} = f(\vec{u}) \iff Y = AX.$$

Explicitement :

$$\text{si } \dim E = n, \dim F = m, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$\vec{v} = f(\vec{u}) \iff \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$



Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , soit la matrice

$$D_i(\lambda) = i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

### Proposition 2.11

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- ❶ La matrice produit  $D_i(\lambda)A$  est la matrice obtenue en laissant inchangées les lignes de  $A$  à l'exception de la  $i^{\text{e}}$  ligne que l'on multiplie par  $\lambda$ .
- ❷ La matrice produit  $AD_i(\lambda)$  est la matrice obtenue en laissant inchangées les colonnes de  $A$  à l'exception de la  $i^{\text{e}}$  colonne que l'on multiplie par  $\lambda$ .





- 1 L'espace vectoriel des matrices
- 2 Le produit matriciel
- 3 Inverse d'une matrice**
- 4 Matrices particulières
- 5 Similitude de matrices

Parmi les matrices **carrées**, **certaines** sont dites **inversibles** :

#### Définition 3.1 (Matrice inversible)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **inversible** lorsqu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = BA = I_n$ .

La matrice  $B$ , lorsqu'elle existe, est unique et s'appelle l'**inverse** de  $A$  et se note  $A^{-1}$ .

On note  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### Proposition 3.2 (Inversibilité et opérations)

- 1 Si  $A$  est **inversible** et  $\lambda \in \mathbb{K}$  **non nul**, alors  $\lambda A$  est inversible et  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ .
- 2 Si  $A$  et  $B$  sont **inversibles** alors  $AB$  est **inversible** et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

#### Remarque 3.3

Attention, la **somme** de deux matrices **inversibles** n'est **pas** nécessairement **inversible**.

#### Proposition 3.4 (Inversibilité et bijectivité)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = [f]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors les propositions suivantes sont toutes **équivalentes** :

- 1  $A$  est **inversible**
- 2  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = I_n$
- 3  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $BA = I_n$
- 4  $\text{rg}(A) = n$
- 5  $f$  est **bijective**
- 6  $f$  est **injective**
- 7  $f$  est **surjective**

De plus, si l'une de ces propositions est vraie, alors  $[f^{-1}]_{\mathcal{B}} = A^{-1}$ .

#### Remarque 3.5 (Calcul de l'inverse)

- 1 Pour déterminer la matrice inverse d'une matrice  $A$ , lorsque celle-ci existe, on passe par la **résolution d'un système linéaire** par interprétation de l'équivalence  $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$ , où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$ .
- 2 On peut aussi utiliser l'**algorithme de Gauss-Jordan** : par multiplications à gauche successives de la matrice  $A$  par des matrices élémentaires (transvection, dilatation, échange), on peut transformer  $A$  en la matrice identité  $I_n$ . Alors la matrice produit de ces matrices élémentaires successives est égale à  $A^{-1}$ .

- 1 L'espace vectoriel des matrices
- 2 Le produit matriciel
- 3 Inverse d'une matrice
- 4 Matrices particulières**
  - Transposition de matrices
  - Diverses matrices particulières
- 5 Similitude de matrices

### Définition 4.1 (Transposition)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  avec  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ .

On appelle **transposée** de  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  notée  ${}^tA$ , définie par :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}, {}^tA = (a'_{ij}) \text{ où } a'_{ij} = a_{ji}.$$

### Proposition 4.2 (Propriétés de la transposition)

①  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},$

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad {}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA) \quad {}^t({}^tA) = A$$

②  $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}), \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$

③ Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **inversible** alors  ${}^tA$  est **inversible** et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

④  $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A).$

**Définition 4.3 (Diverses matrices particulières)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .

- 1  $A$  est appelée matrice **scalaire** lorsqu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A = \lambda I_n$ .
- 2  $A$  est dite **diagonale** lorsque les coefficients de  $A$  placés en dehors de sa diagonale sont nuls.
- 3  $A$  est dite **triangulaire supérieure** (respectivement **triangulaire inférieure**) lorsque les coefficients de  $A$  placés strictement au-dessous (respectivement au-dessus) de sa diagonale sont nuls.
- 4  $A$  est dite **symétrique** lorsque  ${}^tA = A$ .
- 5  $A$  est dite **antisymétrique** lorsque  ${}^tA = -A$ .
- 6  $A$  est dite **orthogonale** lorsque  ${}^tAA = I_n$  (ou  $A{}^tA = I_n$ , et dans ce cas  $A^{-1} = {}^tA$ ).

