

# Calcul vectoriel

Aimé Lachal

Cours d'OMNI  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

## Sommaire

- ❶ Géométrie vectorielle de l'espace
  - Vecteurs
  - Points
  - Repérage
- ❷ Produit scalaire
  - Définition
  - Propriétés
  - Applications
- ❸ Formes linéaires sur l'espace
  - Barycentre, représentation
  - Ensembles de niveau
- ❹ Orientation
  - Droite, plan
  - Espace
- ❺ Produit vectoriel
  - Définition
  - Propriétés
  - Applications
- ❻ Produit mixte
  - Définition
  - Propriétés
  - Applications
- ❼ Barycentres
  - Barycentre de deux points
  - Barycentre de  $n$  points
  - Coordonnées d'un barycentre
  - Associativité des barycentres
  - Lien avec la physique : centre d'inertie

## 1. Géométrie vectorielle de l'espace a) Vecteurs

### Vecteurs

Un vecteur du plan ou de l'espace est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** (ou **norme**).

Une **base** du plan est la donnée de deux vecteurs **non colinéaires**. Une **base** de l'espace est la donnée de trois vecteurs **non coplanaires**. Elle permet de repérer n'importe quel vecteur du plan ou de l'espace à l'aide de ses **composantes** (on dit aussi parfois **coordonnées**).

**Composantes/bases** dans l'espace : diverses notations

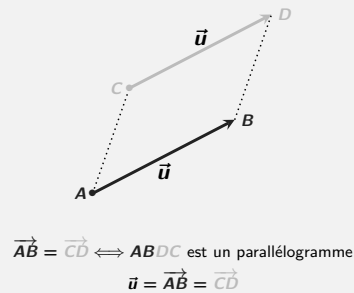
- $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  signifie :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$   
 $\hookrightarrow$  notation simple en dimension 2 ou 3.
- $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  signifie :  $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$   
 $\hookrightarrow$  notation généralisable en dimension supérieure (cf. cours de Mathématiques).
- $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  signifie :  $\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$   
 $\hookrightarrow$  notation utile pour les changements de systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques... Cf. cours d'OMNI).

## 1. Géométrie vectorielle de l'espace b) Points

### Vecteurs et points

Un vecteur du plan ou de l'espace est géométriquement représenté par un **bipoint**  $(A, B)$  surmonté d'une flèche indiquant le sens :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

Il est ainsi représenté par un segment de droite orienté. Deux segments de droites orientés parallèles, de même longueur et de même sens représentent le même vecteur (règle du parallélogramme).



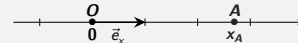
## 1. Géométrie vectorielle de l'espace c) Repérage

### Coordonnées/repères

Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point  $O$  et d'une **base**  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on l'écrit  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Il permet de repérer n'importe quel point de l'espace à l'aide de ses **coordonnées**.

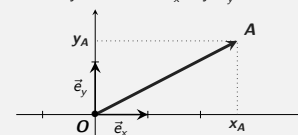
### Repérage sur une droite

Dans un **repère**  $(O; \vec{e}_x)$ , un point quelconque  $A$  de la droite est repéré par son **abscisse**  $x_A$  :  $\vec{OA} = x_A\vec{e}_x$ .



### Repérage dans un plan

Dans un **repère**  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , un point quelconque  $A$  du plan est repéré par son **abscisse**  $x_A$  et son **ordonnée**  $y_A$  :  $\vec{OA} = x_A\vec{e}_x + y_A\vec{e}_y$ .

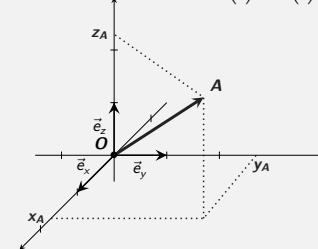


## 1. Géométrie vectorielle de l'espace c) Repérage

### Repérage dans l'espace

Dans un **repère**  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , un point quelconque  $A$  de l'espace est repéré par son **abscisse**  $x_A$ , son **ordonnée**  $y_A$  et sa **cote**  $z_A$  :  $\vec{OA} = x_A\vec{e}_x + y_A\vec{e}_y + z_A\vec{e}_z$ .

On note usuellement les **coordonnées** d'un point en ligne, les **composantes** d'un vecteur en colonne :  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $\vec{e}_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ .



**Remarque** : on parle parfois de coordonnées d'un vecteur, et on les écrit parfois en ligne :  $\vec{OA}(x_A, y_A, z_A)$ .

## 1. Géométrie vectorielle de l'espace c) Repérage

### Vecteurs et points

Si  $(x_A, y_A, z_A)$  et  $(x_B, y_B, z_B)$  sont les **coordonnées** de  $A$  et  $B$  dans le **repère**  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on écrit  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$ . On a

$$\vec{OA} = x_A\vec{e}_x + y_A\vec{e}_y + z_A\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{OB} = x_B\vec{e}_x + y_B\vec{e}_y + z_B\vec{e}_z$$

Alors le vecteur  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$  a pour **composantes** dans la **base**  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}. \text{ On écrit usuellement en colonne : } \vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

**Remarque** : on note parfois les composantes en ligne :  $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ .

On écrit aussi parfois  $\vec{AB} = B - A$  en cohérence avec la relation entre **coordonnées** de  $A$  et  $B$  et **composantes** de  $\vec{AB}$  décrite ci-dessus.

## 2. Produit scalaire a) Définition

**Attention** : il existe plusieurs produits scalaires (cf. cours de Mathématiques de 2<sup>e</sup> année). On parle ici du produit scalaire « usuel » (**euclidien**...)

### Définition 2.1 (Produit scalaire/norme)

❶ Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Leur **produit scalaire** est le **réel**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

où  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$  est l'angle entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

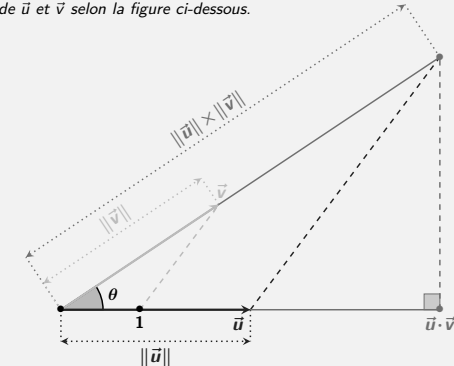
**Remarque** : l'angle n'est pas nécessairement orienté.

❷ La **norme** se déduit inversement du carré scalaire :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .  
 Un vecteur est dit **normé** ou **unitaire** lorsque sa norme vaut 1.

## 2. Produit scalaire a) Définition

### Propriété 2.2 (Visualisation du produit scalaire)

À l'aide du **théorème de Thalès** et de la **trigonométrie** dans un triangle rectangle, en notant  $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$  l'angle géométrique entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (attention, l'angle  $\theta$  peut être aigu ou obtus, donc  $\cos(\theta)$  peut changer de signe), on peut visualiser le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  selon la figure ci-dessous.



2. Produit scalaire

b) Propriétés

Propriété 2.3 (Bilinéarité)

1 Le produit scalaire est **symétrique** :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

2 Le produit scalaire est **bilinéaire** :  $\begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$  (où  $\lambda$  est un réel).

3 Le produit scalaire est **défini positif** :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 > 0$  pour  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .

Propriété 2.4 (Expression analytique)

Soit une base **orthonormée** de l'espace et soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de composantes respectives  $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  dans cette base.

Le **produit scalaire** et la **norme** s'expriment alors en réel selon :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

Remarque 2.5 (Vecteur unitaire)

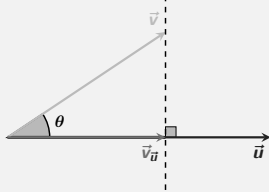
Pour tout vecteur  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , le vecteur  $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$  est un vecteur **unitaire** de mêmes sens et direction que  $\vec{u}$ .

2. Produit scalaire

c) Applications

Propriété 2.6 (Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre)

Le **projeté orthogonal**  $\vec{v}_u$  d'un vecteur  $\vec{v}$  sur un vecteur **non nul**  $\vec{u}$  s'exprime selon

$$\vec{v}_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$


Si l'on note  $\vec{v}_u$  la **mesure algébrique** de  $\vec{v}_u$  sur l'axe **orienté** par  $\vec{u}$ , alors on a :  $\vec{v}_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|}$ . En conséquence,  $\vec{v}_u$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  ont **même signe**.

**Cas particulier** : lorsque  $\vec{u}$  est un vecteur **unitaire**, la formule se simplifie selon

$$\vec{v}_u = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}$$

2. Produit scalaire

c) Applications

Démonstration de la projection (cf. propriété 2.6)

Par trigonométrie dans un triangle rectangle,  $\vec{v}_u = \|\vec{v}\| \cos \theta$  où  $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$  est l'angle géométrique entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Par ailleurs, on a  $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ , donc  $\vec{v}_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|}$ .

On obtient alors le vecteur  $\vec{v}_u$  le long de la droite dirigée par le vecteur **unitaire**  $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$  selon  $\vec{v}_u = \vec{v}_u \left( \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \right) = \frac{\vec{v}_u}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$  d'où  $\vec{v}_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$ .

Exemple 2.7 (Projections sur une base orthonormée)

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de composantes  $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$  dans la base **orthonormée**  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  de l'espace, c'est-à-dire  $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z$ .

