

Suites numériques

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

- 1 Rappels sur les suites
 - Monotonie d'une suite réelle
 - Suites majorées, minorées, bornées
- 2 Limite d'une suite
 - Suites convergentes
 - Propriétés des limites
- 3 Suites extraites
- 4 Suites adjacentes
- 5 Suites récurrentes
 - Définition
 - Monotonie de la fonction associée
 - Points fixes d'une fonction
 - Fonctions lipschitziennes/contractantes
 - Théorème du point fixe
 - Illustration d'une suite récurrente
- 6 Approximation des zéros d'une fonction : méthode de Newton
 - Principe de la méthode
 - Convergence de la méthode
 - Vitesse de convergence de la méthode

- 1 Rappels sur les suites
 - Monotonie d'une suite réelle
 - Suites majorées, minorées, bornées
- 2 Limite d'une suite
- 3 Suites extraites
- 4 Suites adjacentes
- 5 Suites récurrentes
- 6 Approximation des zéros d'une fonction : méthode de Newton

Définition 1.1 (Monotonie)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **réelle**.

- ① On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** (resp. **strictement croissante**) lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} > u_n)$$

- ② On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} < u_n)$$

- ③ On dit qu'une suite réelle est **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est **croissante ou décroissante** (resp. **strictement croissante ou strictement décroissante**).

Remarque 1.2 (Méthodes)

Il y a plusieurs manières d'étudier les variations d'une suite :

- on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si $u_n = f(n)$ avec f fonction réelle, on peut étudier la monotonie de f sur \mathbb{R}^+ ;
- si tous les termes sont **de signe constant**, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Définition 1.3 (Cas des suites réelles)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **réelle**.

- ① On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** lorsque

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq A.$$

A est alors un **majorant** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ② On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** lorsque

$$\exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq B.$$

B est alors un **minorant** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ③ On dit qu'une suite réelle est **bornée** lorsqu'elle est **majorée et minorée**.

De manière équivalente : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** ssi

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Définition 1.4 (Cas des suites complexes)

On dit que la suite **complexe** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Proposition 1.5 (Cas des suites complexes)

La suite **complexe** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** ssi les suites **réelles** $(\Re(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Im(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont **bornées**.

- 1 Rappels sur les suites
- 2 Limite d'une suite
 - Suites convergentes
 - Propriétés des limites
- 3 Suites extraites
- 4 Suites adjacentes
- 5 Suites récurrentes
- 6 Approximation des zéros d'une fonction : méthode de Newton

Définition 2.1 (Limite finie)

On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers** le nombre ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On dit que ℓ est la **limite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Proposition 2.2

Toute suite **convergente** est **bornée**. La réciproque est **fausse**.

Définition 2.3 (Divergence)

Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**, c'est-à-dire :

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad (n > N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$$

En particulier, pour une suite **réelle divergente** :

① on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > n_A \implies u_n > A);$$

② on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ lorsque

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists n_B \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > n_B \implies u_n < B).$$

Illustration d'une suite réelle convergente

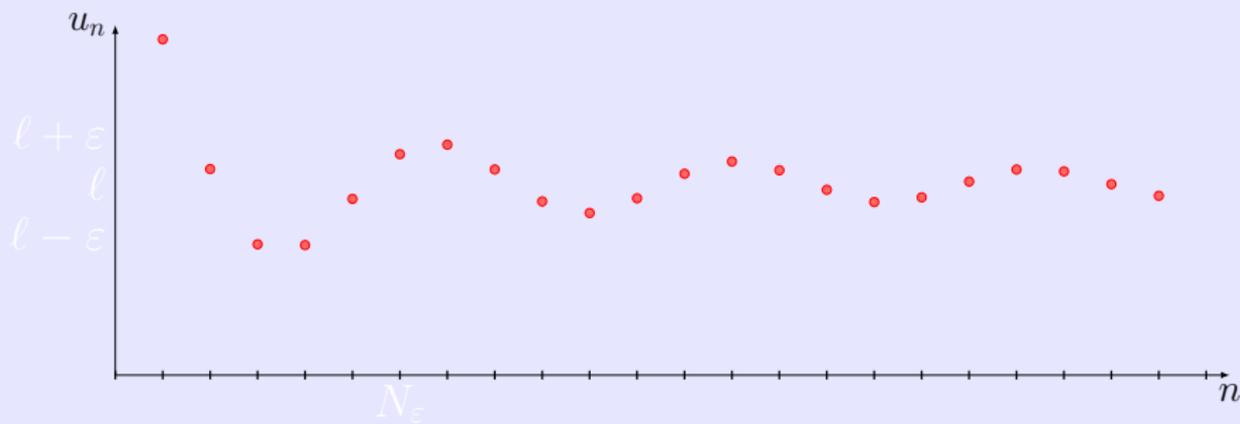


Illustration d'une suite réelle convergente

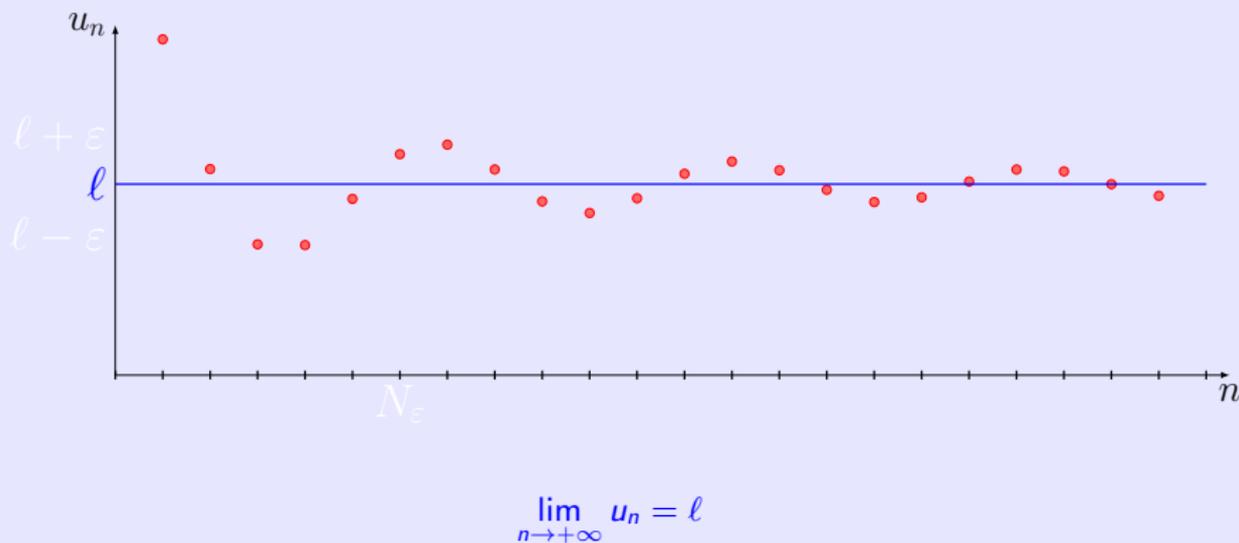
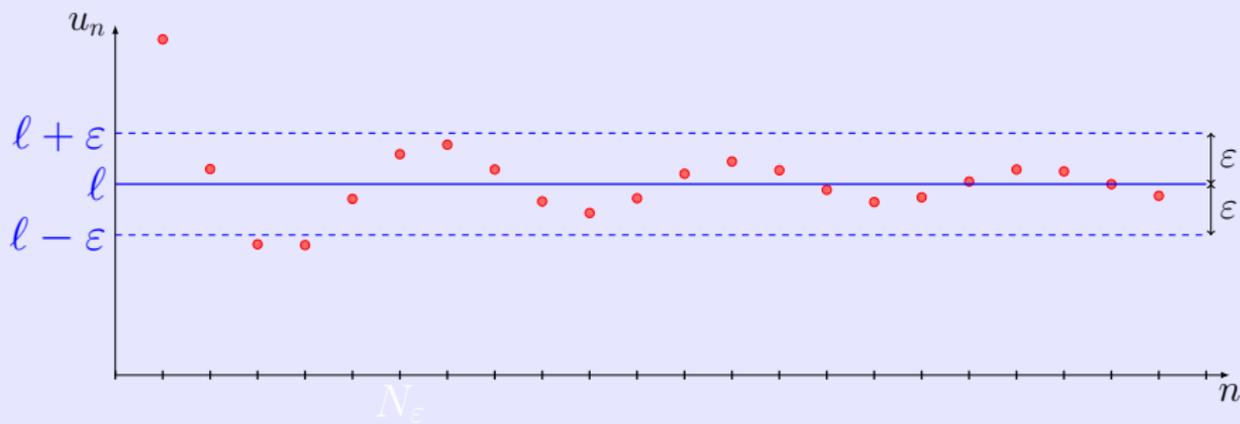


Illustration d'une suite réelle convergente

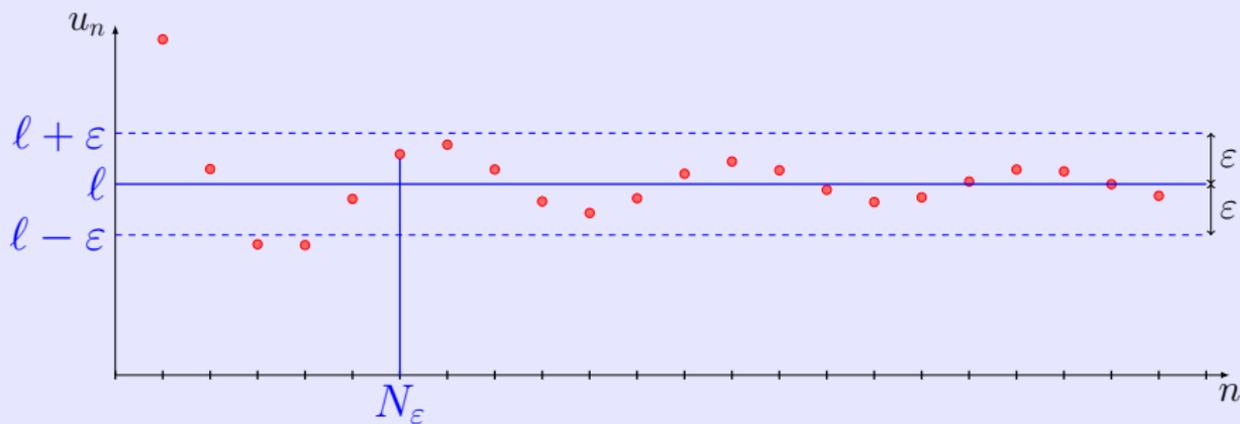


$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$



$$\forall \epsilon > 0,$$

Illustration d'une suite réelle convergente

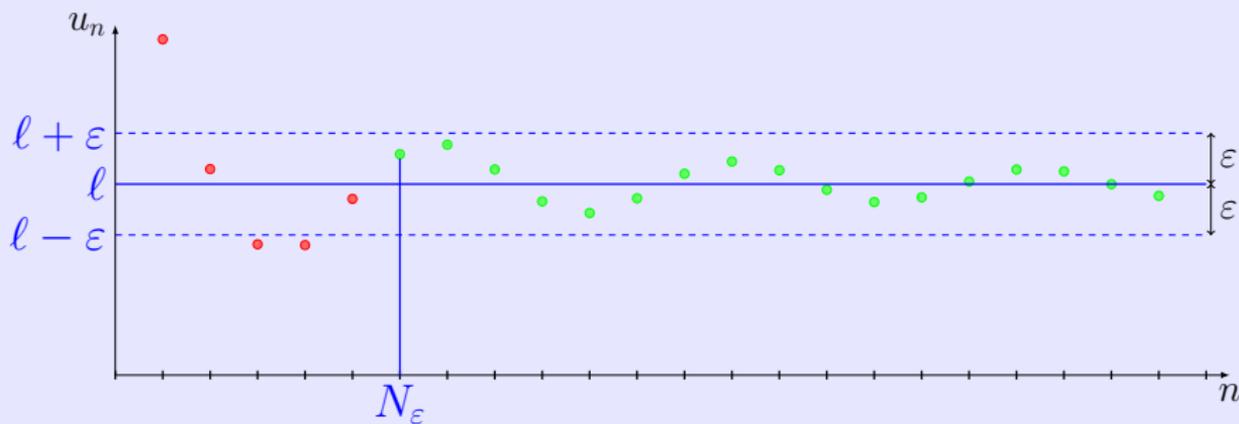


$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\iff$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},$$

