

Déterminants

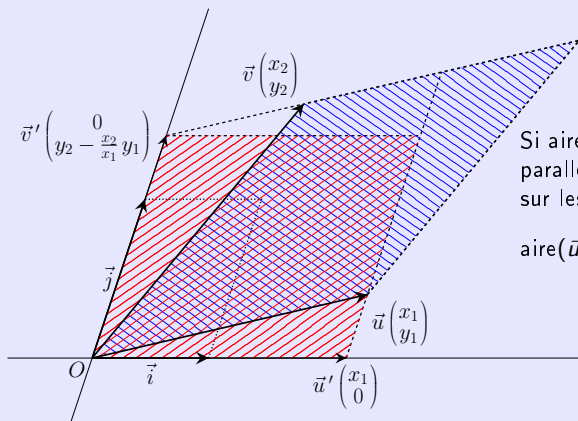
Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

- 1 Déterminant en dimension 2
 - Cas de deux vecteurs dans \mathbb{R}^2
 - Définition et propriétés
 - Orientation
- 2 Déterminant en dimension 3
 - Produit mixte et produit vectoriel
 - Cas de trois vecteurs dans \mathbb{R}^3
 - Définition et propriétés
 - Orientation
- 3 Déterminant d'une matrice carrée
 - Définition
 - Propriétés
 - Calcul pratique
- 4 Déterminant d'un endomorphisme
- 5 Déterminant d'une famille de n vecteurs
- 6 Systèmes de Cramer
 - Définition et résolution
 - Cas d'un système 2×2
 - Cas d'un système 3×3

- 1 Déterminant en dimension 2
 - Cas de deux vecteurs dans \mathbb{R}^2
 - Définition et propriétés
 - Orientation
- 2 Déterminant en dimension 3
- 3 Déterminant d'une matrice carrée
- 4 Déterminant d'un endomorphisme
- 5 Déterminant d'une famille de n vecteurs
- 6 Systèmes de Cramer

Dans \mathbb{R}^2 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ (sur le dessin, on suppose x_1, x_2, y_1, y_2 positifs).



Si $\text{aire}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a :

$$\begin{aligned} \text{aire}(\vec{u}, \vec{v}) &= \text{aire}(\vec{u}', \vec{v}') \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot \text{aire}(\vec{i}, \vec{j}) \end{aligned}$$

En prenant $\text{aire}(\vec{i}, \vec{j})$ comme unité d'aire, on trouverait dans le cas général :

$$\text{aire}(\vec{u}, \vec{v}) = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

Dans ce paragraphe, E désigne un \mathbb{K} -e.v. de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E .

Définition 1.1 (Déterminant de deux vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E .

On appelle **déterminant de (\vec{u}, \vec{v}) dans la base \mathcal{B}** , le nombre :

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = x_1y_2 - y_1x_2 \quad \text{noté aussi} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

① $\text{Det}_{\mathcal{B}}$ est une **forme bilinéaire** sur $E \times E$, c'est-à-dire :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3,$$

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2, \vec{v})$$

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3,$$

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

② $\forall \vec{u} \in E, \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, 0) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(0, \vec{u}) = 0$.

③ $\forall \vec{u} \in E, \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ (**forme alternée**).

④ $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u})$ (**forme antisymétrique**).

⑤ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u} + \lambda\vec{v}, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v} + \lambda\vec{u}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 1.3 (Déterminant et colinéarité)

Soit \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs de E .

La famille (\vec{u}, \vec{v}) est **libre** (et donc une **base** de E) ssi $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Autrement dit, la nullité du déterminant de deux vecteurs traduit leur colinéarité (soit encore la proportionnalité de leurs coordonnées).

Si \mathcal{C} est une autre base de E alors $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$.

En fait, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le signe de $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ nous indique si les deux bases sont orientées dans le même sens ou non selon la définition suivante :

Définition 1.4 (Orientation)

On dit que deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} d'un \mathbb{R} -e.v. de dimension 2 ont la **même orientation** lorsque $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\text{Det}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) > 0$).

Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'**orientations opposées**.