On peut obtenir ses composantes grâce aux produits scalaires (**projections** sur les vecteurs de la base) selon

$$\begin{cases} u_x = \vec{u} \cdot \vec{e}_x \\ u_y = \vec{u} \cdot \vec{e}_y \\ u_z = \vec{u} \cdot \vec{e}_z \end{cases}$$

2. Produit scalaire

c) Applications

Démonstration de l'addition (cf. propriété 2.3)

Partant des projetés de  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  :  $\vec{v}_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$  et  $\vec{w}_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$  on obtient  $\vec{v}_u + \vec{w}_u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$ .

D'autre part, le projeté de  $\vec{v} + \vec{w}$  est donné par  $(\vec{v} + \vec{w})_u = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$ .

On a l'égalité des projections :  $(\vec{v} + \vec{w})_u = \vec{v}_u + \vec{w}_u$  d'où par identification :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

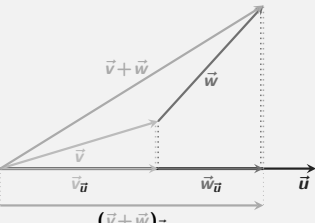


Illustration pour trois vecteurs coplanaires

2. Produit scalaire

c) Applications

Applications géométriques

- Tester l'**orthogonalité** de deux vecteurs :  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux**  $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Tester la **colinéarité** de deux vecteurs :  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires**  $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

Les vecteurs sont alors de **même sens** si le produit scalaire est **positif**.

Exemple 2.8 (Plan orthogonal à un vecteur)

On se place dans une base **orthonormée** de l'espace.

Soit  $a, b, c$  trois réels non simultanément nuls et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur fixé.

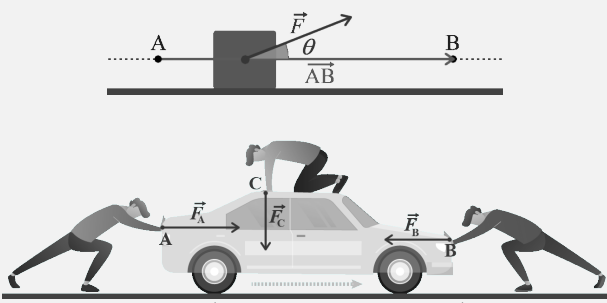
Alors l'ensemble des vecteurs  $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  orthogonaux à  $\vec{u}$  sont caractérisés par la relation  $ax + by + cz = 0$ . Il s'agit d'une **équation cartésienne du plan vectoriel orthogonal** à  $\vec{u}$ .

2. Produit scalaire

c) Applications

Applications physiques

- En mécanique, le **travail** de la force constante  $\vec{F}$  qui déplace en ligne droite son point d'application de A à B est le produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{AB}$ .



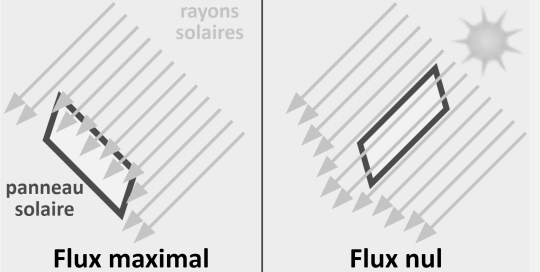
Travail de  $\vec{F}_A$  : **positif maximal**      Travail de  $\vec{F}_B$  : **négatif minimal**  
Travail de  $\vec{F}_C$  : **nul**

2. Produit scalaire

c) Applications

Applications physiques

- Dans divers domaines de la physique (mécanique des fluides, électromagnétisme, thermodynamique, acoustique, etc.) le **flux** d'un champ de vecteurs  $\vec{F}$  à travers une surface orientée  $\Sigma$  est donné par l'intégrale de surface d'un produit scalaire  $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$  où  $d\vec{S}$  représente un vecteur normal « élémentaire » à la surface  $\Sigma$ .



rayons solaires

panneau solaire

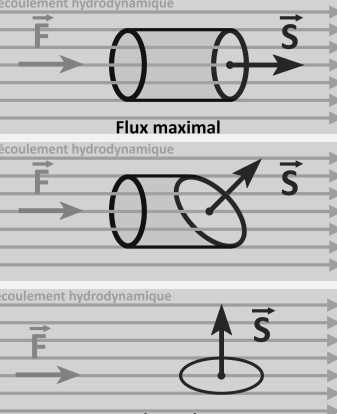
**Flux maximal**      **Flux nul**

2. Produit scalaire

c) Applications

Applications physiques

écoulement hydrodynamique



**Flux maximal**

écoulement hydrodynamique

**Flux nul**

3. Forme linéaire

a) Définition, représentation

Définition 3.1 (Forme linéaire)

Une **forme linéaire** sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que (cf. cours de Mathématiques, chapitre Algèbre linéaire)

$$\begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) \end{cases}$$

Proposition 3.2 (Représentation explicite sur  $\mathbb{R}^3$ )

- Formulation vectorielle**  
Toute forme linéaire  $f$  sur  $\mathbb{R}^3$  vue comme fonction d'une variable vectorielle peut s'écrire dans une base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  de l'espace des vecteurs sous la forme :  
 $f(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = ax + by + cz$
- Formulation ponctuelle (scalaire)**  
Toute forme linéaire  $f$  vue comme fonction de 3 variables réelles (scalaires) peut s'écrire sous la forme :  
 $f(x, y, z) = ax + by + cz$

Remarque 3.3 (Coefficients d'une forme linéaire)

Les coefficients  $a, b, c$  peuvent s'exprimer en fonction de  $f$  suivant chacune des deux formulations selon

$$a = f(\vec{e}_x), b = f(\vec{e}_y), c = f(\vec{e}_z) \quad \text{ou} \quad a = f(1, 0, 0), b = f(0, 1, 0), c = f(0, 0, 1)$$

## Remarque 3.4 (Lien avec le calcul différentiel)

- Pour toute **forme linéaire**  $f$  sur  $\mathbb{R}^3$ , ses coefficients  $a, b, c$  s'obtiennent par **dérivations partielles** (cf. chapitre Calcul différentiel) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = a \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = b \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = c$$

Ces dérivées partielles définissent un vecteur appelé « **gradient** » de  $f$  en  $(x, y, z)$ , noté  $\text{grad } f(x, y, z)$  ou  $\vec{\nabla} f(x, y, z)$  (opérateur « **nabla** »).

Dans le cas présent d'une **forme linéaire**, ce vecteur gradient est **constant**.

- Si la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est **orthonormée**, la **forme linéaire**  $f$  peut s'exprimer à l'aide d'un **produit scalaire** par son **gradient** selon

$$f(x, y, z) = \text{grad } f(x, y, z) \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

17

## Ensembles de niveau

Les **ensembles de niveau** pour une fonction à valeurs réelles  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  des points dont la valeur de  $f$  est **constante**.

- Cas du plan ( $n = 2$ )**

Les ensembles de niveau sont des **courbes de niveau** :

$$E_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Cas de l'espace ( $n = 3$ )**

Les ensembles de niveau sont des **surfaces de niveau** :

$$E_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = k\}, \quad k \in \mathbb{R}$$

## Exemple 3.5 (Ensembles de niveau pour les formes linéaires)

- Cas du plan**

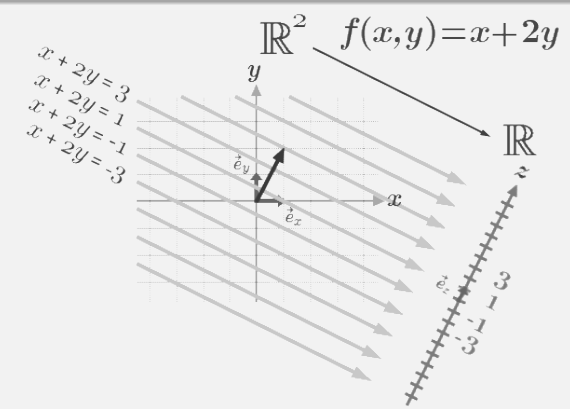
Les **ensembles de niveau** d'une **forme linéaire**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (pour  $a, b$  non simultanément nuls) sont les **droites parallèles** d'équation  $ax + by = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , **perpendiculaires** au vecteur  $(a, b)$ .

- Cas de l'espace**

Les **ensembles de niveau** d'une **forme linéaire**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (pour  $a, b, c$  non simultanément nuls) sont les **plans parallèles** d'équation  $ax + by + cz = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , **perpendiculaires** au vecteur  $(a, b, c)$ .

18

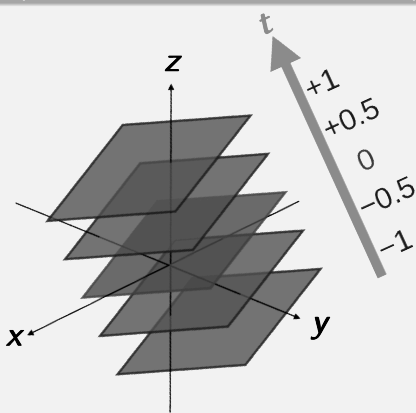
## Exemple 3.6 (Ensembles de niveau pour les formes linéaires)



Lignes de niveau d'une forme linéaire 2D : droites parallèles

19

## Exemple 3.6 (Ensembles de niveau pour les formes linéaires)



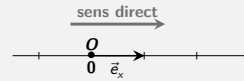
Surfaces de niveau d'une forme linéaire 3D : plans parallèles

20

## Orientation d'une droite

Pour **orienter** une droite, on choisit une origine  $O$  et un sens de parcours sur la droite (2 orientations possibles).