Illustration d'une suite réelle convergente

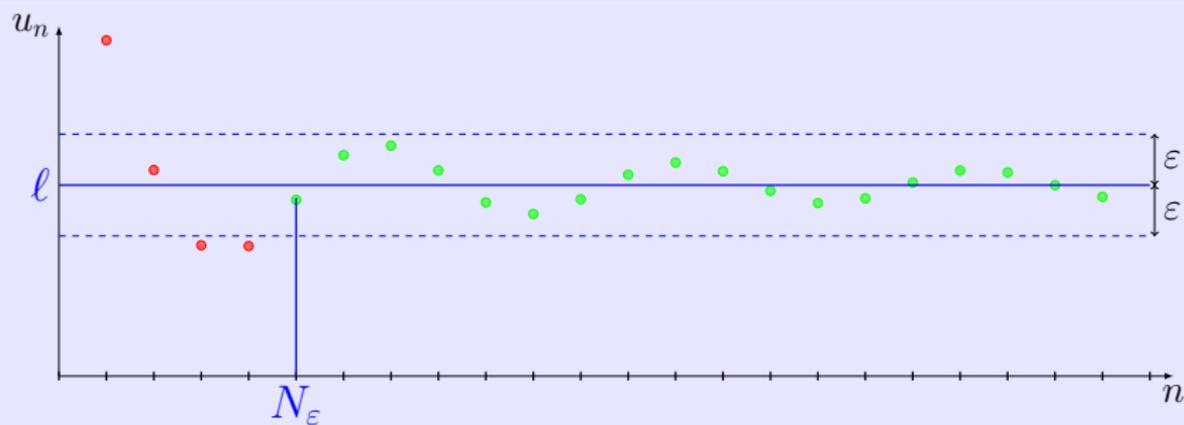


$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\iff$$

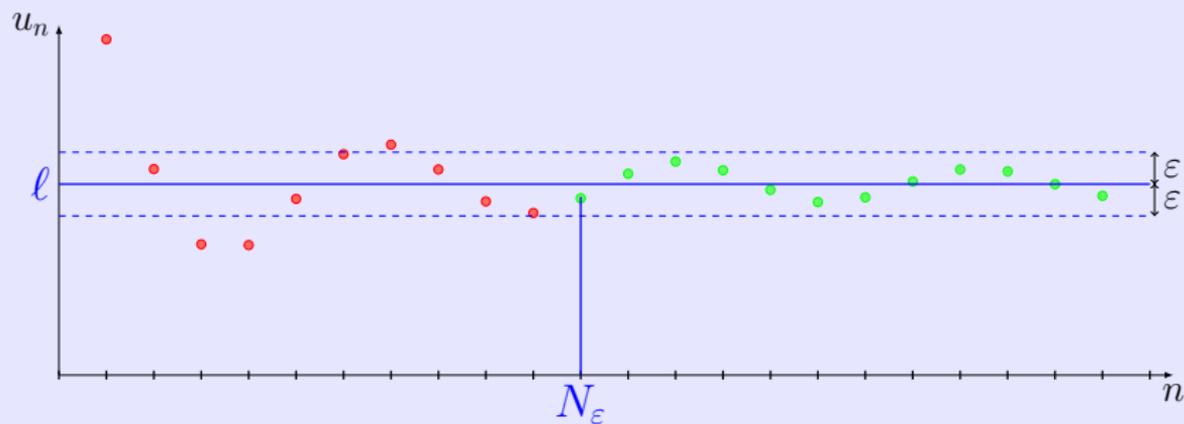
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \implies |u_n - l| < \varepsilon)$$

Illustration d'une suite réelle convergente



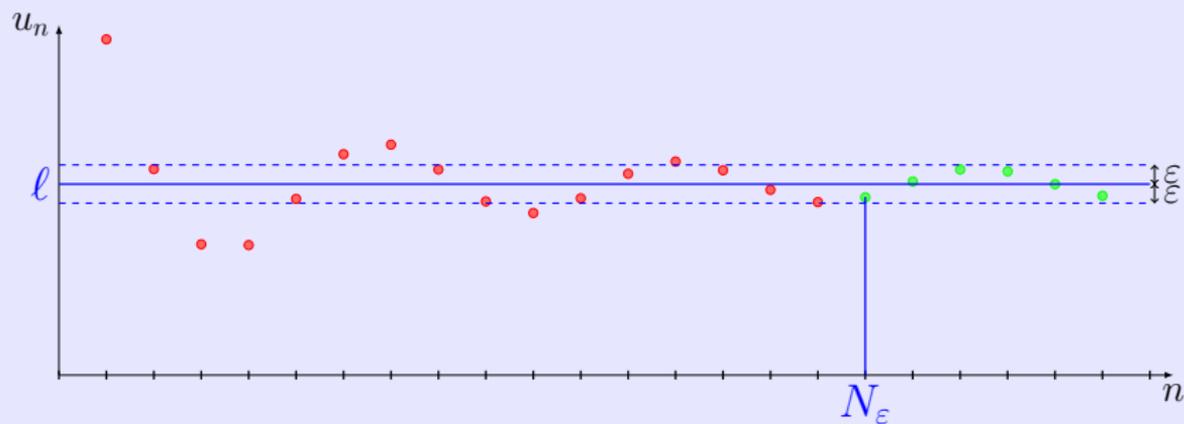
L'entier N_ϵ dépend naturellement de ϵ et il n'est pas unique.

Illustration d'une suite réelle convergente



L'entier N_ε dépend naturellement de ε et il n'est pas unique.

Illustration d'une suite réelle convergente



L'entier N_ε dépend naturellement de ε et il n'est pas unique.

Illustration d'une suite complexe convergente

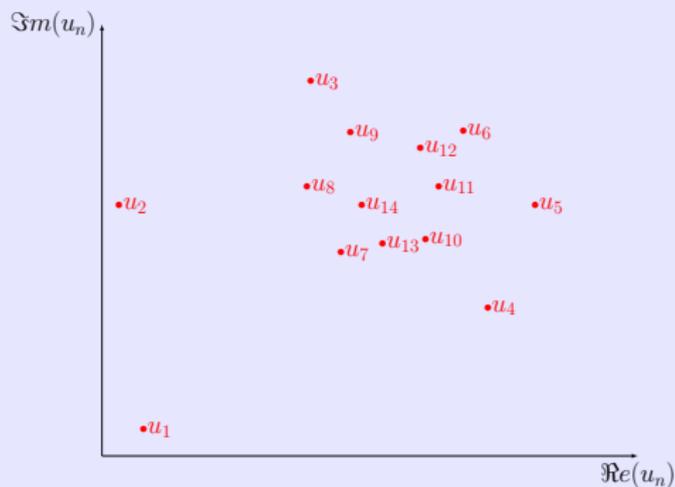
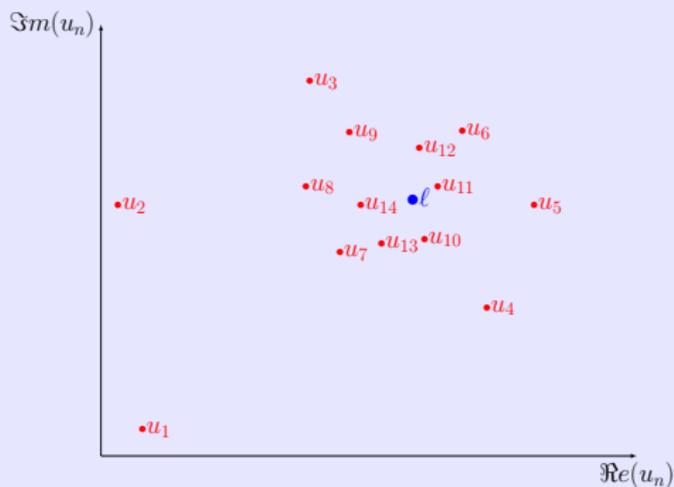
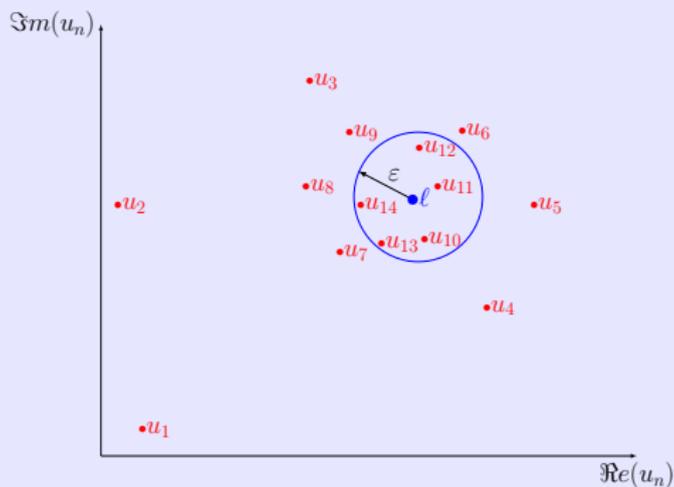


Illustration d'une suite complexe convergente



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Illustration d'une suite complexe convergente

