

# Réduction des endomorphismes

*Aimé Lachal*

Cours de mathématiques  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

- 1 Motivation
- 2 Éléments propres d'un endomorphisme
  - Valeur propre et vecteur propre
  - Sous-espace propre
  - Propriétés des sous-espaces propres
  - Endomorphisme diagonalisable
- 3 Étude en dimension finie
  - Polynôme caractéristique
  - Conditions de diagonalisabilité
- 4 Diagonalisation de matrices
  - Éléments propres d'une matrice
  - Conditions de diagonalisabilité
  - Applications

- 1 Motivation
- 2 Éléments propres d'un endomorphisme
- 3 Étude en dimension finie
- 4 Diagonalisation de matrices

## Prologue

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  de dimension finie  $n$ .

Pour toute base de  $E$ , on sait écrire la matrice de  $f$  dans cette base.

*Question* : peut-on trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  serait **diagonale** ?

Si une telle base  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  existe et que la matrice de  $f$  dans cette base est  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , c'est que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on doit avoir  $f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$ .

Le problème revient donc à chercher une base de vecteurs de  $E$  où chaque vecteur est **colinéaire** à son image par  $f$ .

- 1 Motivation
- 2 Éléments propres d'un endomorphisme
  - Valeur propre et vecteur propre
  - Sous-espace propre
  - Propriétés des sous-espaces propres
  - Endomorphisme diagonalisable
- 3 Étude en dimension finie
- 4 Diagonalisation de matrices

Dans ce paragraphe,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

### Définition 2.1 (Valeur/vecteur propre)

Un **vecteur propre** de  $f$  est un vecteur  $\vec{u}$  **non nul** de  $E$  tel qu'il existe un nombre  $\lambda$  de  $\mathbb{K}$  tel que  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ .

Un tel nombre  $\lambda$  de  $\mathbb{K}$  pour lequel il existe un vecteur  $\vec{u}$  non nul de  $E$  tel que  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$  est appelé une **valeur propre** de  $f$ .

### Remarque 2.2

Lorsque  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$  avec  $\vec{u} \neq 0$ , on dit que  $\vec{u}$  est un vecteur propre **associé** à la valeur propre  $\lambda$  ou encore que  $\lambda$  est la valeur propre **associée** au vecteur propre  $\vec{u}$ .

Ainsi, plusieurs vecteurs propres peuvent être associés à la même valeur propre mais il n'y a qu'une valeur propre associée à un vecteur propre donné.

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$  le sev de  $E$  formé des vecteurs  $\vec{u}$  solutions de l'équation  $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ .

### Remarque 2.3

$E_\lambda(f)$  peut être réduit à  $\{\vec{0}_E\}$ , ce qui signifie dans ce cas qu'il n'y a aucun vecteur propre de  $f$  associé au réel  $\lambda$  (qui n'est par conséquent pas une valeur propre de  $f$ ). Sinon,  $E_\lambda(f)$  est la réunion de l'ensemble des vecteurs propres de  $f$  associés à la valeur propre  $\lambda$  et du vecteur nul.

### Proposition 2.4

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$\lambda$  est une valeur propre de  $f \iff E_\lambda(f) \neq \{\vec{0}_E\} \iff f - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas injectif.

### Définition 2.5 (Sous-espace propre)

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  alors  $E_\lambda(f)$  est appelé **sous-espace propre** de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Définition 2.6 (Somme directe de plusieurs s.e.v.)**

Soit un entier  $p \geq 2$  et  $(F_1, \dots, F_p)$  une famille de s.e.v. de  $E$ .

On dit que les s.e.v.  $F_1, \dots, F_p$  sont **en somme directe** si tout vecteur  $\vec{u}$  du s.e.v.

$F = F_1 + \dots + F_p$  s'écrit **de manière unique** sous la forme  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_p$  avec,

pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\vec{u}_i \in F_i$ . On note alors  $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  ou  $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

**Théorème 2.7 (Somme directe des sous-espaces propres)**

Des sous-espaces propres  $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_p}(f)$  en nombre fini, associés à des valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  **distinctes**, sont toujours en **somme directe**.