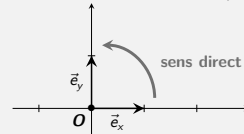
Le vecteur **unitaire** choisi  $\vec{e}_x$  donne l'orientation choisie. On définit ainsi un **repère normé orienté**  $(O; \vec{e}_x)$ .



## Orientation d'un plan

On choisit un axe de repère normé  $(O; \vec{e}_x)$  puis un deuxième axe passant par  $O$  de repère normé  $(O; \vec{e}_y)$ , perpendiculaire au premier. On choisit un sens de rotation pour passer des vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$  à  $\vec{e}_y$ , c'est le **sens direct** ou **trigonométrique**.

On obtient ainsi un **repère orthonormé direct**  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .



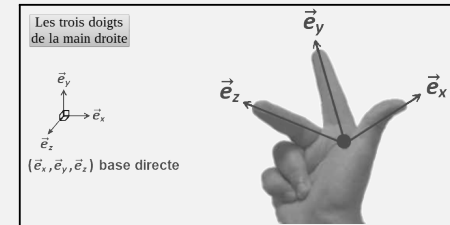
21

## Orientation de l'espace

Une fois un plan de l'espace muni d'un repère **orthonormé**  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , il y a deux choix possibles (opposés) du dernier vecteur **unitaire**  $\vec{e}_z$  **orthogonal** aux deux premiers, pour **orienter** l'espace.

**En physique**, le **sens direct** du repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  correspond à la **règle des trois doigts de la main droite** :

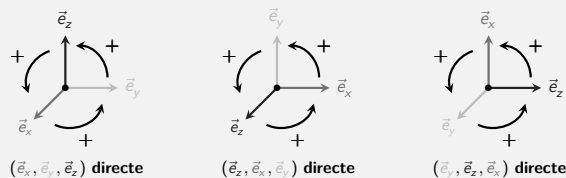
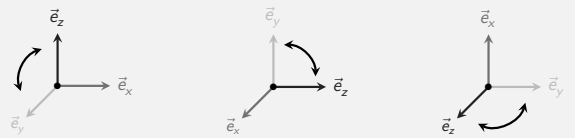
**pouce** :  $\vec{e}_x$     **index** :  $\vec{e}_y$     **majeur** :  $\vec{e}_z$



On obtient un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , dans lequel les trois vecteurs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  sont **unitaires** et **orthogonaux** deux à deux, **orienté** selon la règle précédente. On dit que c'est un **repère orthonormé direct**.

22

## Orientation et permutations

Une permutation **circulaire** conserve l'orientationUne permutation de **deux vecteurs** inverse l'orientation

23

## Orientation d'une base quelconque de l'espace

Considérons une base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de l'espace **non orthogonale**.

- On introduit les vecteurs

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}} \quad \text{et} \quad \vec{w}' = \vec{w} - \vec{w}_{\vec{u}} - \vec{w}_{\vec{v}'}$$

où  $\vec{v}_{\vec{u}}$  est le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur  $\vec{u}$ , et  $\vec{w}_{\vec{u}}$  et  $\vec{w}_{\vec{v}'}$  sont respectivement les projetés orthogonaux de  $\vec{w}$  sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}'$ .

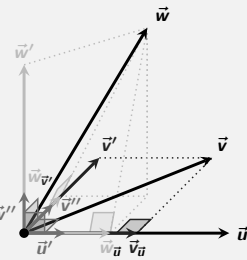
On construit ainsi une base **orthogonale**  $(\vec{u}, \vec{v}', \vec{w}')$  de l'espace.

- On norme ensuite les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}', \vec{w}'$  en posant :

$$\vec{u}'' = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}, \quad \vec{v}'' = \frac{1}{\|\vec{v}'\|} \vec{v}', \quad \vec{w}'' = \frac{1}{\|\vec{w}'\|} \vec{w}'$$

On construit ainsi une base **orthonormée**  $(\vec{u}'', \vec{v}'', \vec{w}'')$  de l'espace.

On définit alors l'**orientation** de la base quelconque  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  comme étant celle de la base **orthonormée**  $(\vec{u}'', \vec{v}'', \vec{w}'')$ .

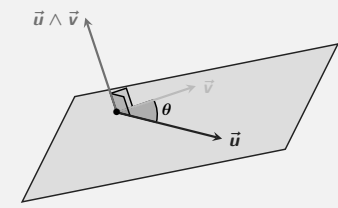


24

## Définition 5.1 (Produit vectoriel)

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace **orienté**. Leur **produit vectoriel** est le **vecteur**  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  défini par :

- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** ou que l'un des deux est nul,  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  ;
- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont ni nuls ni colinéaires, alors  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est l'unique vecteur dont les caractéristiques sont :
  - direction** :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est **orthogonal** à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ;
  - sens** : la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est **directe** ;
  - longueur** :  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\angle(\vec{u}, \vec{v}))|$ .



**Attention** : le produit vectoriel de deux vecteurs n'existe qu'en dimension 3 !

25

5. Produit vectoriel | b) Propriétés

**Propriété 5.2 (Bilinéarité)**

- Le produit vectoriel est **antisymétrique** :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ .
- Le produit vectoriel est **bilinéaire**, c'est-à-dire **linéaire par rapport à chaque variable** :
 
$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} & \text{et} & \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) & & \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$$
- Dans une **base orthonormée directe** de l'espace  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de composantes respectives  $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ .

Le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  a pour composantes :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

En particulier, si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs du plan de base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  donc de composantes respectives  $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_x v_y - u_y v_x) \vec{e}_z$ .

36

5. Produit vectoriel | b) Propriétés

**Composantes : procédé mnémotechnique**

Retenir les expressions des composantes d'un produit vectoriel étant difficile, il est pratique de procéder comme suit :

- on écrit les composantes des vecteurs sous forme de matrices-colonnes ;
- on recopie les deux premières composantes de chaque colonne en dessous ;
- on note l'emplacement des « produits en croix » et l'on effectue les différences des produits en croix :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

On peut aussi calculer les composantes d'un produit vectoriel à l'aide d'un déterminant. En posant  $\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = ad - bc$  (déterminant d'ordre 2) et en « développant » par rapport à la 3<sup>e</sup> colonne :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & \vec{e}_x \\ u_y & v_y & \vec{e}_y \\ u_z & v_z & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \vec{e}_z$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y) \vec{e}_x - (u_x v_z - u_z v_x) \vec{e}_y + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{e}_z$$

27

5. Produit vectoriel | b) Propriétés

**Remarque 5.3**

Dans toute **base orthonormée directe** de l'espace  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y &= -\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z &= -\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x &= -\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_y \end{aligned}$$

**Démonstration de l'expression analytique (cf. propriété 5.2)**

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z) \wedge (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) \\ &= (u_x \vec{e}_x) \wedge (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) + u_y \vec{e}_y \wedge (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) \\ &\quad + u_z \vec{e}_z \wedge (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) \text{ par linéarité par rapport à la 1<sup>re</sup> variable} \\ &= (u_x \vec{e}_x) \wedge (v_x \vec{e}_x) + (u_x \vec{e}_x) \wedge (v_y \vec{e}_y) + (u_x \vec{e}_x) \wedge (v_z \vec{e}_z) \\ &\quad + (u_y \vec{e}_y) \wedge (v_x \vec{e}_x) + (u_y \vec{e}_y) \wedge (v_y \vec{e}_y) + (u_y \vec{e}_y) \wedge (v_z \vec{e}_z) \\ &\quad + (u_z \vec{e}_z) \wedge (v_x \vec{e}_x) + (u_z \vec{e}_z) \wedge (v_y \vec{e}_y) + (u_z \vec{e}_z) \wedge (v_z \vec{e}_z) \end{aligned}$$

On simplifie tout ceci en utilisant  $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{0}$ ,  $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$ ,  $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ , etc. On obtient  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{e}_x + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{e}_y + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{e}_z$ .

28

5. Produit vectoriel | c) Applications

**Applications géométriques**

- Calcul d'aire** : l'aire du **parallélogramme** construit sur les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est donnée par  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ .

aire = base ( $\|\vec{u}\|$ )  $\times$  hauteur ( $\|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$ ) =  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

**Remarque** : dans le plan orienté,

- $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$  représente l'aire **géométrique** (positive) du parallélogramme ;
- $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$  représente l'aire **algébrique** (avec un éventuel signe) du parallélogramme.

29

5. Produit vectoriel | c) Applications

**Applications géométriques**

- Calcul d'aire** : l'aire du **parallélogramme** construit sur les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est donnée par  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ .