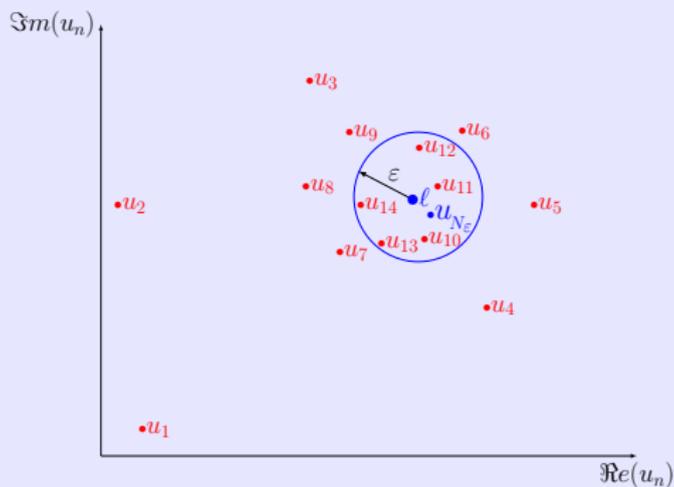


$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$



$$\forall \varepsilon > 0,$$

Illustration d'une suite complexe convergente

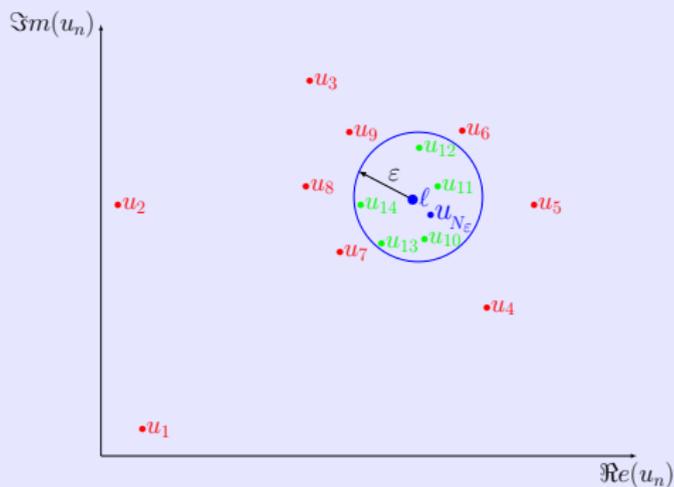


$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$



$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},$$

Illustration d'une suite complexe convergente

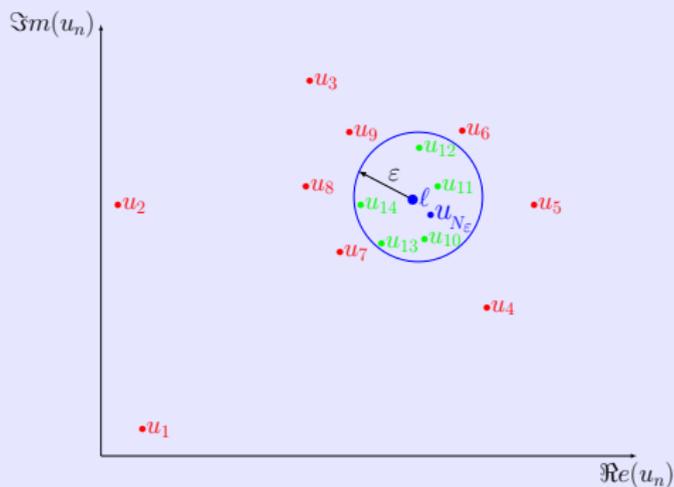


$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Illustration d'une suite complexe convergente



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > N_\varepsilon \implies |u_n - l| < \varepsilon)$$

$$\text{ou encore } n > N_\varepsilon \implies u_n \in \mathcal{D}_{l, \varepsilon}$$

Remarque 2.4

Les effets sur les limites des **opérations usuelles** (somme, produit, quotient) sont les mêmes que ceux vus pour les limites de fonctions.

On a en particulier les mêmes formes indéterminées lorsqu'il s'agit

- de la **somme** de deux suites de limites respectives $+\infty$ et $-\infty$;
- du **produit** de deux suites de limites respectives ∞ et 0 ;
- du **quotient** de deux suites de limites ∞ ou de limites nulles toutes les deux.

On pourra être amené aussi à utiliser des **équivalents** et des **développements limités** dans les mêmes conditions que celles pour les fonctions.

Proposition 2.5 (Cas des suites complexes)

- 1 La suite **numérique** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers le nombre (réel ou complexe) ℓ ssi la suite **réelle** $(|u_n - \ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers 0**.
- 2 La suite **complexe** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers le complexe ℓ ssi les suites **réelles** $(\Re(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Im(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ **convergent** vers les réels $\Re(\ell)$ et $\Im(\ell)$.

Proposition 2.6 (Limite et inégalités)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.

- ① Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- ② Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- ③ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 2.7 (Théorème de l'encadrement)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

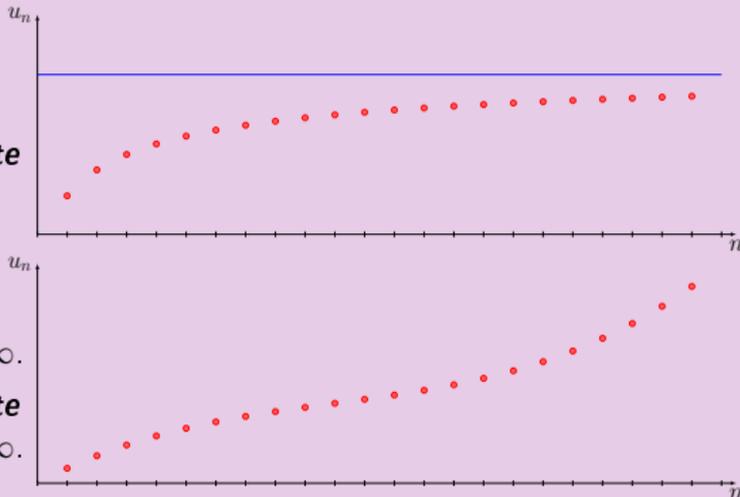
Exemple 2.8

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin n \leq 1$, puis $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Proposition 2.9 (Monotonie et convergence)

- ① Toute suite réelle **croissante** et **majorée** est **convergente**.
- ② Toute suite réelle **décroissante** et **minorée** est **convergente**.
- ③ Toute suite réelle **croissante** et **non majorée** tend vers $+\infty$.
- ④ Toute suite réelle **décroissante** et **non minorée** tend vers $-\infty$.



Proposition 2.10 (Suites et fonctions)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'intervalle I . Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- ① Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.
- ② Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et si f est **continue** en a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.

- 1 Rappels sur les suites
- 2 Limite d'une suite
- 3 Suites extraites**
- 4 Suites adjacentes
- 5 Suites récurrentes
- 6 Approximation des zéros d'une fonction : méthode de Newton

Définition 3.1 (Suites extraites)

On dit que la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une application φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} **strictement croissante** telle que pour tout entier n , $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Proposition 3.2 (Convergence et suites extraites)

- 1 Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers ℓ** , alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers ℓ** .
- 2 Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite ℓ** , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers ℓ** .

Exemple 3.3

- 1 Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.
On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$.
Les limites de deux suites extraites étant **différentes**, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente**.
- 2 Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.
On a $v_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ et $v_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = 1$
ce qui entraîne la **convergence** de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 1.

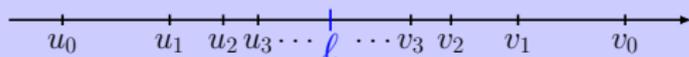
- 1 Rappels sur les suites
- 2 Limite d'une suite
- 3 Suites extraites
- 4 Suites adjacentes**
- 5 Suites récurrentes
- 6 Approximation des zéros d'une fonction : méthode de Newton

Définition 4.1 (Suites adjacentes)

Deux suites **réelles** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

① l'une est **croissante** et l'autre est **décroissante** ;

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.



Théorème 4.2

Deux suites réelles **adjacentes** sont **convergentes de même limite**.

Exemple 4.3 (L'exponentielle)

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, donc les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes**.

On démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e \dots$

Exemple 4.4 (Deux séries de Riemann)

① Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Posons $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$.

Donc les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes**.

On démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{4} \dots$

② Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Posons $a_n = w_{2n}$ et $b_n = w_{2n+1}$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$.

Donc les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement **croissante** et **décroissante**.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n - a_n = \frac{1}{2n+1}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, donc **convergentes** de même limite. On en déduit que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente**.

On démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ln 2 \dots$

- 1 Rappels sur les suites
- 2 Limite d'une suite
- 3 Suites extraites
- 4 Suites adjacentes
- 5 Suites récurrentes**
 - Définition
 - Monotonie de la fonction associée
 - Points fixes d'une fonction
 - Fonctions lipschitziennes/contractantes
 - Théorème du point fixe
 - Illustration d'une suite récurrente
- 6 Approximation des zéros d'une fonction : méthode de Newton

Définition 5.1 (Suite récurrente)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une application de I dans I .

On étudie dans cette partie les suites réelles définies par une relation du type :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **une suite récurrente de fonction associée f** .

Remarque 5.2 (Cohérence)

La condition $f(I) \subset I$ assure que cette suite est bien définie : en effet, partant de $u_0 \in I$, on peut définir $u_1 = f(u_0)$. L'hypothèse entraîne $u_1 \in I$; on peut donc définir $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite.

Exemple 5.3 (Suites arithmétiques/géométriques)

- 1 Une suite **arithmétique** de raison r est une suite **récurrente** de fonction associée $f : x \mapsto x + r$ définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- 2 Une suite **géométrique** de raison q est une suite **récurrente** de fonction associée $f : x \mapsto qx$ définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente de fonction associée f définie sur I .

On peut donner des informations sur les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le cas où la fonction f est **monotone** :

Proposition 5.4 (Monotonie)

- 1 Si l'application f est **croissante** sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone** et son sens de variation dépend de u_0 et u_1 :
 - si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** ;
 - si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante**.
- 2 Si l'application f est **décroissante** sur I alors les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont **monotones de sens de variation opposés**.

Remarque 5.5

Les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes les deux pour fonction associée $f \circ f$.

- 1 Lorsque l'application f est **décroissante** sur I , l'application $f \circ f$ est **croissante**, ce qui justifie la **monotonie** des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2 D'autre part, ces suites sont reliées par $u_{2n+1} = f(u_{2n})$. L'application f étant **décroissante**, on voit que les sens de variation sont opposés.

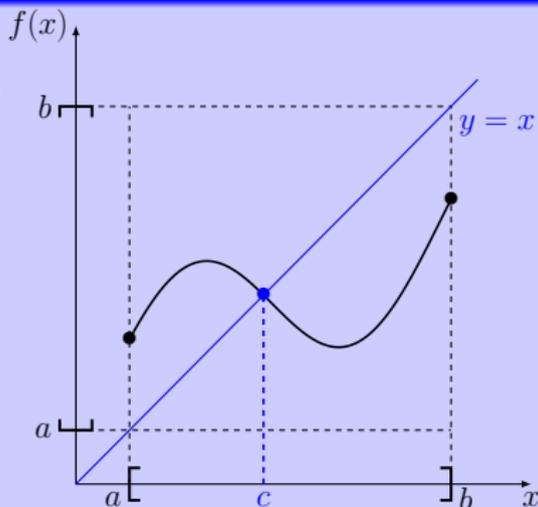
Définition 5.6 (Point fixe)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ tel que $f(c) = c$.

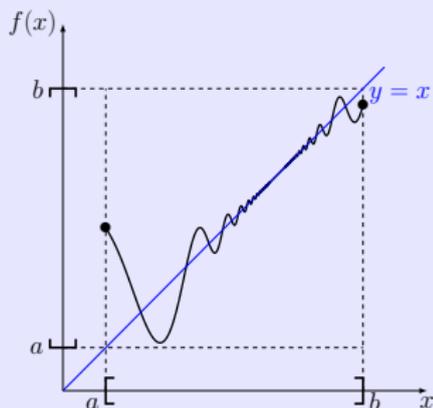
Un **point fixe** de f est donc une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore un zéro de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

Géométriquement les **points fixes** de f sont les abscisses des **points d'intersection** de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.