**Corollaire 2.8 (Valeurs propres distinctes)**

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux **distinctes** d'un endomorphisme est toujours **libre**.

**Exemple 2.9 (Famille d'exponentielles)**

Considérons dans l'espace vectoriel  $\mathcal{D}$  des fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  l'endomorphisme « dérivation »  $D$  : pour tout  $u \in \mathcal{D}$ ,  $D(u) = u'$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

L'équation  $D(u) = \lambda u$  admet pour solutions la droite vectorielle de  $\mathcal{D}$  engendrée par la fonction  $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ . Ainsi  $\mathcal{D}$  admet une **infinité de valeurs propres** (tous les réels). On en déduit que, pour tous réels distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , la famille  $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$  est **libre**.



En général, même en considérant tous les sous-espaces propres de  $f$ , cette somme directe **ne** donne **pas** l'espace  $E$  tout entier. D'où la définition suivante.

### Définition 2.10 (Endomorphisme diagonalisable)

L'endomorphisme  $f$  est dit **diagonalisable** lorsque  $E$  est **somme directe** d'un nombre fini de sous-espaces propres de  $f$ .

On a alors  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$ , et donc il existerait une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$  (une telle base s'appelle une **base de diagonalisation** pour  $f$ ).

Étant donnée notre motivation de départ, l'objectif est donc de pouvoir dire si un endomorphisme est **diagonalisable** ou pas.

- 1 Motivation
- 2 Éléments propres d'un endomorphisme
- 3 Étude en dimension finie
  - Polynôme caractéristique
  - Conditions de diagonalisabilité
- 4 Diagonalisation de matrices

Dans ce paragraphe,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -e.v. de **dimension finie**  $n$ .

### Proposition 3.1 (Valeur propre et déterminant)

$\lambda$  est une valeur propre de  $f \iff \det(f - \lambda \text{Id}_E) = 0$ .

### Définition 3.2 (Polynôme caractéristique)

$\det(f - X.\text{Id}_E)$  est un polynôme de la variable  $X$  de degré  $n$  appelé **polynôme caractéristique** de  $f$  que l'on notera  $P_f$ .

*En pratique, on détermine donc les valeurs propres éventuelles de  $f$  en cherchant les racines de son polynôme caractéristique.*

### Définition 3.3 (Multiplicité)

On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de  $f$ , sa multiplicité en tant que racine de  $P_f$ .

Il reste à déterminer une base de  $E$  constituée de vecteurs propres associés aux éventuelles valeurs propres de  $f$  qu'on a déterminées. Mais cela n'est possible que sous certaines conditions.

### Théorème 3.4 (Valeur propre et multiplicité)

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$  de multiplicité  $\mu$ . Alors :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq \mu.$$

### Théorème 3.5 (CNS de diagonalisabilité)

L'endomorphisme  $f$  est **diagonalisable** ssi son polynôme caractéristique  $P_f$  a toutes ses valeurs propres dans  $\mathbb{K}$  (on dit alors qu'il est **scindé sur  $\mathbb{K}$** ) **et si**, pour chaque valeur propre, la **multiplicité** est égale à la **dimension** du sous-espace propre associé.

### Corollaire 3.6 (CS de diagonalisabilité)

Si le polynôme caractéristique  $P_f$  n'a que des **racines simples toutes dans  $\mathbb{K}$**  alors l'endomorphisme  $f$  est **diagonalisable**.