30

5. Produit vectoriel | c) Applications

**Démonstration de l'aire d'un parallélogramme (cf. propriété 5.2)**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan de base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  de composantes respectives  $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_x v_y - u_y v_x) \vec{e}_z$ .

aire du parallélogramme = aire du grand rectangle - aire des 2 triangles sur  $\vec{u}$  - aire des 2 triangles sur  $\vec{v}$  - aire des deux petits rectangles

$$(u_x + v_x)(u_y + v_y) - 2 \times u_x u_y / 2 - 2 \times v_x v_y / 2 - 2 u_y v_x = u_x v_y - u_y v_x$$

31

5. Produit vectoriel | c) Applications

**Démonstration de l'addition (cf. propriété 5.2)**

Lorsque les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  sont **coplanaires** il est aisé de vérifier géométriquement la bilinéarité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

En effet, en notant  $\vec{n}$  le vecteur unitaire orthogonal au plan engendré par les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$  et  $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{n})$  soient des bases directes :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \vec{n} \quad \vec{u} \wedge \vec{w} = \|\vec{u} \wedge \vec{w}\| \vec{n} \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \|\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})\| \vec{n}$$

Le schéma ci-dessous indique que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| + \|\vec{u} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})\|$$

d'où le résultat.

aire du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  + aire du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  = aire du parallélogramme construit sur  $\vec{v} + \vec{w}$

32

5. Produit vectoriel | c) Applications

**Applications géométriques**

- Tester la **colinéarité** de deux vecteurs :  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires**  $\iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Tester l'**orthogonalité** de deux vecteurs :  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux**  $\iff \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- Tester la **coplanarité** de trois vecteurs :  
 $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont **coplanaires**  $\iff \begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= 0 \\ \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) &= 0 \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$

**Remarque** : la quantité  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$  s'appelle **produit mixte** des trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , ce produit est noté  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$  (cf. paragraphe 6.1). Il se trouve que les trois nombres  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ,  $\vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$ ,  $\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$  coïncident...

- Calcul d'un vecteur **orthogonal** à deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  non colinéaires :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .
- Calcul d'un vecteur **normal** à un plan défini par trois points A, B, C :  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .

33

5. Produit vectoriel | c) Applications

**Applications physiques**

- Le **moment** d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point M par rapport à un autre point O est défini par  
 $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$   
 C'est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point, souvent appelé pivot. Il s'exprime en N · m (Newton mètre).
- La **relation de Lorentz** exprime la force magnétique exercée sur une particule de charge électrique, animée d'une vitesse dans un champ magnétique :  
 $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$   
 La force de Lorentz a toujours une puissance nulle car elle est constamment perpendiculaire au vecteur vitesse de la particule :  
 $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$

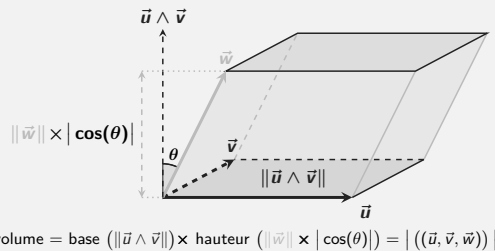
34

## Définition 6.1 (Produit mixte)

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace orienté. Le **produit mixte** de ces trois vecteurs est le **réel**  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ . Il est également noté  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .

## Interprétation géométrique

Le volume du **parallélépipède** construit sur les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est donné par  $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ .



35

## Applications géométriques

On peut

- tester la **coplanarité** de 3 vecteurs :  
 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont **coplanaires**  $\iff ((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = 0$
- tester l'**orientation** de 3 vecteurs :  
 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  forment une **base directe**  $\iff ((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) > 0$

## Démonstration du test de coplanarité

❶ **Sens direct** ( $\Rightarrow$ ) : supposons  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  coplanaires.

Alors l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des deux autres, par exemple  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$  pour des réels  $a$  et  $b$ .

Dans ce cas, par **trilinéarité** (cf. propriété 6.2) :

$$((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = ((\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v})) = a((\vec{u}, \vec{v}, \vec{u})) + b((\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}))$$

Or, toujours d'après 6.2,  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{u})) = ((\vec{u}, \vec{v}, \vec{v})) = 0$ . D'où  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = 0$ .

❷ **Sens réciproque** ( $\Leftarrow$ ) : supposons  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = 0$ .

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires**, alors  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  coplanaires.

❸ Supposons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  **non colinéaires**.

D'après la définition 6.1 du produit mixte,  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{w}$ .

Or, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est le plan engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , c'est-à-dire l'ensemble des **combinaisons linéaires**  $a\vec{u} + b\vec{v}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Donc  $\vec{w}$  est une **combinaison linéaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . D'où  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont **coplanaires**.

38

## Définition 7.1 (Barycentre de deux points)

Soit  $(A_1, m_1)$  et  $(A_2, m_2)$  deux points pondérés de l'espace tels que  $A_1 \neq A_2$  et l'un des réels  $m_1, m_2$  soit non nul.

Un **barycentre** de  $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$  est un point  $G$  de l'espace vérifiant

$$m_1 \vec{GA}_1 + m_2 \vec{GA}_2 = \vec{0}.$$

## Analyse

Supposons qu'un tel  $G$  existe. Soit  $M$  un point quelconque de l'espace.

Avec la relation de Chasles :

$$m_1 \vec{GA}_1 + m_2 \vec{GA}_2 = \vec{0} \iff m_1(\vec{GM} + \vec{MA}_1) + m_2(\vec{GM} + \vec{MA}_2) = \vec{0}$$

$$\iff (m_1 + m_2)\vec{GM} = m_1 \vec{MA}_1 + m_2 \vec{MA}_2$$

Disjonction de cas :

- si  $m_1 + m_2 \neq 0$ , alors, en prenant pour  $M$  l'origine  $O$  d'un repère, on obtient

$$\vec{OG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{OA}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{OA}_2$$

Donc  $G$  existe et est défini de manière unique ;

- si  $m_1 + m_2 = 0$ , on obtient  $m_1(\vec{OA}_1 - \vec{OA}_2) = \vec{0}$  donc  $\vec{A_1A_2} = \vec{0}$  puisque  $m_1 \neq 0$ . Cela donne  $A_1 = A_2$ , qui est absurde :  $G$  n'existe pas.

41

## Propriété 6.2 (Permutations, trilinéarité)

- De l'interprétation du produit vectoriel en tant que volume d'un parallélépipède, on déduit l'invariance ou anti-invariance par permutations de  $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$ . De manière plus précise :

- Le **produit mixte** est **antisymétrique** : si on échange 2 vecteurs (côte à côte), le résultat est multiplié par  $-1$ .

$$((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = -((\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})) = -((\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})) = -((\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}))$$

- Le **produit mixte** est **invariant par permutations circulaires** :

$$((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = ((\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})) = ((\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}))$$

Par exemple, la première égalité s'écrit  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ .

- Le **produit mixte** de trois vecteurs dont deux sont **colinéaires** est nul.

- Le **produit mixte** est **trilinéaire**, c'est-à-dire **linéaire** par rapport à chaque variable :

$$((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{w}')) = ((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) + ((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'))$$

$$((\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w})) = \lambda((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$$

et de même avec les deux autres variables.

36

## Propriété 6.3 (Expression analytique)

On se place dans une **base orthonormée directe**  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  de l'espace.

Le **produit mixte** des vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$  vaut :

$$((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = u_x v_y w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_z v_y w_x - u_y v_x w_z - u_x v_z w_y$$

Le **produit mixte** de trois vecteurs est en fait un **déterminant** de matrice (cf. cours de Mathématiques de 2<sup>e</sup> année). On le note alors de la manière suivante, et l'on dispose d'une méthode mnémotechnique pour le calculer (**règle de Sarrus**) :

$$((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

37

## Applications géométriques : équation d'un plan

**Cas particulier** : soit  $a, b, c$  trois réels non nuls et  $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$  et  $C(0, 0, c)$ . Déterminons l'équation du plan  $(P)$  défini par les trois points  $A, B, C$ .

Soit  $M(x, y, z)$  un point générique de l'espace. On a :

$$M \in P \iff \text{les 4 points } A, B, C, M \text{ sont coplanaires}$$

$$\iff \text{les 3 vecteurs } \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AM} \text{ sont coplanaires}$$

$$\iff ((\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC})) = 0$$

- Premier calcul** : partant de  $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{AC} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$  :

$$((\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC})) = \begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = bc(x-a) + acy + abz$$

- Deuxième calcul** : partant de  $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}$  :

$$((\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC})) = \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = bc(x-a) + acy + abz$$

En égalant alors  $((\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}))$  à 0, on tire l'équation  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

39

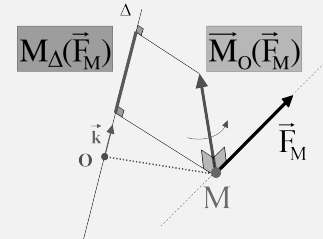
## Application physique : moment d'une force par rapport à un axe

- Le **moment** d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$  orienté de vecteur directeur unitaire  $\vec{k}$  passant par un point  $O$  est défini par

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{k} = ((\vec{OM}, \vec{F}, \vec{k}))$$

C'est une grandeur physique scalaire traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de cet axe.

Elle s'exprime en  $N \cdot m$  (Newton mètre).



**Remarque** : cette quantité ne dépend pas du point  $O$  sur l'axe  $\Delta$ .

40

Ce qui démontre la propriété suivante :

## Propriété 7.2 (Formule du barycentre)

- Les points pondérés  $(A_1, m_1)$  et  $(A_2, m_2)$  de l'espace admettent un barycentre si et seulement si  $m_1 + m_2 \neq 0$ .
- Le barycentre, lorsqu'il existe, est **unique**.
- Lorsque  $m_1 + m_2 \neq 0$ , si  $G$  est le barycentre de  $(A_1, m_1)$  et  $(A_2, m_2)$ , pour tout point  $M$  de l'espace :

$$\vec{MG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{MA}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{MA}_2.$$

En particulier, si  $O$  est l'origine d'un repère de l'espace alors :

$$\vec{OG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{OA}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{OA}_2.$$

Si de plus  $m_1 = m_2$ , alors

$$\vec{OG} = \frac{1}{2} \vec{OA}_1 + \frac{1}{2} \vec{OA}_2.$$

Dans ce cas,  $G$  est le **milieu** du segment  $[A_1, A_2]$ .