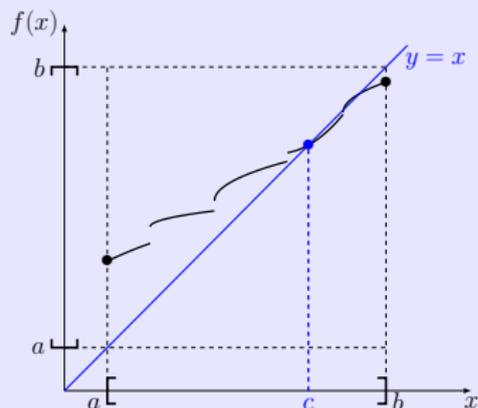


Proposition 5.7 (Continuité et point fixe)

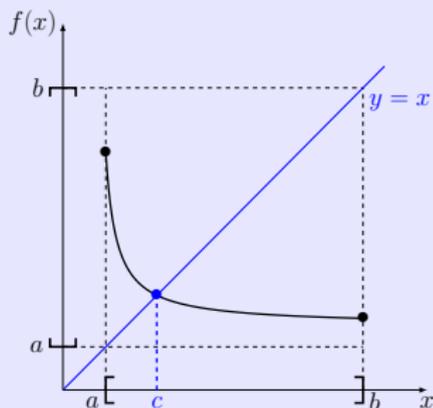
- ① Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est **continue** alors f admet au moins un **point fixe**.
- ② Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est **croissante** alors f admet au moins un **point fixe**.
- ③ Soit une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonction associée f .
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $\ell \in I$ et si f est **continue** sur I alors ℓ est un **point fixe** de f .



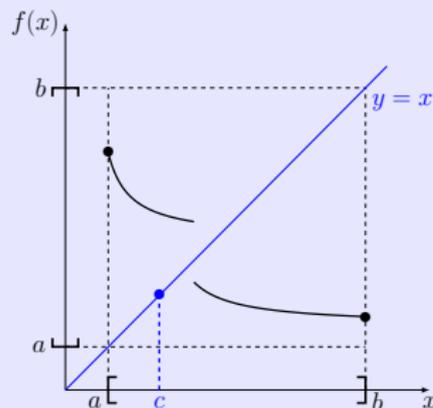
Une fonction peut avoir
une infinité de points fixes



Une fonction croissante
a au moins un point fixe



Une fonction décroissante continue
a un unique point fixe



Une fonction discontinue
peut ne pas avoir de point fixe

Définition 5.8 (Fonctions lipschitziennes/contractantes)

Soit f une application définie sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}_+$.

- On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

- Lorsque $k \in [0, 1[$ et f est **lipschitzienne** de rapport k sur I , on dit que f est **k -contractante** sur I .

Proposition 5.9 (Continuité/dérivabilité)

- 1 Toute application **lipschitzienne** sur I est **continue** sur I .
- 2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$, **dérivable** sur $]a, b[$ et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq k$.

Alors f est **k -lipschitzienne** sur $[a, b]$.

Exemple 5.10 (Racine carrée)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. On a $\sup_{x \in [1/4, 1]} |f'(x)| = 2$, $\sup_{x \in [4, +\infty[} |f'(x)| = \frac{1}{2}$ et $\sup_{x \in]0, 1]} |f'(x)| = +\infty$.

Donc f est **lipschitzienne** de rapport 2 sur $[1/4, 1]$, **contractante** de rapport 1/2 sur $[4, +\infty[$ mais **pas lipschitzienne** sur $[0, 1]$.

Sous certaines conditions, il est possible de conclure à la convergence d'une suite récurrente dont la limite sera l'unique point fixe de la fonction associée.

Il s'agit du **théorème du point fixe** :

Théorème 5.11 (Théorème du point fixe)

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction k -contractante. Alors :

- 1 la fonction f admet un **unique point fixe** ℓ ;
- 2 toute suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonction associée f **converge** vers ℓ quel que soit son premier terme $u_0 \in [a, b]$ et l'on a

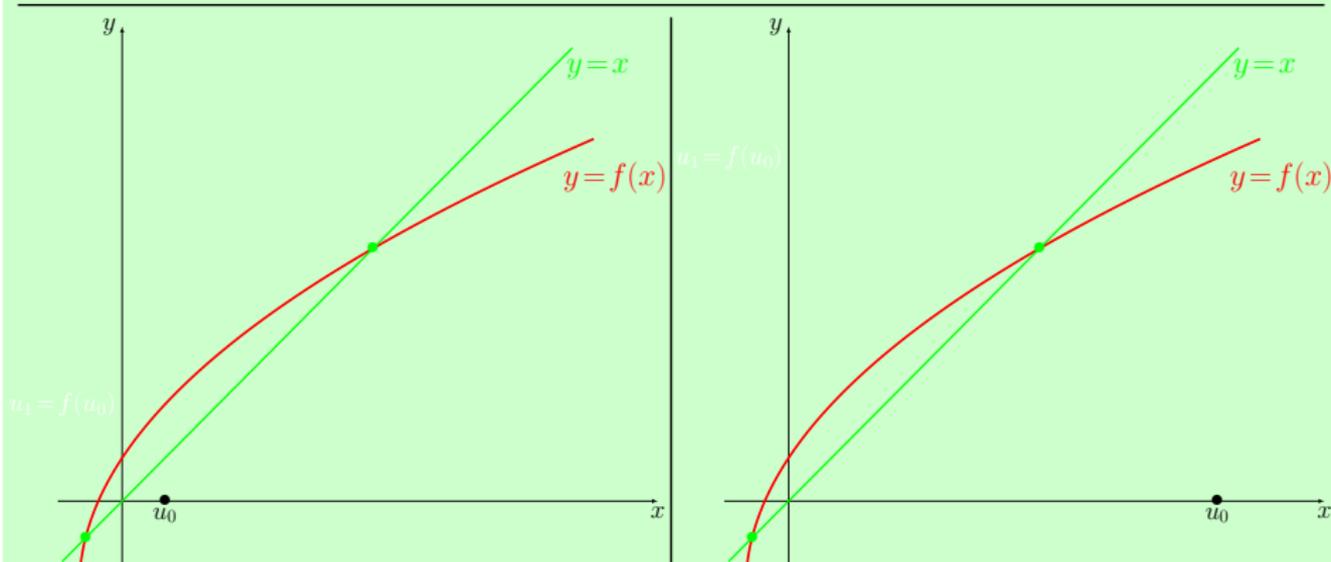
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n(b - a) \quad \text{et aussi} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{k^n}{1 - k} |u_1 - u_0|.$$

Remarque 5.12

Le théorème du point fixe reste vrai si on remplace l'intervalle fermé borné $[a, b]$ par un intervalle fermé non borné, i.e. du type $[a, +\infty[$ ou $] - \infty, a]$ ou \mathbb{R} (ces intervalles sont appelés des **fermés** de \mathbb{R}).

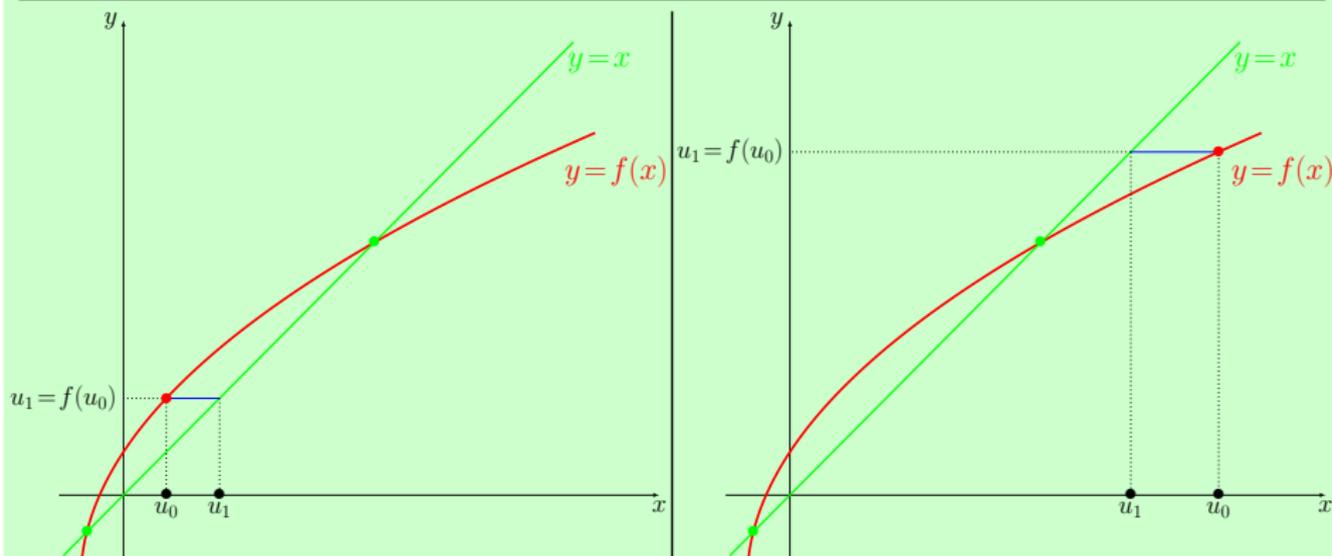
Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$

Partant de $u_0 = 1$:Partant de $u_0 = 10$:

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$

Partant de $u_0 = 1$:

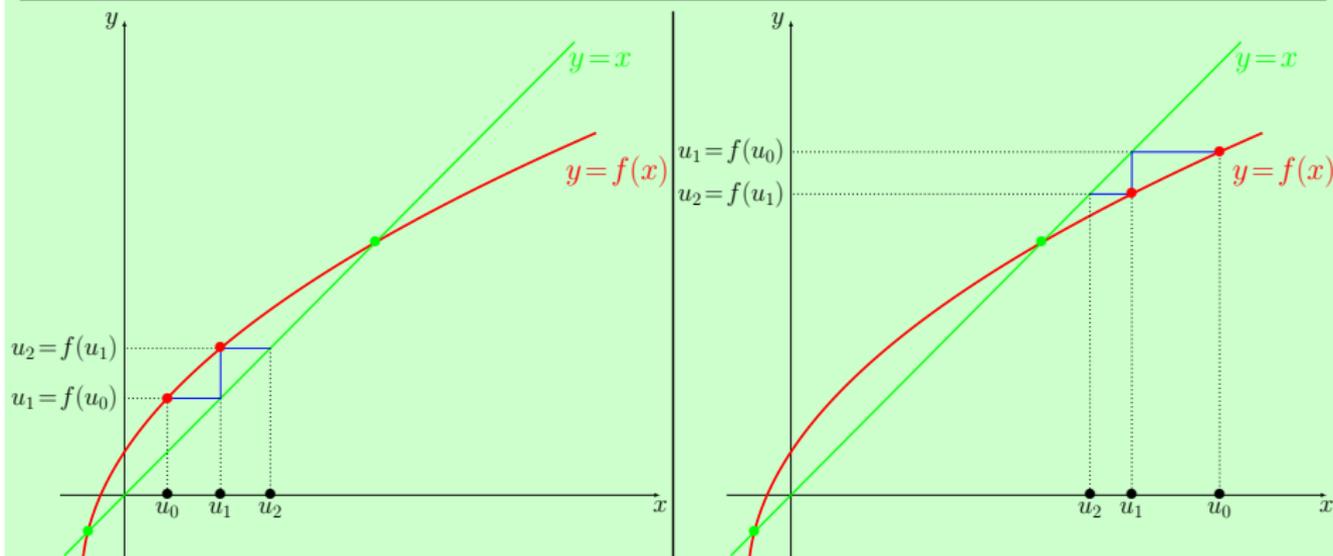
$$u_0 < u_1$$

Partant de $u_0 = 10$:

$$u_0 > u_1$$

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$

Partant de $u_0 = 1$:

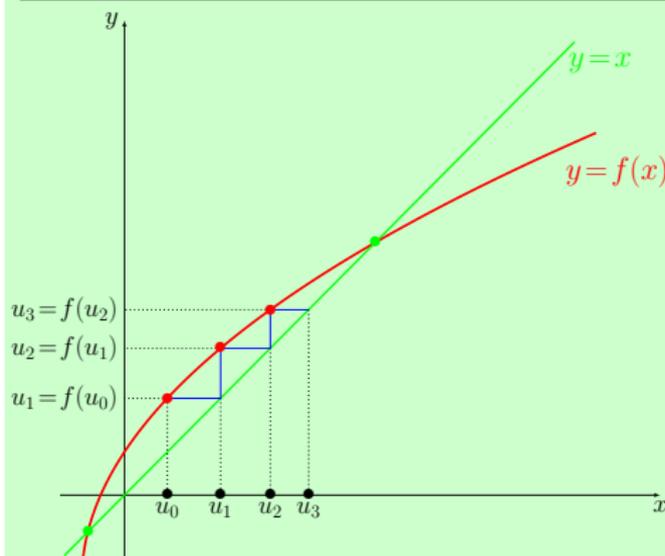
$$u_0 < u_1 < u_2$$

Partant de $u_0 = 10$:

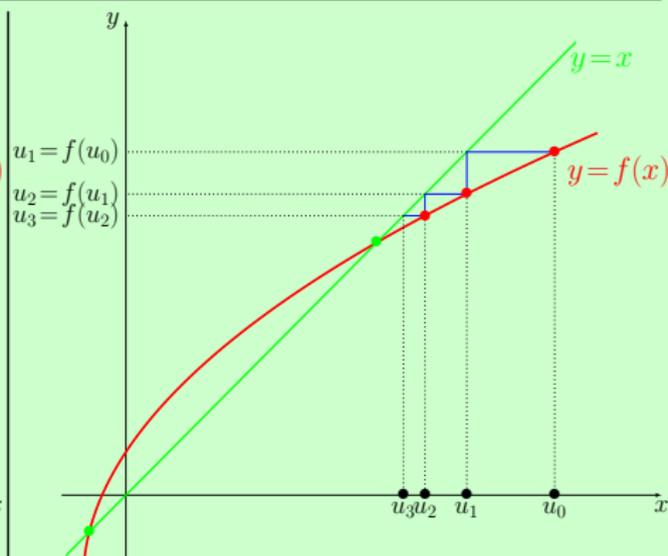
$$u_0 > u_1 > u_2$$

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$

Partant de $u_0 = 1$:

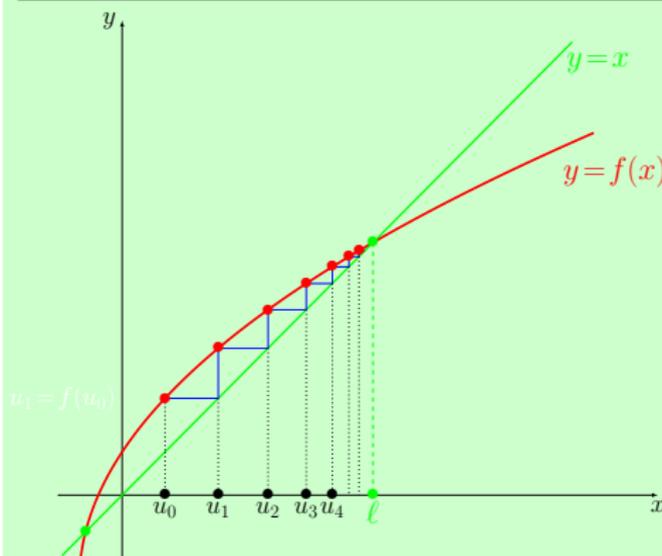
$$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$$

Partant de $u_0 = 10$:

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$$

Exemple 5.13 (Cas d'une fonction croissante)

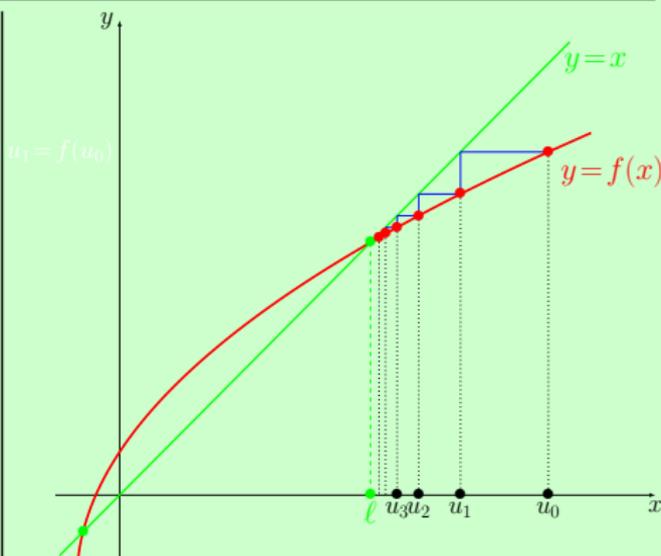
$$f(x) = 3\sqrt{x+1} - 2$$



Partant de $u_0 = 1$:

$$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \dots < l$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**
et **converge** vers $l = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$



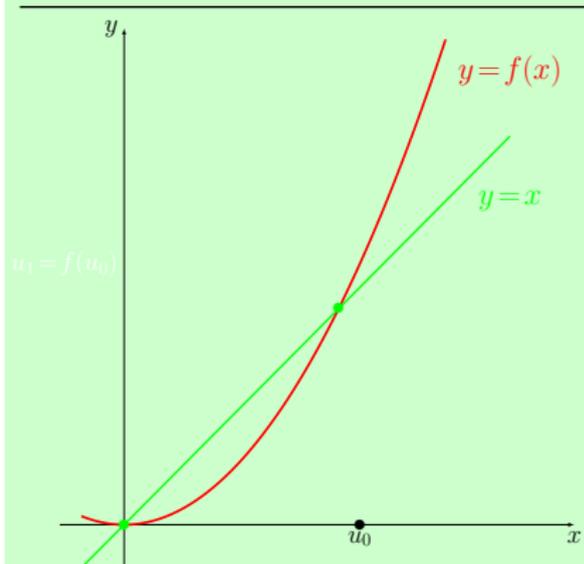
Partant de $u_0 = 10$:

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > \dots > l$$

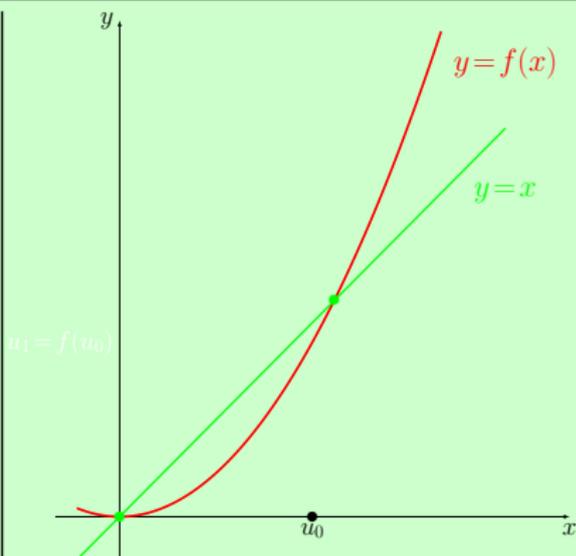
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante**
et **converge** vers $l = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$

Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$



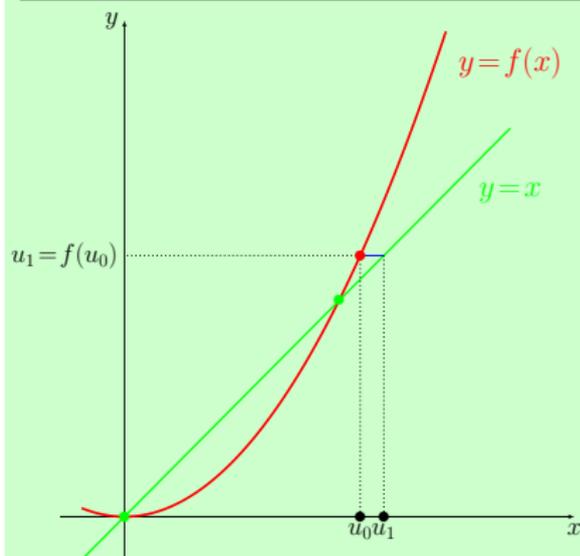
Partant de $u_0 = 5,5$:



Partant de $u_0 = 4,5$:

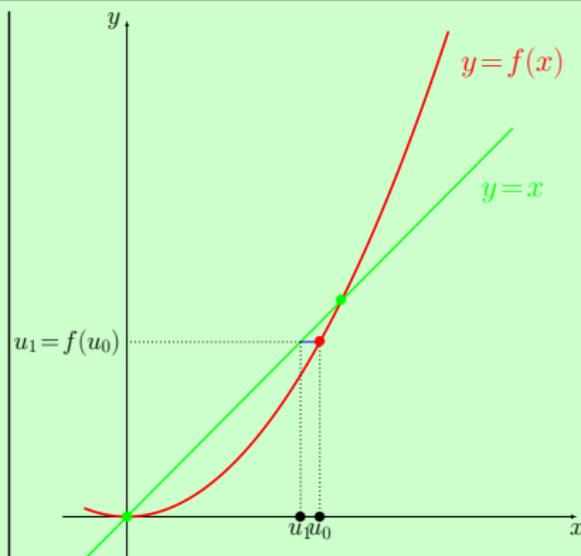
Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$



Partant de $u_0 = 5,5$:

$$u_0 < u_1$$

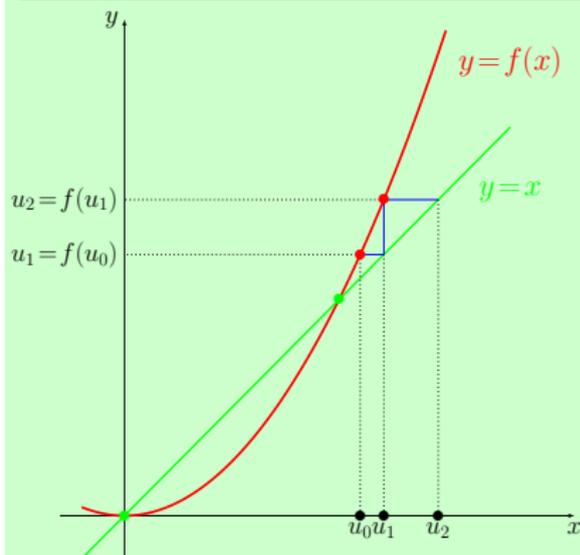


Partant de $u_0 = 4,5$:

$$u_0 > u_1$$

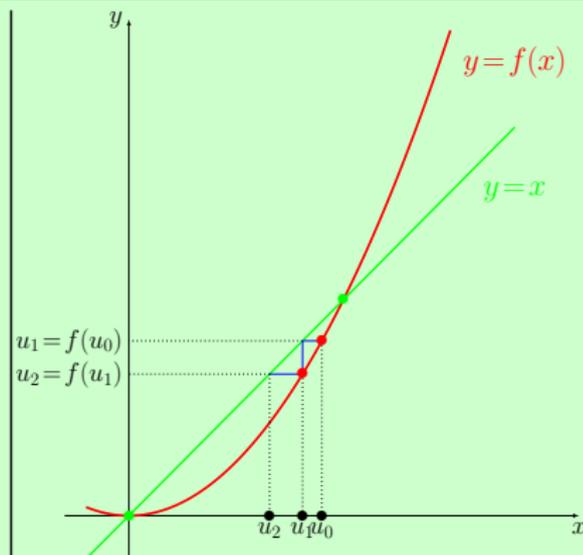
Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$