### Proposition 4.4 (Stabilité)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère dans ce qui suit des parties de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- 1 L'ensemble des matrices **diagonales** est un s.e.v. de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  **stable** pour la multiplication des matrices.

*Restreinte à cet ensemble, la multiplication des matrices est commutative.*

- 2 L'ensemble des matrices **triangulaires supérieures** est un s.e.v. de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  **stable** pour la multiplication des matrices.

- 3 L'ensemble des matrices **triangulaires inférieures** est un s.e.v. de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  **stable** pour la multiplication des matrices.

- 4 L'ensemble des matrices **symétriques** et l'ensemble des matrices **antisymétriques** sont des s.e.v. **supplémentaires** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

*Toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  se décompose de manière unique selon*

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

*où  $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$  est symétrique et  $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$  est antisymétrique.*

- 1 L'espace vectoriel des matrices
- 2 Le produit matriciel
- 3 Inverse d'une matrice
- 4 Matrices particulières
- 5 Similitude de matrices
  - Matrice de passage
  - Changement de base
  - Matrices équivalentes/semblables
  - Rang d'une matrice



**Définition 5.1 (Matrice de passage)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie  $n$ , muni de deux bases  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  et  $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$ .

On appelle **matrice de passage** de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$  la matrice dans laquelle la  $j^{\text{e}}$  colonne est formée des coordonnées de  $\vec{e}'_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Elle se note  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ .

En d'autres termes,  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = [\text{Id}_E]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ .

Toute matrice de passage est **inversible**. Plus précisément :

**Proposition 5.2 (Inverse d'une matrice de passage)**

Si  $P$  est la **matrice de passage** d'une base  $\mathcal{B}$  vers une base  $\mathcal{B}'$  alors  $P$  est **inversible** et son inverse  $P^{-1}$  est la **matrice de passage** de  $\mathcal{B}'$  vers  $\mathcal{B}$ .

Et plus généralement :

**Proposition 5.3 (Un critère de base)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. muni d'une base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ .

Soit  $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $A$  la matrice de colonnes les coordonnées des vecteurs de la famille  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors :

$\mathcal{F}$  est une **base** de  $E$  ssi  $A$  est **inversible**.

**Proposition 5.4 (Changement de base pour un vecteur)**

Soit  $\vec{u} \in E$ . La matrice colonne  $X$  des coordonnées de  $\vec{u}$  dans  $\mathcal{B}$  et la matrice colonne  $X'$  des coordonnées de  $\vec{u}$  dans  $\mathcal{B}'$  vérifient les égalités équivalentes :

$$X = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X' \quad \text{et} \quad X' = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} X.$$

Et on a la même chose pour les matrices :

**Proposition 5.5 (Changement de base pour une matrice)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, muni de deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , et soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, muni de deux bases  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Introduisons  $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  et  $Q = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ , ainsi que  $A = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  et  $A' = [f]_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}$ . Ces matrices vérifient les égalités équivalentes :

$$A' = Q^{-1} A P \quad \text{et} \quad A = Q A' P^{-1}.$$

**Définition 5.6 (Matrices équivalentes)**

Deux matrices  $A$  et  $A'$  vérifiant une relation de la forme  $A' = Q^{-1} A P$ , où  $P$  et  $Q$  sont des matrices inversibles, sont dites **équivalentes**.

Elles représentent une **même** application linéaire relativement à des bases différentes.

### Proposition 5.7 (Cas des endomorphismes)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie muni de deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Introduisons  $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  ainsi que  $A = [f]_{\mathcal{B}}$  et  $A' = [f]_{\mathcal{B}'}$ .

Ces matrices vérifient les égalités équivalentes :

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PA'P^{-1}.$$

On peut retenir une sorte de « relation de Chasles » :

$$[f]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \times [f]_{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}.$$

### Définition 5.8 (Matrices semblables)

Deux matrices carrées  $A$  et  $A'$  vérifiant une relation de la forme  $A' = P^{-1}AP$ , où  $P$  est une matrice inversible, sont dites **semblables**.

Elles représentent donc le **même** endomorphisme dans deux bases différentes.

## Exemple 5.9 (Détermination d'une projection)

Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$  rapporté à sa base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan vectoriel  $P$  d'équation  $x - 2y + 3z = 0$  et la droite vectorielle  $D$  de vecteur directeur  $\vec{k}' = (1, 1, 1)$ .

Déterminons la **projection vectorielle**  $p$  sur le plan  $P$  parallèlement à la droite  $D$ .