- 1 Motivation
- 2 Éléments propres d'un endomorphisme
- 3 Étude en dimension finie
- 4 Diagonalisation de matrices
  - Éléments propres d'une matrice
  - Conditions de diagonalisabilité
  - Applications

Dans ce paragraphe,  $A$  désigne une matrice carrée d'ordre  $n$  :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Définition 4.1 (Éléments propres d'une matrice)

- ① On appelle **polynôme caractéristique** de  $A$  le polynôme de degré  $n$  en  $X$   $\det(A - X.I_n)$ . On le note  $P_A$ .
- ② On dit que  $\lambda$  est une **valeur propre** de  $A$  s'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  **non nul** tel que  $A.X = \lambda X$ . Alors  $X$  est dit **vecteur propre** de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- ③ On note  $\text{Ker}(A - \lambda.I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\}$

### Théorème 4.2 (Polynôme caractéristique et valeur propre)

- ①  $P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + \det(A)$ .  
En particulier, lorsque  $n = 2$  :  $P_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$ .
- ②  $\lambda$  est une valeur propre de  $A \iff \det(A - \lambda.I_n) = 0$   
 $\iff \lambda$  est une racine de  $P_A$

**Définition 4.3 (Matrice diagonalisable)**

La matrice  $A$  est dite **diagonalisable** si elle est **semblable à une matrice diagonale**, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que :

$$D = P^{-1}AP \text{ ou encore } A = PDP^{-1}.$$

**Théorème 4.4 (CNS de diagonalisabilité)**

La matrice  $A$  est **diagonalisable** ssi son polynôme caractéristique  $P_A$  a toutes ses valeurs propres dans  $\mathbb{K}$  **et si la multiplicité** de chaque valeur propre de  $A$  est égale à la **dimension** du sous-espace propre associé.

En particulier, si  $P_A$  n'a que des racines **simples** toutes dans  $\mathbb{K}$  alors  $A$  est **diagonalisable**.

**Remarque 4.5 (Coefficients diagonaux et valeurs propres)**

Lorsque  $A$  est **diagonalisable**, les **coefficients diagonaux** de la matrice  $D$  diagonale qui lui est semblable sont exactement les **valeurs propres** de  $A$  comptées avec leur **multiplicité**.

Enfin, si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  alors  $A$  et  $f$  ont les mêmes valeurs propres, et  $A$  est **diagonalisable** ssi  $f$  est **diagonalisable**.

**Exemple 4.6 (Diagonalisation)**

Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . On se place dans l'espace vectoriel canonique  $\mathbb{R}^2$ .

① **Valeurs propres** : on a  $\text{tr}(A) = 6$  et  $\det(A) = 5$ , donc son polynôme caractéristique est  $P_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = (X - 1)(X - 5)$  ce qui fournit deux valeurs propres **simples** : 1 et 5.

② **Vecteurs propres** :

- Le sous-espace propre associé à 1 est l'ensemble des matrices-colonnes  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  vérifiant  $x + y = 0$ . C'est la **droite vectorielle** de base  $((1, -1))$ .
- Le sous-espace propre associé à 5 est l'ensemble des matrices-colonnes  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  vérifiant  $3x - y = 0$ . C'est la **droite vectorielle** de base  $((1, 3))$ .

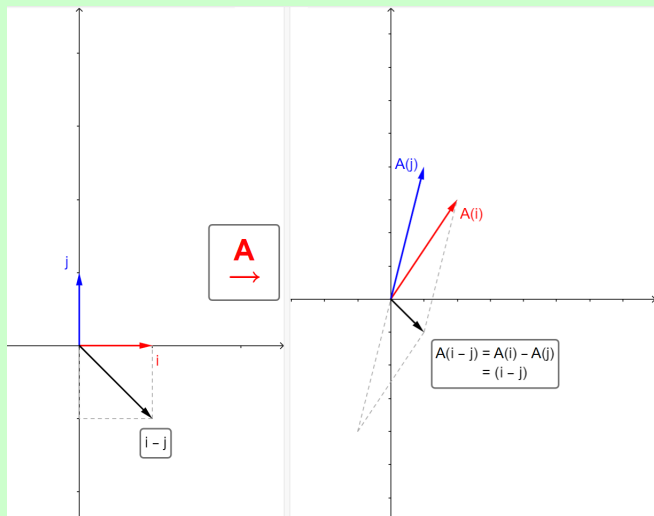
**Diagonalisation** :  $P_A$  ayant **toutes ses racines** dans  $\mathbb{R}$  et celles-ci étant **simples**, la matrice  $A$  est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