Partant de $u_0 = 5,5$:

$$u_0 < u_1 < u_2$$

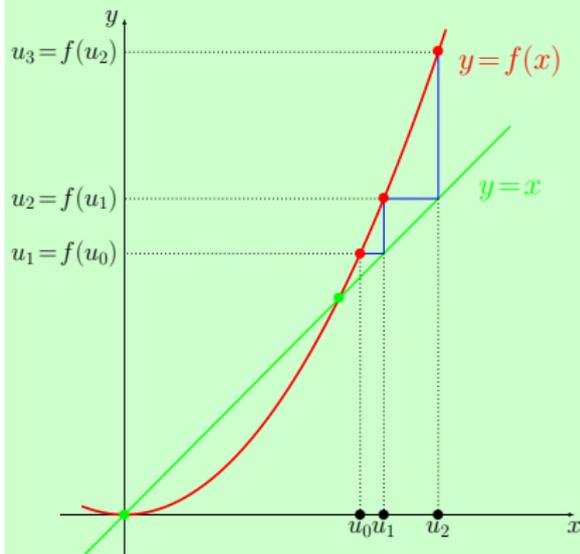


Partant de $u_0 = 4,5$:

$$u_0 > u_1 > u_2$$

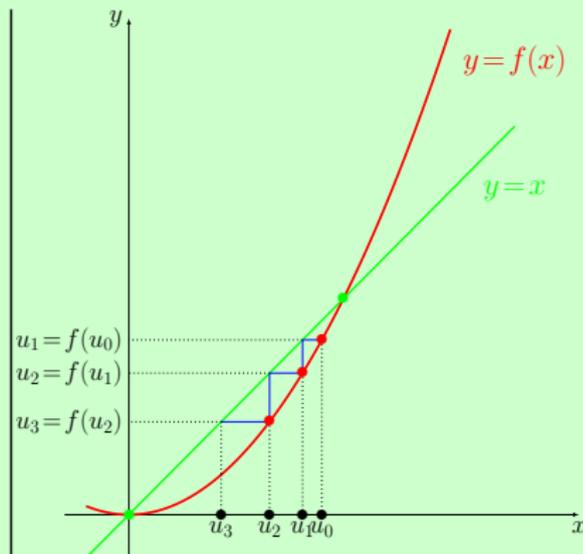
Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$



Partant de $u_0 = 5,5$:

$$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$$

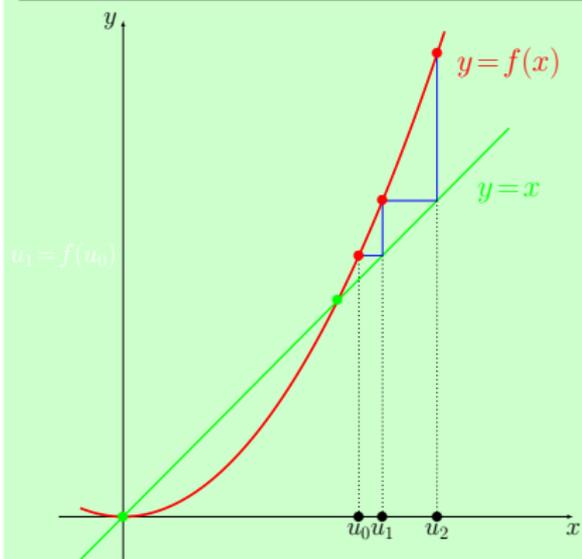


Partant de $u_0 = 4,5$:

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$$

Exemple 5.14 (Cas d'une fonction croissante)

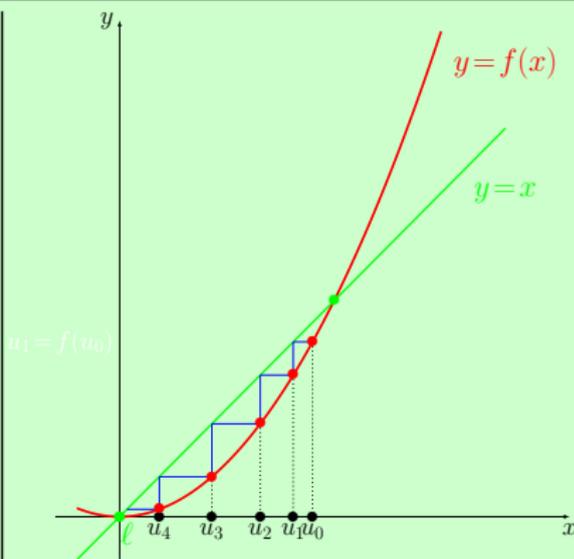
$$f(x) = \frac{1}{5}x^2$$



Partant de $u_0 = 5,5$:

$$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \dots$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**
et **diverge** vers $+\infty$



Partant de $u_0 = 4,5$:

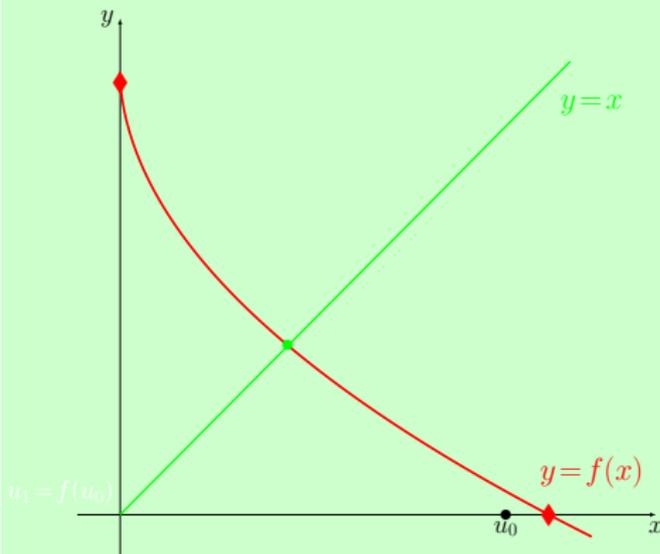
$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > \dots > \ell$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante**
et **converge** vers $\ell = 0$

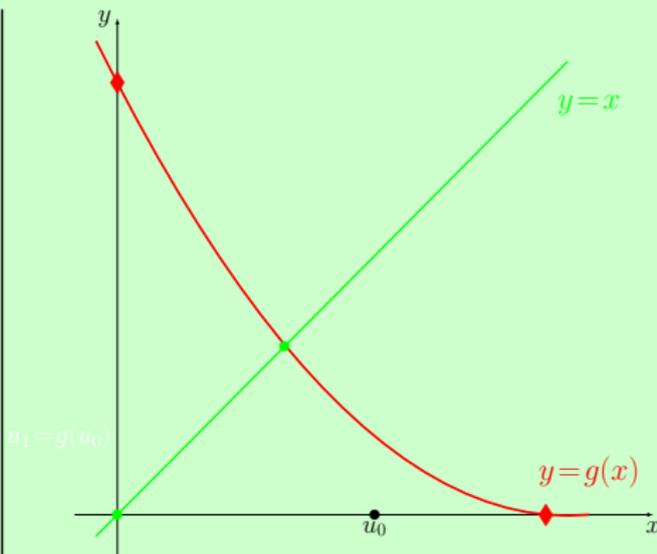
Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$



Partant de $u_0 = 9$:

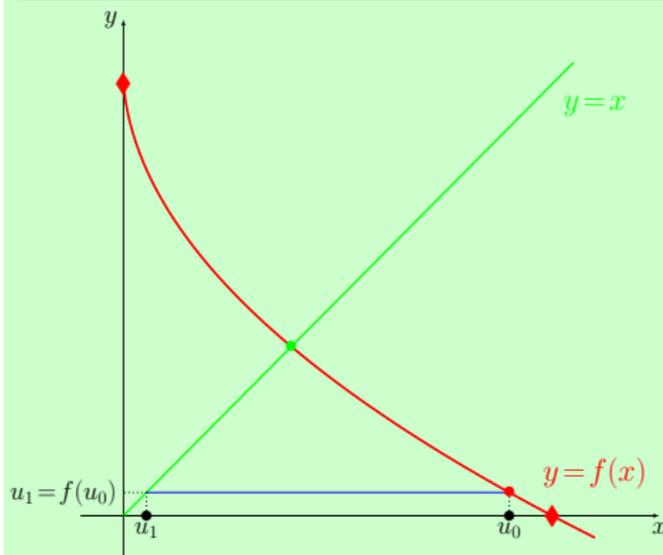
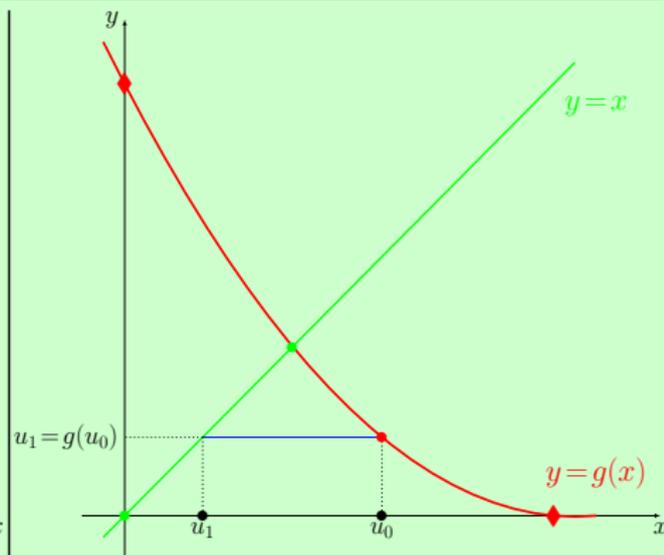


Partant de $u_0 = 6$:

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

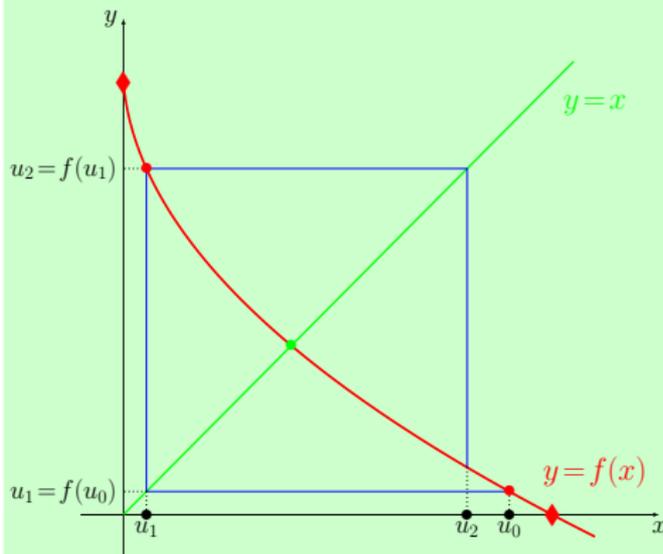
$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$

Partant de $u_0 = 9$:Partant de $u_0 = 6$:

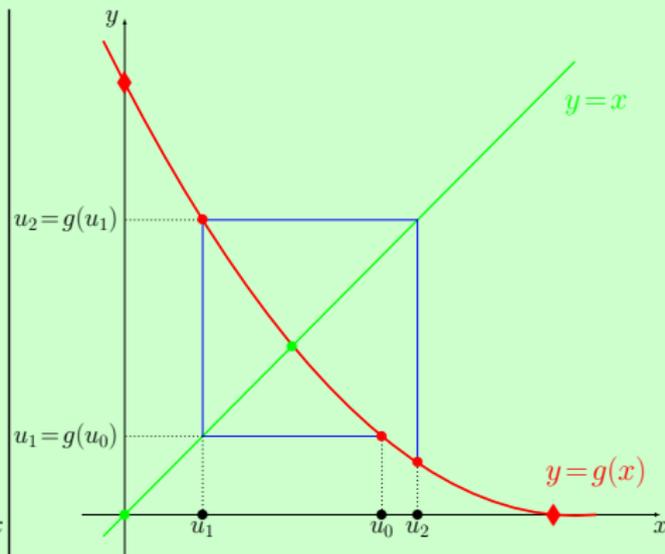
Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$

Partant de $u_0 = 9$:

$$u_0 > u_2$$

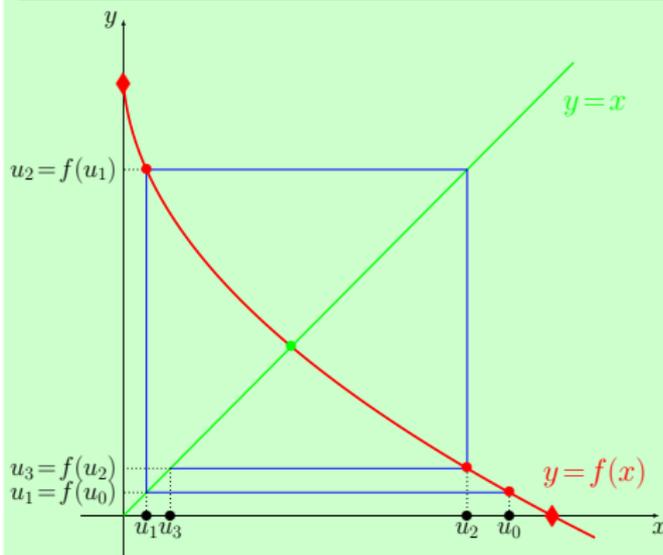
Partant de $u_0 = 6$:

$$u_0 < u_2$$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

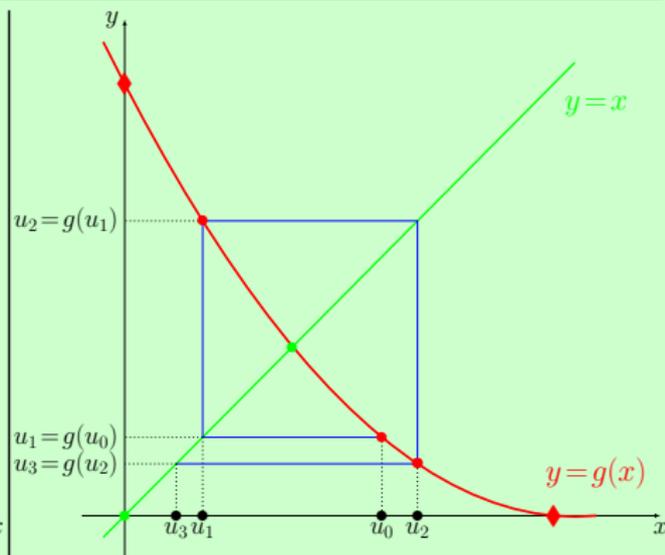
$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$

Partant de $u_0 = 9$:

$$u_0 > u_2$$

$$u_1 < u_3$$

Partant de $u_0 = 6$:

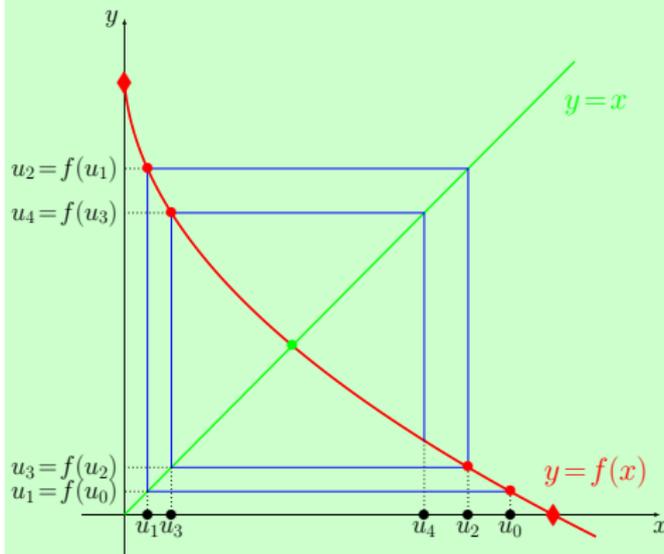
$$u_0 < u_2$$

$$u_1 > u_3$$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

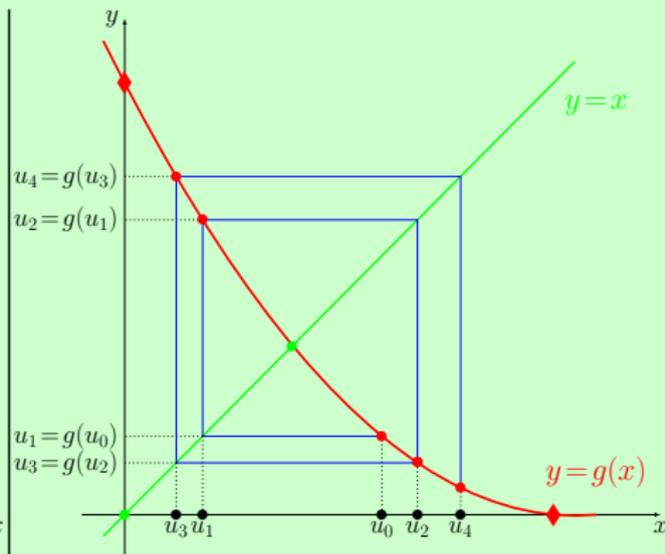
$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$



Partant de $u_0 = 9$:

$$u_0 > u_2 > u_4$$

$$u_1 < u_3$$



Partant de $u_0 = 6$:

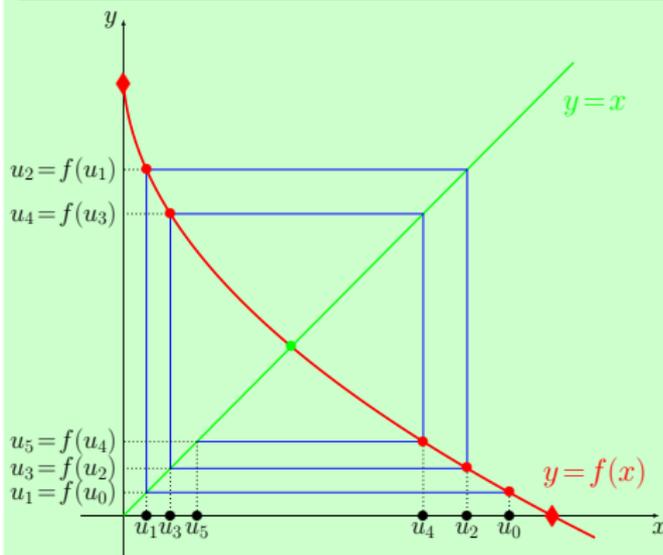
$$u_0 < u_2 < u_4$$

$$u_1 > u_3$$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

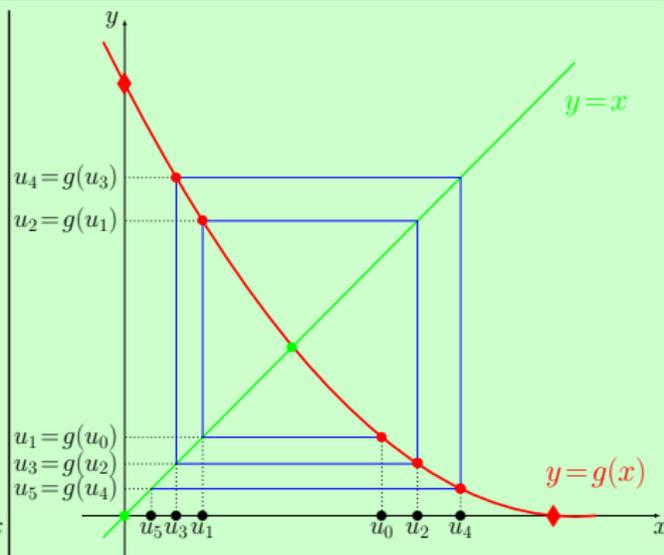
$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$



Partant de $u_0 = 9$:

$$u_0 > u_2 > u_4$$

$$u_1 < u_3 < u_5$$



Partant de $u_0 = 6$:

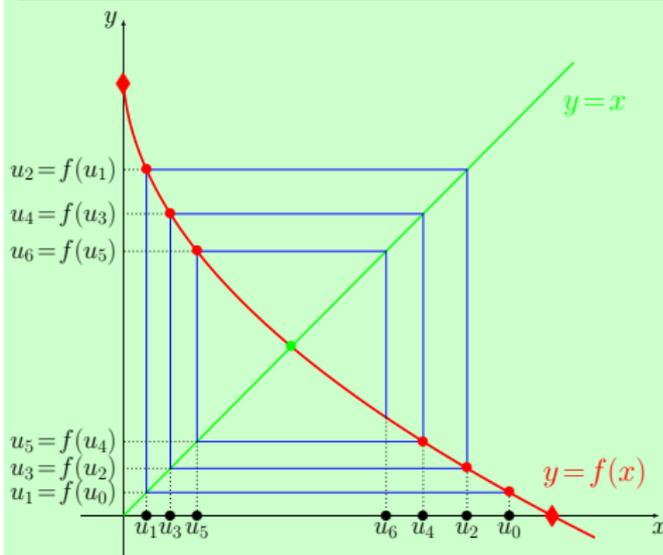
$$u_0 < u_2 < u_4$$

$$u_1 > u_3 > u_5$$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

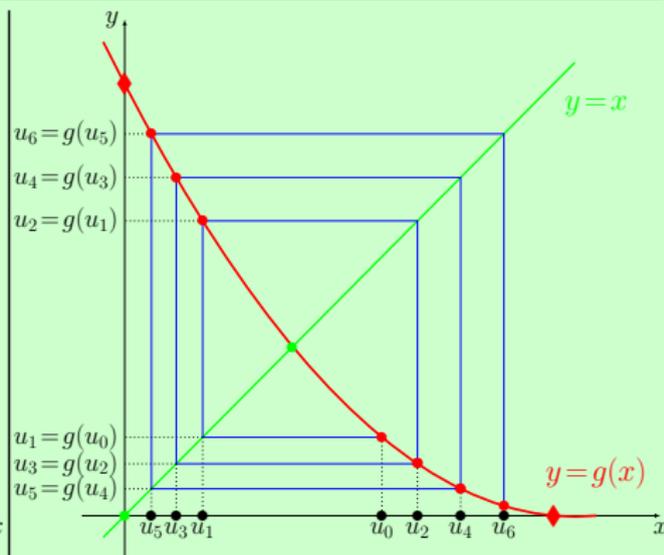
$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$