Proposition 1.5 (Changement de base)

Soit \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases de E . Alors

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \text{Det}_{\mathcal{C}}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \times \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}).$$

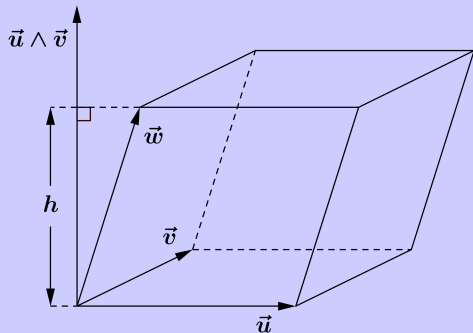
- 1 Déterminant en dimension 2
- 2 Déterminant en dimension 3
 - Produit mixte et produit vectoriel
 - Cas de trois vecteurs dans \mathbb{R}^3
 - Définition et propriétés
 - Orientation
- 3 Déterminant d'une matrice carrée
- 4 Déterminant d'un endomorphisme
- 5 Déterminant d'une famille de n vecteurs
- 6 Systèmes de Cramer

Définition 2.1 (Produit mixte/vectoriel)

Dans l'espace muni du produit scalaire usuel, le **produit vectoriel** de deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par

- si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;
- si \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} , de norme $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$, et tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ « tourne dans le sens direct » (règle des trois doigts).

Le **produit mixte** de trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est le nombre $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.



Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est :

$$\begin{aligned} \text{volume}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= h \times \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une **base orthonormée** de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs se décomposant selon $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$.

Ces vecteurs ont pour composantes $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ et

Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ x_2z_1 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1. \end{aligned}$$

Remarque 2.2

On peut montrer que le résultat ne dépend pas de la base orthonormée dans laquelle les coordonnées sont exprimées.

Dans ce paragraphe, E désigne un \mathbb{K} -e.v. de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E .

Définition 2.3 (Déterminant de trois vecteurs)

Soit $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ trois vecteurs de E .

On appelle **déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base \mathcal{B}** le nombre

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad \text{noté} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Calcul pratique : règle de Sarrus

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ y_1 & y_2 & y_3 & & & \\ z_1 & z_2 & z_3 & & & \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ y_1 & y_2 & y_3 & & & \end{array}$$

$- x_3 y_2 z_1$
 $- x_1 y_3 z_2$
 $- x_2 y_1 z_3$
 $+ x_1 y_2 z_3$
 $+ x_3 y_1 z_2$
 $+ x_2 y_3 z_1$

On a les mêmes propriétés que dans le cas de la dimension 2 :

Proposition 2.4 (Propriétés immédiates)

- 1 $\text{Det}_{\mathcal{B}}$ est une **forme trilinéaire** sur $E \times E \times E$.
- 2 $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \text{Det}_{\mathcal{B}}(0, \vec{u}, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, 0, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, 0) = 0.$
- 3 $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0.$
- 4 $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$
 $= -\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$
- 5 $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3,$

$$\begin{cases} \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}, \vec{w}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}) = \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}). \end{cases}$$

Proposition 2.5 (Déterminant et coplanarité)

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de E .

La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **libre** (et donc une **base** de E) ssi $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

Autrement dit, la nullité du déterminant caractérise la **coplanarité** de trois vecteurs de l'espace.

Comme en dimension 2, on peut définir une **orientation** dans un espace vectoriel réel :

Définition 2.6 (Orientation)

On dit que deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} d'un \mathbb{R} -e.v. de dimension 3 ont la **même orientation** lorsque $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\text{Det}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) > 0$).

Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'**orientations opposées**.

Proposition 2.7 (Changement de base)

Soit \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases de E . Alors

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, \text{Det}_{\mathcal{C}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Det}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \times \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

- 1 Déterminant en dimension 2
- 2 Déterminant en dimension 3
- 3 Déterminant d'une matrice carrée**
 - Définition
 - Propriétés
 - Calcul pratique
- 4 Déterminant d'un endomorphisme
- 5 Déterminant d'une famille de n vecteurs
- 6 Systèmes de Cramer

Définition 3.1 (Ordres 2 et 3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n = 2$ ou $n = 3$.

On appelle **déterminant** de A , noté $\det(A)$, le déterminant dans la base canonique de \mathbb{K}^n des deux ou trois vecteurs colonnes de la matrice A .