## Exemple 4.6 (Diagonalisation)

## 3 Illustration :



$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

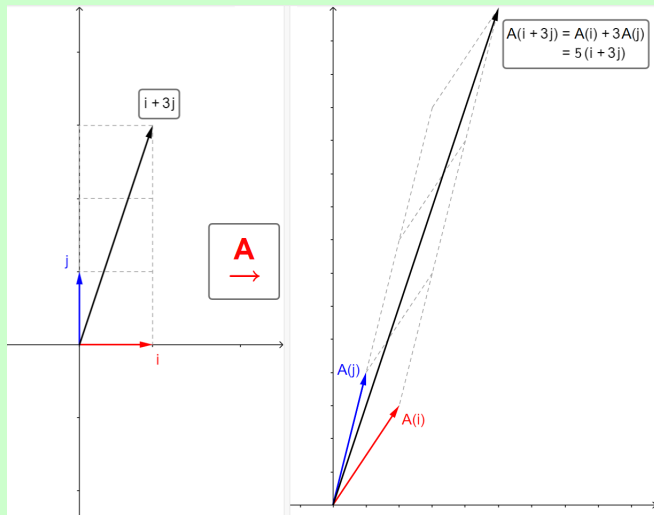
$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En général :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Exemple 4.6 (Diagonalisation)

## 3 Illustration :



$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En général :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## Exemple 4.7 (Diagonalisation)

Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . On se place dans l'espace vectoriel canonique  $\mathbb{R}^3$ .

- ① **Valeurs propres** : son polynôme caractéristique est  $P_A = (5 - X)(2 - X)^2$  ce qui fournit deux valeurs propres : la valeur propre **simple** 5 et la valeur propre **double** 2.
- ② **Vecteurs propres** :
  - Le sous-espace propre associé à 5 est l'ensemble des matrices-colonnes  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  vérifiant  $x = y = z$ . C'est la **droite vectorielle** de base  $((1, 1, 1))$ .
  - Le sous-espace propre associé à 2 est l'ensemble des matrices-colonnes  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  vérifiant  $x + y + z = 0$ . C'est le **plan vectoriel** de base  $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ .
- ③ **Diagonalisation** :  $P_A$  ayant **toutes ses racines** dans  $\mathbb{R}$  et les **dimensions** des sous-espaces propres coïncidant avec les **multiplicités** des valeurs propres, la matrice  $A$  est diagonalisable :
 
$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

## Exemple 4.8 (Système de suites récurrentes)

Considérons le **système de suites récurrentes** ( $\mathcal{S}$ ) d'inconnues les suites

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}, n \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases}$$

- Introduisons la matrice  $A$  du système ( $\mathcal{S}$ ) décrite dans l'exemple 4.7 ainsi que la matrice-colonne inconnue  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$ . Le système ( $\mathcal{S}$ ) se réécrit selon  $U_{n+1} = AU_n$ . Il s'agit d'une **suite géométrique matricielle** dont la solution est donnée par  $U_n = A^n U_0$ .
- Cette solution nécessite le calcul de la **puissance**  $n^e$  de la matrice  $A$  qui peut se calculer facilement à l'aide de la forme diagonalisée  $A = PDP^{-1}$  :

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- D'où la **solution**  $U_n = A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} \\ 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n \end{pmatrix}$  soit  $u_n = \frac{5^n + 2^{n+1}}{3}, v_n = w_n = \frac{5^n - 2^n}{3}$ .

## Exemple 4.9 (Système différentiel)

Considérons le **système différentiel** ( $\mathcal{S}$ ) d'inconnues les fonctions  $x, y, z$  suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

- ① Introduisons la matrice  $A$  de ( $\mathcal{S}$ ) décrite dans l'ex. 4.7 ainsi que la matrice-colonne

inconnue  $U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Le système ( $\mathcal{S}$ ) se réécrit  $U'(t) = AU(t)$ . Il s'agit d'une **équation différentielle matricielle** linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à **coefficient matriciel** constant.