Partant de $u_0 = 9$:

$$u_0 > u_2 > u_4 > u_6$$

$$u_1 < u_3 < u_5$$

Partant de $u_0 = 6$:

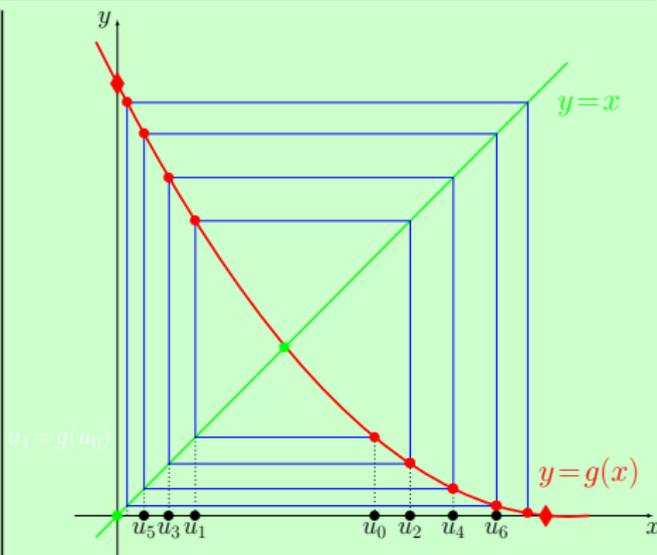
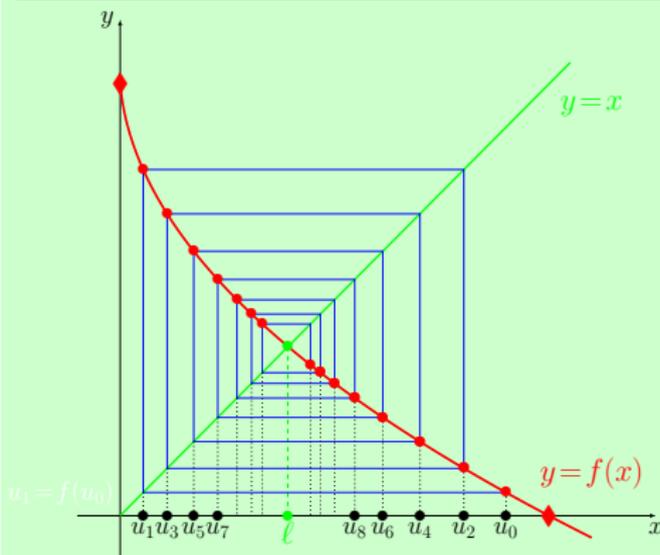
$$u_0 < u_2 < u_4 < u_6$$

$$u_1 > u_3 > u_5$$

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$



Partant de $u_0 = 9$:

$$u_0 > u_2 > u_4 > u_6 > \dots \quad u_1 < u_3 < u_5 < \dots$$

La suite $(u_n)_{2n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante**

La suite $(u_n)_{2n+1 \in \mathbb{N}}$ est **croissante**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers $l = 16 - \sqrt{146}$

Partant de $u_0 = 6$:

$$u_0 < u_2 < u_4 < u_6 < \dots \quad u_1 > u_3 > u_5 > \dots$$

La suite $(u_n)_{2n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers 1

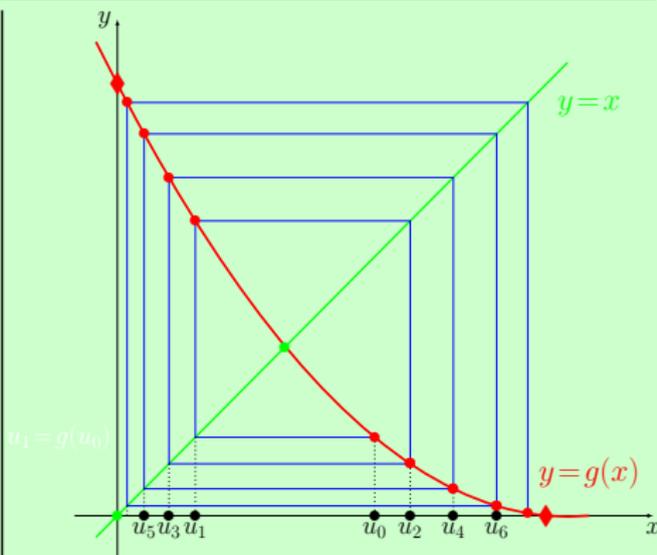
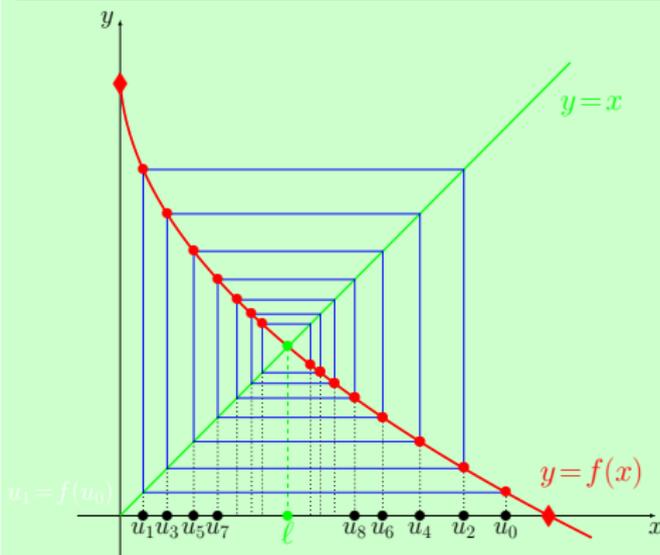
La suite $(u_n)_{2n+1 \in \mathbb{N}}$ **converge** vers 0

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge**

Exemple 5.15 (Cas d'une fonction décroissante)

$$f(x) = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{44x + 1})$$

$$g(x) = \frac{1}{11}(x - 10)(x - 11)$$



Remarque : on a

- $f(0) = 10$ et $f(10) = 0$ ce qui entraîne que 0 et 10 sont des **points fixes** de $f \circ f \dots$
- $g(0) = 10$ et $g(10) = 0$ ce qui entraîne que 0 et 10 sont des **points fixes** de $g \circ g \dots$
- $g = f^{-1}$ sur $[0, 10]$ ce qui entraîne que f et g ont les mêmes **points fixes**...

- 1 Rappels sur les suites
- 2 Limite d'une suite
- 3 Suites extraites
- 4 Suites adjacentes
- 5 Suites récurrentes
- 6 **Approximation des zéros d'une fonction : méthode de Newton**
 - Principe de la méthode
 - Convergence de la méthode
 - Vitesse de convergence de la méthode

On considère une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles.

On cherche alors à approcher une éventuelle solution r de cette équation (appelée un **zéro de f**) à l'aide d'une suite récurrente que l'on construit de la manière suivante :

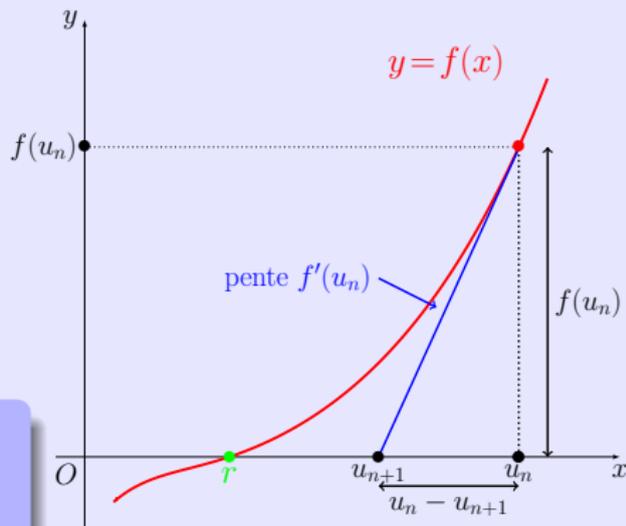
On fixe $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_{n+1} comme étant l'abscisse du point d'intersection avec l'axe (Ox) de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n .

Pour que cette construction itérative fonctionne, il faut faire des hypothèses sur la fonction f :

H_1 : f est **dérivable** sur $[a, b]$;

H_2 : f' **ne s'annule pas** sur $[a, b]$;

H_3 : pour tout $x \in [a, b]$, $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in [a, b]$.



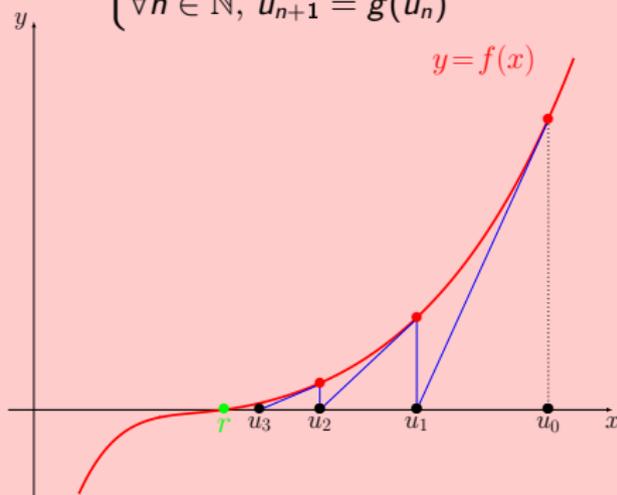
$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Une fois la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bien définie avec les hypothèses sur f , il reste à s'assurer que cette suite converge bien vers un zéro de la fonction f . Là encore, il va falloir des hypothèses supplémentaires :

Théorème 6.1 (Méthode de Newton)

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses H_1, H_2, H_3 .
- Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ la fonction définie par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Si la fonction g est **contractante** sur $[a, b]$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers l'**unique** point fixe de g , qui est aussi l'**unique zéro** de f sur $[a, b]$.



Le théorème du point fixe fournit une majoration de l'erreur $|u_n - r|$ entre l'approximation obtenue à la n^{e} itération de la méthode de Newton et le zéro de f . En réalité, cette majoration est très grossière et on a une majoration bien plus fine de l'erreur :

Théorème 6.2 (Approximation quadratique)

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses H_1, H_2, H_3 .
- Supposons de plus f de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite construite par la méthode de Newton pour approcher un zéro r , alors il existe une constante C (qui dépend de f) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - r| \leq \frac{1}{C} (C|u_0 - r|)^{2^n}.$$

Plus précisément, on peut choisir $C = \frac{M}{2m}$ où $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et $m = \inf_{[a,b]} |f'|$.

Ce qu'il faut surtout retenir de cette inégalité, c'est que la convergence de la méthode de Newton peut être très rapide, et que si $C|u_0 - r| < 1$ (c'est-à-dire qu'on démarre la méthode suffisamment proche de r), la convergence est **quadratique**, autrement dit, le nombre de décimales exactes **double** approximativement à chaque étape.

Suites récurrentes

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html)

Série de Riemann

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_riemann.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf)

Les sucres du Grand Khong

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
les_sucres_du_grand_Khong.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/les_sucres_du_grand_Khong.pdf)

Notions à retenir

- Suites numériques
 - ★ Notion de convergence des suites réelles ou complexes ;
cas de la convergence monotone
 - ★ Suites extraites
 - ★ Suites adjacentes
 - ★ Suites récurrentes : cas d'une fonction itérative monotone ;
théorème du point fixe
 - ★ Méthode de Newton