INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Suites numériques

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1[er] cycle, 1[re] année

Sommaire

1. Rappels sur les suites
   - Monotonie d'une suite réelle
   - Suites majorées, minorées, bornées
2. Limite d'une suite
   - Suites convergentes
   - Propriétés des limites
3. Suites extraites
4. Suites adjacentes
5. Suites récurrentes
   - Définition
   - Monotonie de la fonction associée
   - Points fixes d'une fonction
   - Fonctions lipschitziennes/contractantes
   - Théorème du point fixe
   - Illustration d'une suite récurrente
6. Approximation des zéros d'une fonction : méthode de Newton
   - Principe de la méthode
   - Convergence de la méthode
   - Vitesse de convergence de la méthode

Définition 1.1 (Monotonie)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***réelle****.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) lorsque :*
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}\geqslant u_n \qquad (\text{resp. } u_{n+1}>u_n)$$
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) lorsque :*
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}\leqslant u_n \qquad (\text{resp. } u_{n+1}<u_n)$$
3. *On dit qu'une suite réelle est* ***monotone*** *(resp.* ***strictement monotone****) lorsqu'elle est* ***croissante ou décroissante*** *(resp.* ***strictement croissante ou strictement décroissante****).*

Remarque 1.2 (Méthodes)

Il y a plusieurs manières d'étudier les variations d'une suite :
- on peut étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$;
- si $u_n=f(n)$ avec f fonction réelle, on peut étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$;
- si tous les termes sont **de signe constant**, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Définition 1.3 (Cas des suites réelles)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***réelle****.*

1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***majorée*** *lorsque*
$$\exists A\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant A.$$
A est alors un ***majorant*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***minorée*** *lorsque*
$$\exists B\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant B.$$
B est alors un ***minorant*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *On dit qu'une suite réelle est* ***bornée*** *lorsqu'elle est* ***majorée et minorée****. De manière équivalente : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***bornée*** *ssi*
$$\exists M\in\mathbb{R}^+,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant M.$$

Définition 1.4 (Cas des suites complexes)

On dit que la suite ***complexe*** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***bornée*** *lorsque*
$$\exists M\in\mathbb{R}^+,\quad \forall n\in\mathbb{N}\,,\quad |u_n|\leqslant M.$$

Proposition 1.5 (Cas des suites complexes)

La suite ***complexe*** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***bornée*** *ssi les suites* ***réelles*** *$\big(\Re e(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\Im m(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont* ***bornées****.*

Définition 2.1 (Limite finie)

On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge vers*** *le nombre ℓ lorsque*
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (n>N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon).$$
On dit que ℓ est la ***limite*** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.*

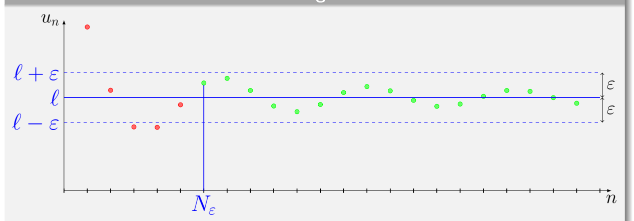
Proposition 2.2

Toute suite ***convergente*** *est* ***bornée****. La réciproque est* ***fausse****.*

Définition 2.3 (Divergence)

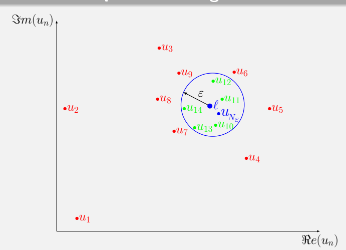
Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle ***diverge****, c'est-à-dire :*
$$\forall\ell\in\mathbb{R}\,(ou\ \mathbb{C}),\quad \exists\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall N\in\mathbb{N},\quad \exists n\in\mathbb{N},\quad (n>N \text{ et } |u_n-\ell|>\varepsilon)$$
En particulier, pour une suite ***réelle divergente*** *:*
1. *on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ lorsque*
$$\forall A\in\mathbb{R},\quad \exists n_A\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (n>n_A\Longrightarrow u_n>A);$$
2. *on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ lorsque*
$$\forall B\in\mathbb{R},\quad \exists n_B\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (n>n_B\Longrightarrow u_n<B).$$