Puis, on définit le déterminant d'une matrice d'ordre n quelconque, par un **procédé récurrent** :

Définition 3.2 (Ordre général)

Soit n un entier naturel non nul et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le déterminant de A est le nombre noté $\det(A)$ tel que :

- si $n = 1$ (i.e. $A = (a)$) alors $\det(A) = a$;
- si $n \geq 2$, alors $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$ où A_{i1} est la matrice d'ordre $n - 1$ construite à partir de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $1^{\text{ère}}$ colonne.

$$\text{On note } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proposition 3.3 (Diverses propriétés)

- 1 Si A est une matrice **triangulaire** (et en particulier **diagonale**), $\det(A)$ est égal au **produit des coefficients diagonaux** de A . En particulier, $\det(I_n) = 1$.
- 2 Si deux colonnes de A sont **identiques** ou qu'une colonne est une **combinaison linéaire** d'autres colonnes alors $\det(A) = 0$.
- 3 On ne change pas $\det(A)$ si on ajoute à une colonne une **combinaison linéaire** des autres colonnes.
- 4 $\det(A)$ **change de signe** lorsqu'on **intervertit** deux colonnes de A .
- 5 $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- 6 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^t A) = \det(A)$.
En conséquence, les propriétés 2, 3, 4 relatives aux colonnes s'appliquent également sur les lignes :
- 7 Si deux lignes de A sont **identiques** ou qu'une ligne est une **combinaison linéaire** d'autres lignes alors $\det(A) = 0$.
- 8 On ne change pas $\det(A)$ si on ajoute à une ligne une **combinaison linéaire** des autres lignes.
- 9 $\det(A)$ **change de signe** lorsqu'on **intervertit** deux lignes de A .

Remarque 3.4

L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ n'est pas linéaire ! En général, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.

On a encore d'autres propriétés :

Proposition 3.5 (Autres propriétés)

- 1 $\det(I_n) = 1$.
- 2 $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- 3 $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^p) = (\det(A))^p$.
- 4 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, (A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$) et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

En pratique, pour calculer le déterminant d'une matrice carrée, on commence par effectuer des **opérations sur les lignes et/ou colonnes** de la matrice pour obtenir une ligne ou une colonne contenant un maximum de coefficients nuls, puis on effectue un **développement par rapport à cette ligne ou colonne** en vertu du théorème suivant :

Théorème 3.6 (Développement d'un déterminant)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\textcircled{1} \forall j \in \{1, \dots, n\}, \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne)

$$\textcircled{2} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne)

où A_{ij} est la matrice d'ordre $n - 1$ construite à partir de A en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. Considérons la matrice carrée d'ordre 3

$$V(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Calculons son déterminant : $D(a_1, a_2, a_3) = \det V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}.$

En effectuant les transformations sur les colonnes $C_1 \leftarrow C_1$, $C_2 \leftarrow C_2 - a_1 C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - a_1 C_2$, puis en développant le résultat par rapport à la 1^{re} ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} D(a_1, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} C_1 & C_2 - a_1 C_1 & C_3 - a_1 C_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$D(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1).$$

La matrice $V(a_1, a_2, a_3)$ est **inversible** ssi $D(a_1, a_2, a_3) \neq 0$, i.e. ssi a_1, a_2, a_3 sont des nombres **tous distincts**.

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Généralisation

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la matrice carrée d'ordre n appelée « **matrice de Vandermonde** » :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par une méthode similaire au cas $n = 3$, on peut calculer son déterminant (qui est invariant par **transposition**) :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{(i,j): 1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Ainsi, la matrice $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (ainsi que sa **transposée**) est **inversible** ssi les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont **tous distincts**.

Exemple 3.7 (Déterminant de Vandermonde)

Application

Donnons-nous a_1, a_2, \dots, a_n des nombres **tous distincts** et introduisons les fonctions

$$\varphi_1 : x \mapsto e^{a_1 x} \quad \varphi_2 : x \mapsto e^{a_2 x} \quad \dots \quad \varphi_n : x \mapsto e^{a_n x}.$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres tels que $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n = 0$.

On a de manière équivalente

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_n e^{a_n x} = 0.$$

En dérivant cette relation $(n-1)$ fois en 0, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_n \lambda_n = 0 \\ a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2 + \dots + a_n^2 \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \lambda_1 + a_2^{n-1} \lambda_2 + \dots + a_n^{n-1} \lambda_n = 0 \end{cases}$$

qui s'écrit sous la forme matricielle ${}^tV(a_1, a_2, \dots, a_n)\Lambda = O$ avec $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les nombres a_1, a_2, \dots, a_n étant **distincts**, la matrice ${}^tV(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est **inversible**, donc $\Lambda = O$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ainsi la famille de fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ de l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est **libre**.