42

## Propriété 7.3 (Position relative du barycentre)

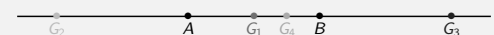
Soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$  de l'espace. Alors :

- $G$  appartient à la droite  $(A_1A_2)$ ,
- $G$  appartient au segment  $[A_1A_2]$  si et seulement si  $m_1 m_2 > 0$
- $G$  est le plus près du point  $A_i$  dont la pondération  $m_i$  est la plus grande en valeur absolue :  $|m_i| = \max(|m_1|, |m_2|)$ ,
- si  $m_1 = m_2$  alors  $G$  est le milieu de  $[A_1A_2]$ . On l'appelle **isobarycentre** de  $A_1$  et  $A_2$ .

## Exemple 7.4 (Position relative du barycentre)

Soit  $A, B$  deux points. Sur la figure ci-dessous, on a placé les barycentres

- $G_1$  de  $(A, 2), (B, 2)$  :  
 $\begin{cases} \vec{OG}_1 = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB} \\ \implies \vec{AG}_1 = \frac{1}{2} \vec{AB} \end{cases}$
- $G_2$  de  $(A, -2), (B, 1)$  :  
 $\begin{cases} \vec{OG}_2 = 2 \vec{OA} - \vec{OB} \\ \implies \vec{AG}_2 = -\vec{AB} \end{cases}$
- $G_3$  de  $(A, 1), (B, -2)$  :  
 $\begin{cases} \vec{OG}_3 = -\vec{OA} + 2 \vec{OB} \\ \implies \vec{AG}_3 = 2 \vec{AB} \end{cases}$
- $G_4$  de  $(A, -1), (B, -3)$  :  
 $\begin{cases} \vec{OG}_4 = \frac{1}{4} \vec{OA} + \frac{3}{4} \vec{OB} \\ \implies \vec{AG}_4 = \frac{3}{4} \vec{AB} \end{cases}$



43

7. Barycentres

b) Barycentre de  $n$  points

**Définition 7.5 (Barycentre de  $n$  points)**

Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  points distincts de l'espace et soit  $m_1, m_2, \dots, m_n$   $n$  réels non tous nuls.

Un **barycentre** des points pondérés  $(A_i, m_i), i \in \{1, \dots, n\}$  est un point  $G$  de l'espace vérifiant

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Lorsque tous les  $m_i$  sont égaux, on parle d'**isobarycentre**.

On peut facilement généraliser les propriétés du barycentre de 2 points :

**Propriété 7.6 (Formule du barycentre)**

Le barycentre des  $n$  points pondérés  $(A_i, m_i), i \in \{1, \dots, n\}$  **existe et est unique** si et seulement si  $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ .

Dans ce cas, en notant  $G$  le barycentre, on a pour tout point  $M$  de l'espace :

$$\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\mathcal{M}} \overrightarrow{MA_i}$$

$\mathcal{M}$  est la **masse totale** du système de points pondérés.

44

7. Barycentres

b) Barycentre de  $n$  points

**Remarque 7.7 (Proportionnalité des poids)**

Ce qui détermine un barycentre n'est pas le poids  $m_i$  en lui-même mais le **rapport**  $\frac{m_i}{\mathcal{M}}$ .

En effet, le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas si on multiplie tous les poids par un **même nombre**.

En d'autres termes, pour tout  $\alpha \neq 0$ , les systèmes de points pondérés

$$(A_i, m_i), i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } (A_i, \alpha m_i), i \in \{1, \dots, n\}$$

ont **même barycentre**.

Lorsque tous les poids  $m_i$  coïncident, l'**isobarycentre**  $G$  des  $n$  points est donné par

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i}$$

45

7. Barycentres

c) Coordonnées d'un barycentre

**Propriété 7.8 (Coordonnées d'un barycentre)**

Dans l'espace muni d'un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , si  $G$  est barycentre de  $n$  points pondérés  $(A_i, m_i), i \in \{1, \dots, n\}$ , la relation vectorielle  $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\mathcal{M}} \overrightarrow{OA_i}$  permet de donner les coordonnées de  $G$  en fonction de celles des  $A_i$  :

$$(x_G, y_G, z_G) = \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^n m_i x_{A_i}, \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^n m_i y_{A_i}, \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^n m_i z_{A_i} \right)$$

Dans le cas d'un **isobarycentre** (c'est-à-dire lorsque tous les  $m_i$  sont identiques) :

$$(x_G, y_G, z_G) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{A_i}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{A_i}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{A_i} \right)$$

Dans le plan les relations ci-dessus sont analogues, il suffit de supprimer la 3<sup>e</sup> coordonnée en  $z$ .

**Exemple 7.9 (Coordonnées d'un barycentre)**

Les coordonnées du barycentre de 2 points  $((A, a), (B, b))$  avec  $a + b \neq 0$  dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  sont  $(x_G, y_G) = \left( \frac{ax_A + bx_B}{a + b}, \frac{ay_A + by_B}{a + b} \right)$ .

46

7. Barycentres

d) Associativité des barycentres

**Théorème 7.10 (Associativité des barycentres, cas de 3 points)**

Dans l'espace, si  $G$  est le barycentre de  $(A, a), (B, b), (C, c)$  avec  $a + b + c \neq 0$ , et si  $H$  est le barycentre de  $(A, a), (B, b)$  avec  $a + b \neq 0$ , alors  $G$  est le barycentre de  $(H, a + b)$  et  $(C, c)$ .  $H$  est appelé **barycentre partiel**.

En d'autres termes :

$$\begin{aligned} & \text{Barycentre}((A, a), (B, b), (C, c)) \\ &= \text{Barycentre}\left(\left(\text{Barycentre}((A, a), (B, b)), a + b\right), (C, c)\right) \end{aligned}$$

47

7. Barycentres

d) Associativité des barycentres

**Démonstration de l'associativité (cf. théorème 7.10)**

Soit  $G$  le barycentre de  $(A, a), (B, b), (C, c)$  et  $H$  le barycentre de  $(A, a), (B, b)$ . Ils existent car  $a + b \neq 0$  et  $a + b + c \neq 0$ .

On a pour tout point  $M$  de l'espace :

$$(a + b + c)\overrightarrow{MG} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad (a + b)\overrightarrow{MH} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}.$$

En remplaçant, on obtient  $(a + b + c)\overrightarrow{MG} = (a + b)\overrightarrow{MH} + c\overrightarrow{MC}$  donc

$$\overrightarrow{MG} = \frac{a + b}{a + b + c} \overrightarrow{MH} + \frac{c}{a + b + c} \overrightarrow{MC}$$

ce qui prouve que  $G$  est le barycentre du  $(H, a + b), (C, c)$ .

48

7. Barycentres

d) Associativité des barycentres

**Théorème 7.11 (Associativité du barycentre, cas de  $n$  points)**

Dans l'espace, si :

- $G_A$  est le barycentre de  $p$  points pondérés  $(A_i, m_i), i \in \{1, \dots, p\}$ ,
- $G_B$  est le barycentre de  $q$  points pondérés  $(B_j, n_j), j \in \{1, \dots, q\}$ ,
- $G$  est le barycentre des  $p + q$  points pondérés  $(A_i, m_i), i \in \{1, \dots, p\}$  et  $(B_j, n_j), j \in \{1, \dots, q\}$ ,

alors, sous réserve que  $\sum_{i=1}^p m_i + \sum_{j=1}^q n_j \neq 0$ ,  $G$  est aussi le barycentre des deux points pondérés  $\left(G_A, \sum_{i=1}^p m_i\right)$  et  $\left(G_B, \sum_{j=1}^q n_j\right)$ .

49

7. Barycentres

e) Lien avec la physique : centre d'inertie

**Barycentre et centre d'inertie**

- Le **centre d'inertie** de  $n$  masses ponctuelles est le **barycentre** des points affectés de leur masse.
- Le **centre d'inertie** d'une plaque homogène ayant un centre de symétrie est précisément ce **centre de symétrie**.

- Le **centre d'inertie** d'une tige homogène est son milieu.
- Le **centre d'inertie** d'une plaque triangulaire homogène ABC est l'**isobarycentre** des points A, B, C. C'est le **point de concours des médianes** du triangle ABC.

50

En résumé...

Notions à retenir

- Produit scalaire
  - Maîtrise du calcul analytique et géométrique
  - Calcul de projections
  - Utilisation en physique
- Produit vectoriel
  - Visualisation de l'orientation
  - Maîtrise du calcul analytique et géométrique
  - Utilisation en physique
- Produit mixte
  - Maîtrise du calcul analytique et géométrique
  - Utilisation en physique
- Barycentres
  - Maîtrise du calcul
  - Utilisation en physique

51

Annexes

- Autres règles d'orientation
- Applications des produits scalaire, vectoriel et mixte
- Applications des barycentres

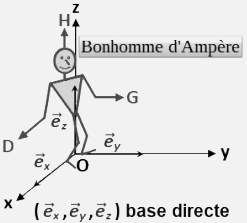
### A. Autres règles d'orientation

#### Orientation de l'espace

**En physique**, on retrouve naturellement la notion de **sens direct spatial** dans diverses situations de la vie courante.