① On vérifie tout d'abord que  $P$  et  $D$  sont **supplémentaires** dans  $E$ .  $P$  est engendré par les vecteurs  $\vec{i}' = (2, 1, 0)$  et  $\vec{j}' = (3, 0, -1)$ . En accolant la base  $(\vec{i}', \vec{j}')$  de  $P$  et la base  $(\vec{k}')$  de  $D$ , on constate que l'on obtient une **base**  $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  de  $E$ .

② Le plan  $P$  étant **invariant** dans la projection, on a  $p(\vec{i}') = \vec{i}'$  et  $p(\vec{j}') = \vec{j}'$ .

$D$  étant la **direction** de la projection, on a  $p(\vec{k}') = \vec{0}$ .

Dans la base  $\mathcal{B}'$ , l'endomorphisme  $p$  admet donc la matrice simple  $[p]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

③ Introduisons la **matrice de passage**  $Q = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Pour déterminer son inverse  $Q^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ , on exprime les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  :

$$\begin{cases} \vec{i} = 2\vec{i}' + \vec{j}' \\ \vec{j} = 3\vec{i}' - \vec{k}' \\ \vec{k} = \vec{i}' + \vec{j}' + \vec{k}' \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{i}' = \frac{1}{2}(-\vec{i} + \vec{j}' + \vec{k}') \\ \vec{j}' = 2\vec{i}' - \vec{j}' - \vec{k}' \\ \vec{k}' = \frac{1}{2}(-3\vec{i}' + \vec{j}' + 3\vec{k}') \end{cases} \quad \text{d'où } Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

## Exemple 5.9 (Détermination d'une projection)

Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$  rapporté à sa base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le plan vectoriel  $P$  d'équation  $x - 2y + 3z = 0$  et la droite vectorielle  $D$  de vecteur directeur  $\vec{k}' = (1, 1, 1)$ .

Déterminons la **projection vectorielle**  $p$  sur le plan  $P$  parallèlement à la droite  $D$ .

④ En conclusion,  $p$  admet pour **matrice dans la base**  $\mathcal{B}$  :

$$[p]_{\mathcal{B}} = Q[p]_{\mathcal{B}'}Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit **analytiquement**

$$p: \quad E \longrightarrow E \\ (x, y, z) \longmapsto \left( \frac{1}{2}(x + 2y - 3z), \frac{1}{2}(-x + 4y - 3z), \frac{1}{2}(-x + 2y - z) \right)$$

⑤ À titre de vérification, on peut voir que

- $([p]_{\mathcal{B}})^2 = [p]_{\mathcal{B}}$ , donc  $p \circ p = \text{Id}_E$  et  $p$  est bien une projection vectorielle ;
- $\text{Ker } p = \{(x, y, z) \in E : x = y = z\} = D$   
et  $\text{Im } p = \text{Vect}((1, -1, -1), (1, 2, 1)) = P$ ,  
donc  $p$  est bien la projection vectorielle de  $E$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .

**Définition 5.10 (Rang d'une matrice)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle **rang** de  $A$ , et on note  $\text{rg}(A)$ , le rang des  $p$  colonnes de  $A$  considérées comme une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ .

**Proposition 5.11**

Deux matrices **équivalentes** ou **semblables** ont le **même rang**.

D'où une propriété d'**invariance** importante :

**Proposition 5.12 (Rang matrice/application linéaire)**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

Pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , le rang de la matrice  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  **ne dépend pas du choix des bases**  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  : il est toujours égal à  $\text{rg}(f)$ .

**Proposition 5.13 (Rang et inversibilité)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice **carrée**. Alors  $A$  est **inversible** ssi  $\text{rg}(A) = n$ .

## Représentation matricielle d'un système linéaire

Soit  $(\mathcal{S})$  un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues dans  $\mathbb{K}$  de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Posons  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$  est  $A$ , et soit  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$  et  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ .

**Résoudre le système  $(\mathcal{S})$**  est équivalent à **résoudre l'équation matricielle  $AX=B$**  d'inconnue  $X$ , qui est encore équivalent à **résoudre l'équation fonctionnelle  $f(x)=b$**  d'inconnue  $x$ .

### Proposition 5.14 (Rang d'un système linéaire)

Avec les notations précédemment définies :

- ① on a  $\text{rg}(\mathcal{S}) = \text{rg}(A) = \text{rg}(f)$ ;
- ② si  $\text{rg}(\mathcal{S}) = n = p$ , alors  $(\mathcal{S})$  admet une **unique** solution donnée par  $X = A^{-1}B$ .

## Notions à retenir

- Matrices
  - ★ Calcul matriciel (somme, produit, inverse, transposition)
  - ★ Lien avec les applications linéaires
  - ★ Lien avec les systèmes linéaires
  - ★ Matrice de passage et changement de base
  - ★ Rang