Illustration d'une suite réelle convergente



$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (n>N_\varepsilon\Longrightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon)$$
ou encore $n>N_\varepsilon \Longrightarrow u_n\in\,]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$

Illustration d'une suite complexe convergente



$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (n>N_\varepsilon\Longrightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon)$$
ou encore $n>N_\varepsilon\Longrightarrow u_n\in\mathcal{D}_{\ell,\varepsilon}$

Remarque 2.4

Les effets sur les limites des **opérations usuelles** (somme, produit, quotient) sont les mêmes que ceux vus pour les limites de fonctions.

On a en particulier les mêmes formes indéterminées lorsqu'il s'agit
- de la **somme** de deux suites de limites respectives $+\infty$ et $-\infty$;
- du **produit** de deux suites de limites respectives ∞ et 0 ;
- du **quotient** de deux suites de limites ∞ ou de limites nulles toutes les deux.

On pourra être amené aussi à utiliser des **équivalents** et des **développements limités** dans les mêmes conditions que celles pour les fonctions.

Proposition 2.5 (Cas des suites complexes)

1. *La suite* ***numérique*** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge*** *vers le nombre (réel ou complexe) ℓ ssi la suite* ***réelle*** *$(|u_n-\ell|)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge vers 0****.*
2. *La suite* ***complexe*** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge*** *vers le complexe ℓ ssi les suites* ***réelles*** *$\big(\Re e(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\Im m(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$* ***convergent*** *vers les* ***réels*** *$\Re e(\ell)$ et $\Im m(\ell)$.*

Proposition 2.6 (Limite et inégalités)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n$.
1. *Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.*

Théorème 2.7 (Théorème de l'encadrement)

Soit $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$.

Exemple 2.8

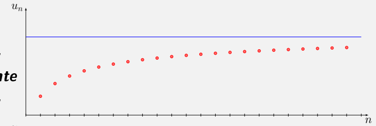
Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{\sin n}{n}$.

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-1\leqslant\sin n\leqslant 1$, puis $-\frac{1}{n}\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

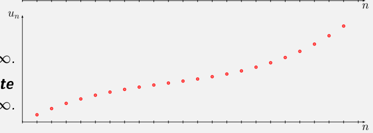
2. Limite d'une suite — b) Propriétés des limites

Proposition 2.9 (Monotonie et convergence)

1. *Toute suite réelle **croissante** et **majorée** est **convergente**.*
2. *Toute suite réelle **décroissante** et **minorée** est **convergente**.*



3. *Toute suite réelle **croissante** et **non majorée** tend vers $+\infty$.*
4. *Toute suite réelle **décroissante** et **non minorée** tend vers $-\infty$.*



Proposition 2.10 (Suites et fonctions)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'intervalle I. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et si f est **continue** en a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.*

3. Suites extraites

Définition 3.1 (Suites extraites)

*On dit que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ **strictement croissante** telle que pour tout entier n, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*
2. *Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite ℓ**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers ℓ**.*

Exemple 3.3

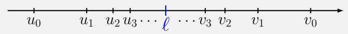
1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.
   On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$.
   Les limites de deux suites extraites étant **différentes**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.
2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
   On a $v_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = 1$
   ce qui entraîne la **convergence** de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 1.

4. Suites adjacentes

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

*Deux suites **réelles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une est **croissante** et l'autre est **décroissante** ;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.



Théorème 4.2

*Deux suites réelles **adjacentes** sont **convergentes** de **même limite**.*

Exemple 4.3 (L'exponentielle)

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$,
  donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes**.
On démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$...

4. Suites adjacentes

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.
     Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

   Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes**.
   On démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi^2}{4}$...