- ② La forme diagonalisée  $A = PDP^{-1}$  permet, grâce à un changement de fonctions inconnues, d'obtenir un système différentiel diagonal facile à résoudre : on pose  $U(t) = P\tilde{U}(t)$  avec

$\tilde{U}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$ . Le système ( $\mathcal{S}$ ) est équivalent à  $\tilde{U}'(t) = D\tilde{U}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{U}(0) = P^{-1}U(0)$ ,

soit

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = 5\tilde{x}(t) \\ \tilde{y}'(t) = 2\tilde{y}(t) \\ \tilde{z}'(t) = 2\tilde{z}(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{x}(0) = \frac{1}{3} \\ \tilde{y}(0) = \frac{2}{3} \\ \tilde{z}(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- ③ D'où la **solution**  $\tilde{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{5t} \\ \frac{2}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$  soit  $x(t) = \frac{e^{5t} + 2e^{2t}}{3}$ ,  $y(t) = z(t) = \frac{e^{5t} - e^{2t}}{3}$ .

## Exemple 4.10 (Quadrique (facultatif))

Considérons la **quadrique** ( $\mathcal{S}$ ) d'équation cartésienne dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$$

- ① Introduisons la matrice  $A$  de ( $\mathcal{S}$ ) décrite dans l'ex. 4.7 ainsi que la matrice-colonne

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \text{ L'équation de } (\mathcal{S}) \text{ se réécrit selon } {}^tXAX = 1.$$

- ② La forme diagonalisée  $A = QDQ^{-1}$  avec la nouvelle matrice de passage  $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

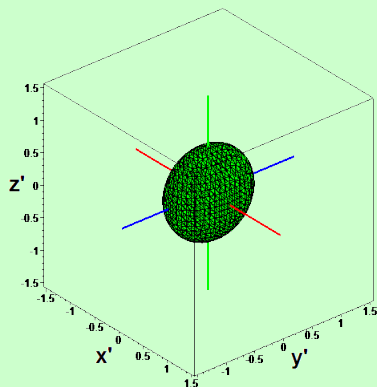
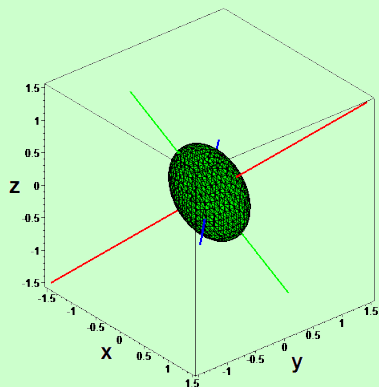
qui est **orthogonale** (i.e.  ${}^tQQ = I_3$  ou encore  $Q^{-1} = {}^tQ$ , elle représente un changement de **bases orthonormales**  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \rightarrow (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ ) permet, grâce à un changement de variables, d'obtenir une équation cartésienne ne comportant que des carrés : on pose

$X = QX'$  avec  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ . L'équation de ( $\mathcal{S}$ ) est équivalente à  ${}^tX'AX' = 1$ , soit dans le repère  $(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  :

$$5x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2 = 1$$

- ③ Il s'agit d'un **ellipsoïde de révolution** de centre  $O$  d'axes principaux de vecteurs directeurs  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ , d'axe de révolution dirigé par  $\vec{i}'$ , de demi-axes de longueurs  $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## Exemple 4.10 (Quadrique (facultatif))



— axe dirigé par  $\vec{i}'$    — axe dirigé par  $\vec{j}'$    — axe dirigé par  $\vec{k}'$

## Théorème 4.11 (Réduction des matrices symétriques réelles (facultatif))

Toute matrice **symétrique réelle**  $A$  est **diagonalisable** via une matrice de passage **orthogonale**  $P$  :  $A = PD^tP$  avec  ${}^tPP = I_n$  (soit  $P^{-1} = {}^tP$ ).