- 1 Déterminant en dimension 2
- 2 Déterminant en dimension 3
- 3 Déterminant d'une matrice carrée
- 4 Déterminant d'un endomorphisme**
- 5 Déterminant d'une famille de n vecteurs
- 6 Systèmes de Cramer

Théorème-définition 4.1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors toutes les matrices représentant f dans des bases de E ont le même déterminant. Ce nombre est appelé le **déterminant** de f . Il se note $\det(f)$.

Proposition 4.2 (Propriétés)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{L}(E), \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

On peut caractériser les automorphismes de E :

Proposition 4.3 (Déterminant et automorphisme)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$(f \text{ est un automorphisme} \iff \det(f) \neq 0) \text{ et } \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

- 1 Déterminant en dimension 2
- 2 Déterminant en dimension 3
- 3 Déterminant d'une matrice carrée
- 4 Déterminant d'un endomorphisme
- 5 Déterminant d'une famille de n vecteurs**
- 6 Systèmes de Cramer

Définition 5.1 (Déterminant de n vecteurs)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Le déterminant d'une famille de n vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ dans la base \mathcal{B} est défini par :

$$\text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{où } \forall j \in \{1, \dots, n\}, \vec{v}_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} \vec{e}_i.$$

Proposition 5.2 (Déterminant et liberté)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n , \mathcal{B} une base de E et $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n vecteurs de E .

La famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est **libre** (et donc une **base** de E) $\iff \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \neq 0$.

Définition 5.3 (Orientation)

On dit que deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} d'un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie ont la **même orientation** lorsque $\text{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) > 0$ (ou de manière équivalente $\text{Det}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) > 0$).

Dans le cas contraire, on dit qu'elles sont d'**orientations opposées**.

Proposition 5.4 (Changement de base)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n et \mathcal{B}, \mathcal{C} deux bases de E .

$$\forall (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in E^n, \text{Det}_{\mathcal{C}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \text{Det}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \times \text{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n).$$

- 1 Déterminant en dimension 2
- 2 Déterminant en dimension 3
- 3 Déterminant d'une matrice carrée
- 4 Déterminant d'un endomorphisme
- 5 Déterminant d'une famille de n vecteurs
- 6 Systèmes de Cramer
 - Définition et résolution
 - Cas d'un système 2×2
 - Cas d'un système 3×3

Soit (\mathcal{S}) un système linéaire de n équations à n inconnues dans \mathbb{K} de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Définition 6.1 (Système de Cramer)

Si on note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice carrée associée au système (\mathcal{S}) , on dit que (\mathcal{S}) est un **système de Cramer** lorsque $\det(A) \neq 0$.

Proposition 6.2 (Solution)

Tout système de Cramer de n équations à n inconnues x_1, \dots, x_n de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et de seconds membres b_1, \dots, b_n admet une unique solution (x_1, \dots, x_n) telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, x_j = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(on a remplacé la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par la colonne des (b_i)).

Exemple 6.3 (Système 2×2)

Soit (\mathcal{S}) le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues dans \mathbb{K} suivant :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ associée au système (\mathcal{S}) et notons $\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Le système (\mathcal{S}) est de **Cramer** ssi $ab' - a'b \neq 0$.

Notons également Δ_x et Δ_y les déterminants **relatifs** aux inconnues x et y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = b'c - bc' \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

Lorsque $\Delta \neq 0$, le système (\mathcal{S}) admet une **unique** solution donnée par

$$(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right).$$

Exemple 6.4 (Système 3×3)

Soit (\mathcal{S}) le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues dans \mathbb{K} suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Introduisons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ associée au système (\mathcal{S}) et notons

$\Delta = \det(A)$ son déterminant (appelé **déterminant principal du système**) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Le système (\mathcal{S}) est de **Cramer** ssi $\Delta \neq 0$.

Notons également $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ les déterminants **relatifs** aux inconnues x, y, z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}.$$

Lorsque $\Delta \neq 0$, le système (\mathcal{S}) admet une **unique** solution donnée par

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right).$$

Notions à retenir

- Déterminants
 - ★ Interprétation géométrique en dimensions 2 et 3
 - ★ Propriétés de multilinéarité, techniques de calcul
 - ★ Lien avec les matrices et endomorphismes
 - ★ Lien avec les familles de vecteurs, caractérisation d'une base
 - ★ Lien avec les systèmes linéaires, résolution des systèmes de Cramer