---

2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
   Posons $a_n = w_{2n}$ et $b_n = w_{2n+1}$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$.
     Donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - a_n = \frac{1}{2n+1}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

   Ainsi, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes** de même limite. On en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.
   On démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ln 2$...

5. Suites récurrentes — a) Définition

Définition 5.1 (Suite récurrente)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans I.
On étudie dans cette partie les suites réelles définies par une relation du type :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

*On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite récurrente de fonction associée f**.*

Remarque 5.2 (Cohérence)

La condition $f(I) \subset I$ assure que cette suite est bien définie : en effet, partant de $u_0 \in I$, on peut définir $u_1 = f(u_0)$. L'hypothèse entraîne $u_1 \in I$; on peut donc définir $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite.

Exemple 5.3 (Suites arithmétiques/géométriques)

1. Une suite **arithmétique** de raison r est une suite **récurrente** de fonction associée $f : x \longmapsto x + r$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Une suite **géométrique** de raison q est une suite **récurrente** de fonction associée $f : x \longmapsto qx$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5. Suites récurrentes — b) Monotonie de la fonction associée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente de fonction associée f définie sur I.
On peut donner des informations sur les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où la fonction f est **monotone** :

Proposition 5.4 (Monotonie)

1. *Si l'application f est **croissante** sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** et son sens de variation dépend de u_0 et u_1 :*
   - *si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** ;*
   - *si $u_1 \leqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.*
2. *Si l'application f est **décroissante** sur I alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **monotones** de **sens de variation opposés**.*

Remarque 5.5

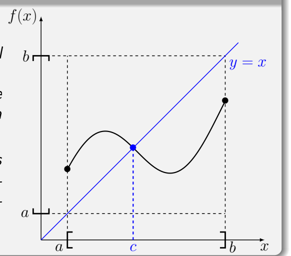
Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux pour fonction associée $f \circ f$.

1. Lorsque l'application f est **décroissante** sur I, l'application $f \circ f$ est **croissante**, ce qui justifie la **monotonie** des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. D'autre part, ces suites sont reliées par $u_{2n+1} = f(u_{2n})$. L'application f étant **décroissante**, on voit que les sens de variation sont opposés.

5. Suites récurrentes — c) Points fixes d'une fonction

Définition 5.6 (Point fixe)

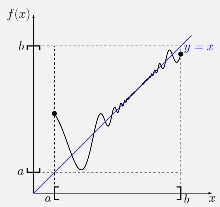
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
*On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ tel que $f(c) = c$.*
*Un **point fixe** de f est donc une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore un zéro de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.*
*Géométriquement les **points fixes** de f sont les abscisses des **points d'intersection** de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.*



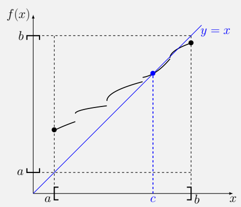
Proposition 5.7 (Continuité et point fixe)

1. *Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est **continue** alors f admet au moins un **point fixe**.*
2. *Si $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est **croissante** alors f admet au moins un **point fixe**.*
3. *Soit une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonction associée f.*
   *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\ell \in I$ et si f est **continue** sur I alors ℓ est un **point fixe** de f.*

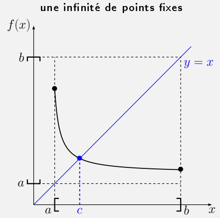
5. Suites récurrentes — c) Points fixes d'une fonction



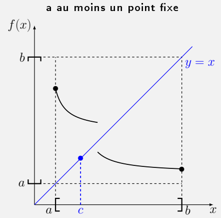
Une fonction peut avoir une infinité de points fixes



Une fonction croissante a au moins un point fixe



Une fonction décroissante continue a un unique point fixe



Une fonction discontinue peut ne pas avoir de point fixe

5. Suites récurrentes — d) Fonctions lipschitziennes/contractantes

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k sur I si*
  $$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$
- *Lorsque $\boldsymbol{k \in [0, 1[}$ et f est **lipschitzienne** de rapport k sur I, on dit que f est **k-contractante** sur I.*