Exemple 4.12 (Cas des matrices  $2 \times 2$  symétriques réelles (facultatif))

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . On se place dans l'espace canonique  $\mathbb{R}^2$  rapporté à sa base canonique supposée orthonormale.

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $P_A = X^2 - (a + c)X + (ac - b^2)$ .

Notons  $\delta^2$  son discriminant avec  $\delta = \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}$ .

① **Cas  $b = 0$ .** La matrice  $A$  s'écrit  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ . Elle est **diagonale**.

② **Cas  $b \neq 0$ .**

- **Valeurs propres :**

on a  $\delta > 0$ . La matrice  $A$  admet donc deux valeurs propres **réelles distinctes**  $\lambda = \frac{1}{2}(a + c + \delta)$  et  $\mu = \frac{1}{2}(a + c - \delta)$ , elle est **diagonalisable**.

- **Sous-espaces propres :**

les sous-espaces propres  $E_\lambda$  et  $E_\mu$  sont les droites vectorielles de bases respectives  $((2b, a - c - \delta))$  et  $((2b, a - c + \delta))$ .

Notons que leur produit scalaire est **nul**, donc ces droites sont **orthogonales**.

- **Diagonalisation :**

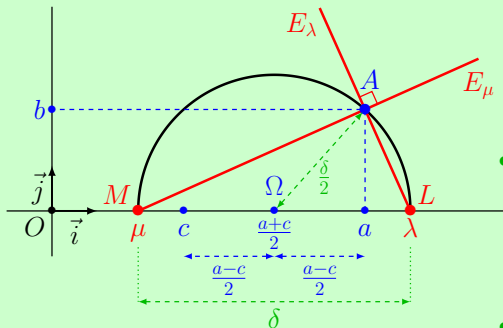
les valeurs propres étant **simples**, la matrice  $A$  est **diagonalisable** :  $A = PDP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} a - c + \delta & a - c - \delta \\ 2b & 2b \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{4b\delta} \begin{pmatrix} 2b & c - a + \delta \\ -2b & a - c + \delta \end{pmatrix}.$$



Exemple 4.12 (Cas des matrices  $2 \times 2$  symétriques réelles (facultatif))**Une construction géométrique**

On peut construire de manière géométrique les valeurs propres  $\lambda, \mu$  ainsi que les sous-espaces propres  $E_\lambda, E_\mu$  à l'aide d'un cercle appelé « **cercle de Mohr** ».



- Supposons  $c < a$ . Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on place sur l'axe  $O\vec{i}$  les points d'abscisses  $a$  et  $c$  ainsi que leur milieu  $\Omega$  (d'abscisse  $\frac{a+c}{2}$ ), puis dans le plan le point  $A$  de coordonnées  $(a, b)$ .
- On trace le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\frac{1}{2}\delta = \Omega A$ . L'intersection de ce cercle avec l'axe  $O\vec{i}$  fournit deux points  $L$  et  $M$  d'abscisses respectives  $\lambda$  et  $\mu$ .
- On trace les droites (orthogonales)  $E_\lambda = LA$  et  $E_\mu = MA$ .

## Transmission d'un signal aléatoire binaire dans un canal bruité

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/serveurPC/signal\\_binaire.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/serveurPC/signal_binaire.pdf)

## Les grains de blé du Grand Khong

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/les\\_grains\\_de\\_ble\\_du\\_grand\\_Khong.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/les_grains_de_ble_du_grand_Khong.pdf)

## Notions à retenir

- Réduction des matrices et endomorphismes
  - ★ Polynôme caractéristique
  - ★ Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres
  - ★ Matrices, endomorphismes diagonalisables
  - ★ Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité
  - ★ Technique de diagonalisation
  - ★ Application de la diagonalisation des matrices aux systèmes différentiels et systèmes de suites récurrentes