- Règle du bonhomme d'ampère**


bras **droit** :  $\vec{e}_x$   
bras **gauche** :  $\vec{e}_y$   
de **bas en haut** :  $\vec{e}_z$



Bonhomme d'Ampère

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  base directe
- Règle de la rotation de la Terre**

La Terre tourne autour de son axe polaire **orienté du Sud au Nord de l'Ouest vers l'Est**.



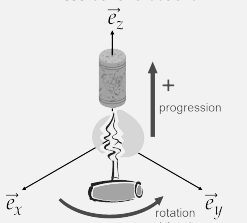
### A. Autres règles d'orientation

#### Orientation de l'espace

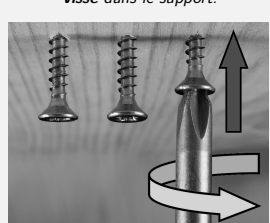
**En physique**, on retrouve naturellement la notion de **sens direct spatial** dans diverses situations de la vie courante.

- Règle du tire-bouchon**

Un tire-bouchon tenu dans la **main droite** que l'on tourne dans le sens qui amène le **pouce** vers l'**index** **visse** dans le bouchon.


- Règle du tourne-vis**

Un tourne-vis tenu dans la **main droite** que l'on tourne dans le sens qui amène le **pouce** vers l'**index** **visse** dans le support.

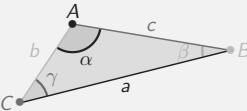


### B. Applications du produit scalaire

#### a) Trigonométrie

**Application trigonométrique : loi des cosinus (théorème d'Al-Kashi)**

On considère un triangle quelconque  $ABC$  de côtés  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$  et d'angles (non orientés)  $\alpha = \hat{A}$ ,  $\beta = \hat{B}$ ,  $\gamma = \hat{C}$ .  
La **loi des cosinus** permet d'exprimer chacun des angles  $\alpha, \beta, \gamma$  en fonction des côtés  $a, b, c$  du triangle.



Notons  $\vec{u} = \vec{CB}$  et  $\vec{v} = \vec{CA}$ .  
On a alors  $\vec{BA} = \vec{v} - \vec{u}$ ,  $\|\vec{u}\| = a$ ,  $\|\vec{v}\| = b$ ,  $\|\vec{u} - \vec{v}\| = c$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = ab \cos(\gamma)$ .  
D'autre part, par bilinéarité du produit scalaire, on a  
 $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$   
d'où l'on tire  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$

ou encore  $\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

### B. Applications du produit scalaire

#### b) Projection plane

**Exercice B.1 (Projection plane)**

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On se donne :

- $(P)$  le plan d'équation  $ax + by + cz = d$  ( $a, b, c, d$  non nuls);
- $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de  $(P)$ ;
- $M(x_M, y_M, z_M)$  un point quelconque de l'espace;
- $\vec{V} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  un vecteur quelconque de l'espace.

1 Donner un vecteur  $\vec{n}$  unitaire normal à  $(P)$ . On note  $(D)$  la droite passant  $A$  orthogonale à  $P$ . Elle est alors déterminée par  $A$  et  $\vec{n}$ .

2 **Aspect vectoriel**

- Déterminer le projeté de  $\vec{V}$  sur  $(D)$ . Donner son expression en fonction de  $\vec{n}$  puis donner ses composantes.
- En déduire le projeté de  $\vec{V}$  sur le plan  $(P)$  en fonction de vecteurs déjà déterminés. Puis donner ses composantes.

3 **Aspect ponctuel**  
Déterminer les projetés de  $M$  sur  $(D)$  et sur  $(P)$  en fonction de vecteurs déterminés précédemment. Expliquer comment obtenir leurs coordonnées.

### B. Applications du produit scalaire

#### Solution (Projection plane)

1 **Autre méthode.**  
Comme  $A \in (P)$ , on a  $ax_A + by_A + cz_A = d$ .  
Soit  $M(x, y, z)$  un point quelconque de l'espace et  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .  
Le point  $M$  appartient à  $(P)$  ssi  $ax + by + cz = d$   
ou encore ssi  $ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A$   
qui s'écrit aussi  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ .  
Or l'expression  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$  n'est autre que le produit scalaire  $\vec{N} \cdot \vec{AM}$ .  
Ainsi,  $M \in (P)$  ssi les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{N}$  sont orthogonaux.  
Le vecteur  $\vec{AM}$  étant un vecteur générique de la direction du plan  $(P)$ , on a trouvé un vecteur  $\vec{N}$  orthogonal à  $(P)$ .

### B. Applications du produit scalaire

#### b) Projection plane

**Solution (Projection plane)**

2 On a  $\vec{V}_D = \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{av_x + bv_y + cv_z}{a^2 + b^2 + c^2} \vec{n}$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 v_x + abv_y + acv_z \\ abv_x + b^2 v_y + bcv_z \\ acv_x + bcv_y + c^2 v_z \end{pmatrix}$$

1 L'autre projection s'obtient en remarquant que  $\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_D$  donc  $\vec{V}_P = \vec{V} - \vec{V}_D$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2)v_x - abv_y - acv_z \\ -abv_x + (a^2 + c^2)v_y - bcv_z \\ -acv_x - bcv_y + (a^2 + b^2)v_z \end{pmatrix}$$

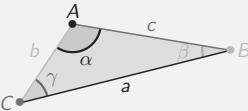
3 En choisissant  $\vec{V} = \vec{AM}$ , on trouve  $\vec{AM}_D = \vec{V}_D$  et  $\vec{AM}_P = \vec{V}_P$ , donc  $M_D = A + \vec{V}_D$  et  $M_P = A + \vec{V}_P$ .  
On peut ainsi obtenir les coordonnées de  $M_D$  et  $M_P$  à l'aide des composantes de  $\vec{V}_D$  et  $\vec{V}_P$  en changeant les composantes  $v_x, v_y, v_z$  en  $x - x_A, y - y_A, z - z_A$ .

### B. Applications du produit scalaire

#### a) Trigonométrie

**Application trigonométrique : loi des cosinus (théorème d'Al-Kashi)**

On considère un triangle quelconque  $ABC$  de côtés  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$  et d'angles (non orientés)  $\alpha = \hat{A}$ ,  $\beta = \hat{B}$ ,  $\gamma = \hat{C}$ .  
La **loi des cosinus** permet d'exprimer chacun des angles  $\alpha, \beta, \gamma$  en fonction des côtés  $a, b, c$  du triangle.



Notons  $\vec{u} = \vec{CB}$  et  $\vec{v} = \vec{CA}$ .  
On a alors  $\vec{BA} = \vec{v} - \vec{u}$ ,  $\|\vec{u}\| = a$ ,  $\|\vec{v}\| = b$ ,  $\|\vec{u} - \vec{v}\| = c$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = ab \cos(\gamma)$ .  
D'autre part, par bilinéarité du produit scalaire, on a  
 $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$   
d'où l'on tire  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$

ou encore  $\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

### B. Applications du produit scalaire

#### b) Projection plane

**Exercice B.1 (Projection plane)**

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On se donne :

- $(P)$  le plan d'équation  $ax + by + cz = d$  ( $a, b, c, d$  non nuls);
- $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de  $(P)$ ;
- $M(x_M, y_M, z_M)$  un point quelconque de l'espace;
- $\vec{V} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  un vecteur quelconque de l'espace.

1 Donner un vecteur  $\vec{n}$  unitaire normal à  $(P)$ . On note  $(D)$  la droite passant  $A$  orthogonale à  $P$ . Elle est alors déterminée par  $A$  et  $\vec{n}$ .

2 **Aspect vectoriel**

- Déterminer le projeté de  $\vec{V}$  sur  $(D)$ . Donner son expression en fonction de  $\vec{n}$  puis donner ses composantes.
- En déduire le projeté de  $\vec{V}$  sur le plan  $(P)$  en fonction de vecteurs déjà déterminés. Puis donner ses composantes.

3 **Aspect ponctuel**  
Déterminer les projetés de  $M$  sur  $(D)$  et sur  $(P)$  en fonction de vecteurs déterminés précédemment. Expliquer comment obtenir leurs coordonnées.

### B. Applications du produit scalaire

#### Solution (Projection plane)

1 **Autre méthode.**  
Comme  $A \in (P)$ , on a  $ax_A + by_A + cz_A = d$ .  
Soit  $M(x, y, z)$  un point quelconque de l'espace et  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .  
Le point  $M$  appartient à  $(P)$  ssi  $ax + by + cz = d$   
ou encore ssi  $ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A$   
qui s'écrit aussi  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ .  
Or l'expression  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$  n'est autre que le produit scalaire  $\vec{N} \cdot \vec{AM}$ .  
Ainsi,  $M \in (P)$  ssi les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{N}$  sont orthogonaux.  
Le vecteur  $\vec{AM}$  étant un vecteur générique de la direction du plan  $(P)$ , on a trouvé un vecteur  $\vec{N}$  orthogonal à  $(P)$ .