Proposition 5.9 (Continuité/dérivabilité)

1. *Toute application **lipschitzienne** sur I est **continue** sur I.*
2. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$, **dérivable** sur $]a, b[$ et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leqslant k$.*
   *Alors f est **k-lipschitzienne** sur $[a, b]$.*

Exemple 5.10 (Racine carrée)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. On a $\sup\limits_{x\in[1/4,1]} |f'(x)| = 2$, $\sup\limits_{x\in[4,+\infty[} |f'(x)| = \frac{1}{2}$ et $\sup\limits_{x\in]0,1]} |f'(x)| = +\infty$.

Donc f est **lipschitzienne** de rapport 2 sur $[1/4, 1]$, **contractante** de rapport 1/2 sur $[4, +\infty[$ mais **pas lipschitzienne** sur $[0, 1]$.

Sous certaines conditions, il est possible de conclure à la convergence d'une suite récurrente dont la limite sera l'unique point fixe de la fonction associée.
Il s'agit du **théorème du point fixe** :

Théorème 5.11 (Théorème du point fixe)

*Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction k-**contractante**. Alors :*

1. *la fonction f admet un **unique point fixe** ℓ ;*
2. *toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonction associée f **converge** vers ℓ quel que soit son premier terme $u_0 \in [a, b]$ et l'on a*

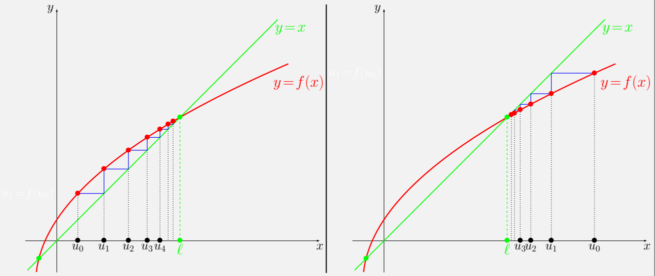
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n(b-a) \quad \text{et aussi} \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

Remarque 5.12

Le théorème du point fixe reste vrai si on remplace l'intervalle fermé borné $[a, b]$ par un intervalle fermé non borné, i.e. du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ ou $\mathbb{R}$ (ces intervalles sont appelés des **fermés** de $\mathbb{R}$).

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

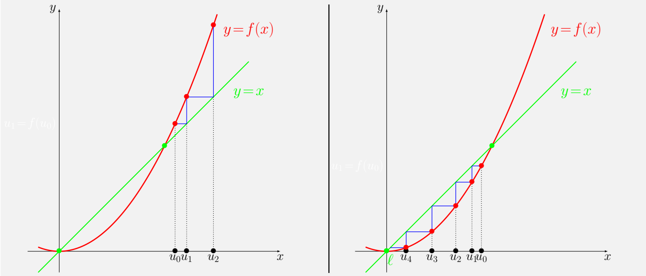
$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$



Partant de $u_0 = 1$:	Partant de $u_0 = 10$:
$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \cdots < \ell$	$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > \ell$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** et **converge** vers $\ell = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** et **converge** vers $\ell = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$

Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

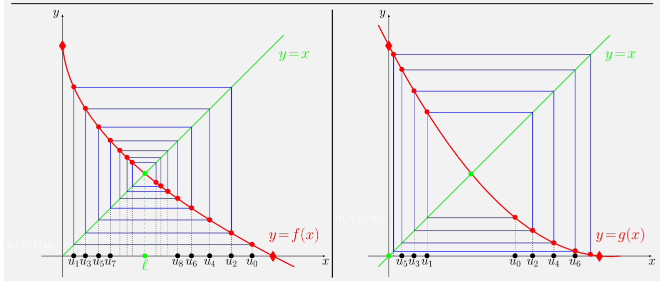
$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$