### B. Applications du produit scalaire

#### b) Projection plane

**Solution (Projection plane)**

2 On a  $\vec{V}_D = \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{av_x + bv_y + cv_z}{a^2 + b^2 + c^2} \vec{n}$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 v_x + abv_y + acv_z \\ abv_x + b^2 v_y + bcv_z \\ acv_x + bcv_y + c^2 v_z \end{pmatrix}$$

1 L'autre projection s'obtient en remarquant que  $\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_D$  donc  $\vec{V}_P = \vec{V} - \vec{V}_D$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2)v_x - abv_y - acv_z \\ -abv_x + (a^2 + c^2)v_y - bcv_z \\ -acv_x - bcv_y + (a^2 + b^2)v_z \end{pmatrix}$$

3 En choisissant  $\vec{V} = \vec{AM}$ , on trouve  $\vec{AM}_D = \vec{V}_D$  et  $\vec{AM}_P = \vec{V}_P$ , donc  $M_D = A + \vec{V}_D$  et  $M_P = A + \vec{V}_P$ .  
On peut ainsi obtenir les coordonnées de  $M_D$  et  $M_P$  à l'aide des composantes de  $\vec{V}_D$  et  $\vec{V}_P$  en changeant les composantes  $v_x, v_y, v_z$  en  $x - x_A, y - y_A, z - z_A$ .

### B. Applications du produit scalaire

#### Solution (Projection plane)

2 On a  $\vec{V}_D = \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{av_x + bv_y + cv_z}{a^2 + b^2 + c^2} \vec{n}$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 v_x + abv_y + acv_z \\ abv_x + b^2 v_y + bcv_z \\ acv_x + bcv_y + c^2 v_z \end{pmatrix}$$

1 L'autre projection s'obtient en remarquant que  $\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_D$  donc  $\vec{V}_P = \vec{V} - \vec{V}_D$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2)v_x - abv_y - acv_z \\ -abv_x + (a^2 + c^2)v_y - bcv_z \\ -acv_x - bcv_y + (a^2 + b^2)v_z \end{pmatrix}$$

3 En choisissant  $\vec{V} = \vec{AM}$ , on trouve  $\vec{AM}_D = \vec{V}_D$  et  $\vec{AM}_P = \vec{V}_P$ , donc  $M_D = A + \vec{V}_D$  et  $M_P = A + \vec{V}_P$ .  
On peut ainsi obtenir les coordonnées de  $M_D$  et  $M_P$  à l'aide des composantes de  $\vec{V}_D$  et  $\vec{V}_P$  en changeant les composantes  $v_x, v_y, v_z$  en  $x - x_A, y - y_A, z - z_A$ .

### B. Applications du produit scalaire

#### b) Projection plane

**Solution (Projection plane)**

2 On a  $\vec{V}_D = \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{av_x + bv_y + cv_z}{a^2 + b^2 + c^2} \vec{n}$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 v_x + abv_y + acv_z \\ abv_x + b^2 v_y + bcv_z \\ acv_x + bcv_y + c^2 v_z \end{pmatrix}$$

1 L'autre projection s'obtient en remarquant que  $\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_D$  donc  $\vec{V}_P = \vec{V} - \vec{V}_D$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2)v_x - abv_y - acv_z \\ -abv_x + (a^2 + c^2)v_y - bcv_z \\ -acv_x - bcv_y + (a^2 + b^2)v_z \end{pmatrix}$$

3 En choisissant  $\vec{V} = \vec{AM}$ , on trouve  $\vec{AM}_D = \vec{V}_D$  et  $\vec{AM}_P = \vec{V}_P$ , donc  $M_D = A + \vec{V}_D$  et  $M_P = A + \vec{V}_P$ .  
On peut ainsi obtenir les coordonnées de  $M_D$  et  $M_P$  à l'aide des composantes de  $\vec{V}_D$  et  $\vec{V}_P$  en changeant les composantes  $v_x, v_y, v_z$  en  $x - x_A, y - y_A, z - z_A$ .

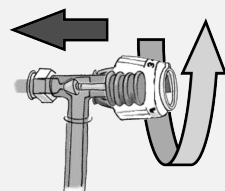
### A. Autres règles d'orientation

#### Orientation de l'espace

**En physique**, on retrouve naturellement la notion de **sens direct spatial** dans diverses situations de la vie courante.

- Règle du robinet**

Un bouton de robinet pris dans la **main droite** que l'on tourne dans le sens qui amène le **pouce** vers l'**index** **ferme** la canalisation.



En tournant le robinet dans le sens **DIRECT** on **FERME** la canalisation

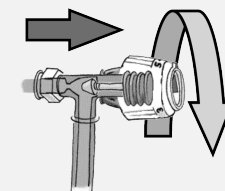
### A. Autres règles d'orientation

#### Orientation de l'espace

**En physique**, on retrouve naturellement la notion de **sens direct spatial** dans diverses situations de la vie courante.

- Règle du robinet**

Un bouton de robinet pris dans la **main droite** que l'on tourne dans le sens qui amène le **pouce** vers l'**index** **ferme** la canalisation.



En tournant le robinet dans le sens **INDIRECT** on **OUVRE** la canalisation

### B. Applications du produit scalaire

#### Solution (Projection plane)

1 Le plan  $(P)$  est caractérisé par les trois points  $A(\frac{d}{a}, 0, 0), B(0, \frac{d}{b}, 0), C(0, 0, \frac{d}{c})$ ,  
soit encore par le point  $A$  et les vecteurs  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ \frac{d}{b} \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC} \begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ \frac{d}{c} \end{pmatrix}$ .  
Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires aux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ .  
Un vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  est normal à  $(P)$  ssi il est orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , ce qui donne  
 $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .  
D'où les équations  $b\alpha - a\beta = 0$  et  $c\alpha - a\gamma = 0$ . On a  $\beta = \frac{b}{a}\alpha$  et  $\gamma = \frac{c}{a}\alpha$ .  
En choisissant par exemple  $\alpha = a$ , on obtient le vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .  
(Remarque : il suffit de supposer  $a, b, c$  non tous nuls.)

### B. Applications du produit scalaire

#### b) Projection plane

**Exercice B.1 (Projection plane)**

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On se donne :

- $(P)$  le plan d'équation  $ax + by + cz = d$  ( $a, b, c, d$  non nuls);
- $A(x_A, y_A, z_A)$  un point de  $(P)$ ;
- $M(x_M, y_M, z_M)$  un point quelconque de l'espace;
- $\vec{V} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  un vecteur quelconque de l'espace.

1 Donner un vecteur  $\vec{n}$  unitaire normal à  $(P)$ . On note  $(D)$  la droite passant  $A$  orthogonale à  $P$ . Elle est alors déterminée par  $A$  et  $\vec{n}$ .

2 **Aspect vectoriel**

- Déterminer le projeté de  $\vec{V}$  sur  $(D)$ . Donner son expression en fonction de  $\vec{n}$  puis donner ses composantes.
- En déduire le projeté de  $\vec{V}$  sur le plan  $(P)$  en fonction de vecteurs déjà déterminés. Puis donner ses composantes.

3 **Aspect ponctuel**  
Déterminer les projetés de  $M$  sur  $(D)$  et sur  $(P)$  en fonction de vecteurs déterminés précédemment. Expliquer comment obtenir leurs coordonnées.

### B. Applications du produit scalaire

#### Solution (Projection plane)

2 On a  $\vec{V}_D = \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{av_x + bv_y + cv_z}{a^2 + b^2 + c^2} \vec{n}$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 v_x + abv_y + acv_z \\ abv_x + b^2 v_y + bcv_z \\ acv_x + bcv_y + c^2 v_z \end{pmatrix}$$

1 L'autre projection s'obtient en remarquant que  $\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_D$  donc  $\vec{V}_P = \vec{V} - \vec{V}_D$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2)v_x - abv_y - acv_z \\ -abv_x + (a^2 + c^2)v_y - bcv_z \\ -acv_x - bcv_y + (a^2 + b^2)v_z \end{pmatrix}$$

3 En choisissant  $\vec{V} = \vec{AM}$ , on trouve  $\vec{AM}_D = \vec{V}_D$  et  $\vec{AM}_P = \vec{V}_P$ , donc  $M_D = A + \vec{V}_D$  et  $M_P = A + \vec{V}_P$ .  
On peut ainsi obtenir les coordonnées de  $M_D$  et  $M_P$  à l'aide des composantes de  $\vec{V}_D$  et  $\vec{V}_P$  en changeant les composantes  $v_x, v_y, v_z$  en  $x - x_A, y - y_A, z - z_A$ .

### B. Applications du produit scalaire

#### b) Projection plane

**Solution (Projection plane)**

2 On a  $\vec{V}_D = \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{av_x + bv_y + cv_z}{a^2 + b^2 + c^2} \vec{n}$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 v_x + abv_y + acv_z \\ abv_x + b^2 v_y + bcv_z \\ acv_x + bcv_y + c^2 v_z \end{pmatrix}$$

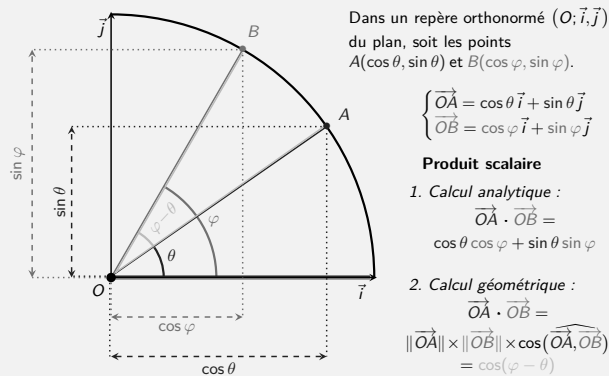
1 L'autre projection s'obtient en remarquant que  $\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_D$  donc  $\vec{V}_P = \vec{V} - \vec{V}_D$ .  
Composantes :  

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2)v_x - abv_y - acv_z \\ -abv_x + (a^2 + c^2)v_y - bcv_z \\ -acv_x - bcv_y + (a^2 + b^2)v_z \end{pmatrix}$$

3 En choisissant  $\vec{V} = \vec{AM}$ , on trouve  $\vec{AM}_D = \vec{V}_D$  et  $\vec{AM}_P = \vec{V}_P$ , donc  $M_D = A + \vec{V}_D$  et  $M_P = A + \vec{V}_P$ .  
On peut ainsi obtenir les coordonnées de  $M_D$  et  $M_P$  à l'aide des composantes de  $\vec{V}_D$  et  $\vec{V}_P$  en changeant les composantes  $v_x, v_y, v_z$  en  $x - x_A, y - y_A, z - z_A$ .