Partant de $u_0 = 5,5$:	Partant de $u_0 = 4,5$:
$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \cdots$	$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > \ell$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** et **diverge** vers $+\infty$	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** et **converge** vers $\ell = 0$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(21 - \sqrt{44x+1}\right) \qquad g(x) = \frac{1}{11}(x-10)(x-11)$$



Partant de $u_0 = 9$:	Partant de $u_0 = 6$:
$u_0 > u_2 > u_4 > u_6 > \cdots \quad u_1 < u_3 < u_5 < \cdots$	$u_0 < u_2 < u_4 < u_6 < \cdots \quad u_1 > u_3 > u_5 > \cdots$
La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**	La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers 1**
La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**	La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers 0**
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell = 16 - \sqrt{146}$	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge**

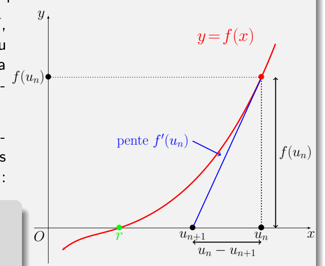
On considère une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles.

On cherche alors à approcher une éventuelle solution r de cette équation (appelée un **zéro de f**) à l'aide d'une suite récurrente que l'on construit de la manière suivante :

On fixe $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_{n+1} comme étant l'abscisse du point d'intersection avec l'axe (Ox) de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n.

Pour que cette construction itérative fonctionne, il faut faire des hypothèses sur la fonction f :

- H_1 : f est **dérivable** sur $[a, b]$;
- H_2 : f' **ne s'annule pas** sur $[a, b]$;
- H_3 : pour tout $x \in [a, b]$, $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \in [a, b]$.



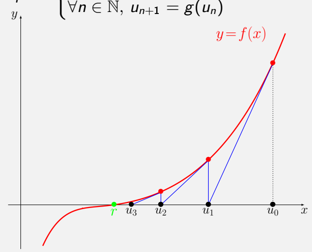
$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Une fois la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien définie avec les hypothèses sur f, il reste à s'assurer que cette suite converge bien vers un zéro de la fonction f. Là encore, il va falloir des hypothèses supplémentaires :

Théorème 6.1 (Méthode de Newton)

- *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses H_1, H_2, H_3.*
- *Soit $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ la fonction définie par $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.*
- *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$*

*Si la fonction g est **contractante** sur $[a, b]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers l'unique point fixe de g, qui est aussi l'**unique zéro** de f sur $[a, b]$.*



Le théorème du point fixe fournit une majoration de l'erreur $|u_n - r|$ entre l'approximation obtenue à la n^e itération de la méthode de Newton et le zéro de f.
En réalité, cette majoration est très grossière et on a une majoration bien plus fine de l'erreur :

Théorème 6.2 (Approximation quadratique)

- *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses H_1, H_2, H_3.*
- *Supposons de plus f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite construite par la méthode de Newton pour approcher un zéro r, alors il existe une constante C (qui dépend de f) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r| \leqslant \frac{1}{C}\left(C|u_0 - r|\right)^{2^n}.$$

Plus précisément, on peut choisir $C = \dfrac{M}{2m}$ où $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ et $m = \inf\limits_{[a,b]} |f'|$.

Ce qu'il faut surtout retenir de cette inégalité, c'est que la convergence de la méthode de Newton peut être très rapide, et que si $C|u_0 - r| < 1$ (c'est-à-dire qu'on démarre la méthode suffisamment proche de r), la convergence est **quadratique**, autrement dit, le nombre de décimales exactes **double** approximativement à chaque étape.

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/les_sucres_du_grand_Khong.pdf

Notions à retenir

- Suites numériques
  - Notion de convergence des suites réelles ou complexes ; cas de la convergence monotone
  - Suites extraites
  - Suites adjacentes
  - Suites récurrentes : cas d'une fonction itérative monotone ; théorème du point fixe
  - Méthode de Newton