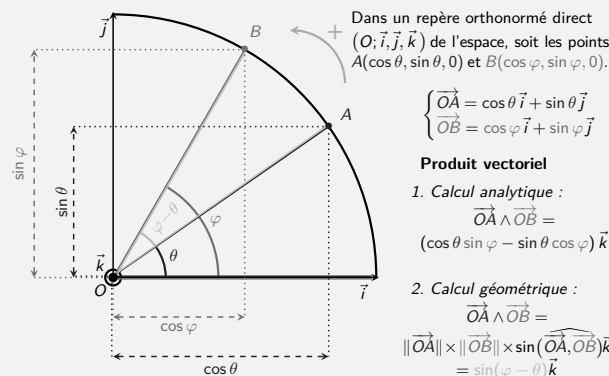
## Applications trigonometriques : formulaire

- Formule trigonometrique :**  $\cos(\varphi - \theta) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$



## Applications trigonometriques : formulaire

- Formule trigonometrique :**  $\sin(\varphi - \theta) = \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi$



## Applications géométriques : distance dans l'espace

- Distance d'un point à un plan :** soit  $(P)$  un plan et  $M$  un point de l'espace. On cherche à calculer la distance du point  $M$  au plan  $(P)$ .

## \* Approche géométrique

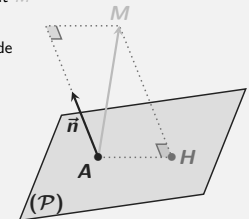
$(P)$  est défini par le point  $A$  et le vecteur  $\vec{n}$  normal à  $(P)$ .

Notons  $H$  la projection orthogonale du point  $M$  sur le plan  $(P)$ .

La distance du point  $M$  au plan  $(P)$  coïncide avec la distance entre les points  $M$  et  $H$  :  $d(M, P) = MH$ .

C'est aussi le projeté orthogonal du vecteur  $\vec{AM}$  sur le vecteur  $\vec{n}$  qui est donnée par la propriété 2.6. Ainsi :

$$d(M, P) = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$



## Applications géométriques : distance dans l'espace

- Distance d'un point à un plan :** soit  $(P)$  un plan et  $M$  un point de l'espace. On cherche à calculer la distance du point  $M$  au plan  $(P)$ .

## \* Approche analytique

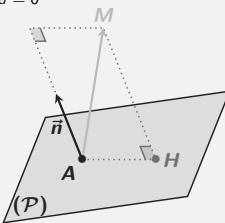
L'espace est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

$(P)$  est défini par l'équation  $ax + by + cz + d = 0$  ( $a, b, c$  non tous nuls) et  $M(x, y, z)$ .

Un vecteur normal à  $(P)$  est donné par  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  (cf. exercice B.1).

D'après l'approche précédente :

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



## Applications géométriques : distance dans l'espace

- Distance d'un point à un plan : exemple numérique**

Soit le point  $M(6, 3, 4)$  et  $(P)$  le plan défini par les points  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 0, 1)$  et  $C(0, 1, 1)$ . On cherche la distance de  $M$  à  $(P)$ .

C'est le plan passant par  $A$  de vecteur normal  $\vec{n} = \vec{BC} \wedge \vec{AC}$  avec les vecteurs  $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Un point  $P(x, y, z)$  quelconque de l'espace appartient à  $(P)$  ssi  $\vec{AP}$  est orthogonal à  $\vec{n}$ , i.e.  $\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$ , d'où l'équation  $x + z = 1$ .

**Autre méthode :** on recherche une équation de  $(P)$  de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ .

En traduisant  $A, B, C \in (P)$ , on trouve le système  $a + b + d = 0$ ,  $c + d = 0$ ,  $b + c + d = 0$ , d'où l'on tire  $a = c = -d$  et  $b = 0$ . Ainsi  $(P)$  est caractérisé par l'équation  $x + z - 1 = 0$ .

Enfin, la distance du point  $M$  au plan  $(P)$  est donnée par

$$d(M, P) = \frac{|1 \times 6 + 0 \times 3 + 1 \times 4 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

## Applications géométriques : rotation dans l'espace

- Rotation dans l'espace**

Soit  $(D)$  une droite orientée de vecteur unitaire  $\vec{n}$  dans l'espace orienté et  $A$  un point de  $(D)$ .

Introduisons  $(P)$  le plan orthogonal à  $(D)$  passant par  $A$ .

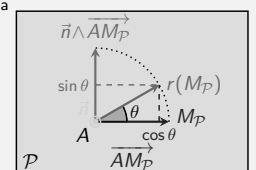
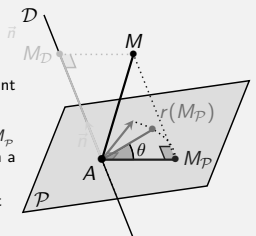
Pour tout point de l'espace  $M$ , notons  $M_P$  et  $M_D$  ses projections orthogonales sur  $(D)$  et  $(P)$ . On a  $\vec{AM} = \vec{AM}_P + \vec{AM}_D$ .

On dispose alors d'un repère orthogonal direct  $(A; \vec{AM}_P, \vec{n} \wedge \vec{AM}_P, \vec{n})$  de l'espace.

Soit  $\theta$  un angle. Considérons dans le plan  $(P)$  la rotation  $r$  de centre  $A$  et d'angle  $\theta$ .

En se plaçant dans le repère orthogonal direct  $(A; \vec{AM}_P, \vec{n} \wedge \vec{AM}_P)$  du plan  $(P)$ , on voit que l'image  $r(M)$  de  $M$  par  $r$  est caractérisée par

$$\vec{Ar}(M_P) = (\cos \theta) \vec{AM}_P + (\sin \theta) (\vec{n} \wedge \vec{AM}_P).$$



## Applications géométriques : rotation dans l'espace

- Rotation dans l'espace**

On définit ensuite dans l'espace  $R$  la rotation de centre  $A$ , d'axe  $(D)$  et d'angle  $\theta$  selon

$$\vec{AR}(M) = \vec{Ar}(M_P) + \vec{AM}_D$$

Or  $\vec{AM}_D = (\vec{AM} \cdot \vec{n}) \vec{n}$ , donc

$$\vec{AM}_P = \vec{AM} - \vec{AM}_D = \vec{AM} - (\vec{AM} \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Puis  $\vec{n} \wedge \vec{AM}_P = \vec{n} \wedge (\vec{AM} - (\vec{AM} \cdot \vec{n}) \vec{n}) = \vec{n} \wedge \vec{AM}$  puisque  $\vec{n}$  et  $\vec{AM}_D$  sont colinéaires.

En conséquence, on trouve

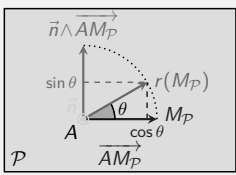
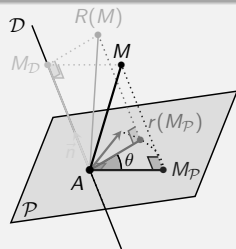
$$\vec{AR}(M) = (\cos \theta) \vec{AM} - (\vec{AM} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\sin \theta) (\vec{n} \wedge \vec{AM}) + (\vec{AM} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

c'est-à-dire :

$$\vec{AR}(M) = (\cos \theta) \vec{AM} + (\sin \theta) (\vec{n} \wedge \vec{AM}) + (1 - \cos \theta) (\vec{AM} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Cas particulier : rotation d'angle droit  $(\theta = \frac{\pi}{2})$

$$\vec{AR}(M) = \vec{n} \wedge \vec{AM} + (\vec{AM} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$



## Applications géométriques : équation d'un plan

**Cas général :** soit  $A(x_A, y_A, z_A)$  un point et  $u \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, v \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  deux vecteurs non colinéaires.

Déterminons l'équation du plan  $(P)$  défini par les points  $A$  et les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$ .

Soit  $M(x, y, z)$  un point générique de l'espace. On a :

$$M \in P \iff \text{les 3 vecteurs } \vec{AM}, \vec{u}, \vec{v} \text{ sont coplanaires}$$

$$\iff ((\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v})) = 0$$

Notons  $a, b, c$  les composantes du vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  :

$$a = \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} = u_y v_z - u_z v_y, \quad b = - \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} = u_z v_x - u_x v_z, \quad c = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

- Premier calcul :**

$$((\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v})) = \vec{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$$

- Deuxième calcul :**

$$((\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v})) = \begin{vmatrix} x - x_A & u_x & v_x \\ y - y_A & u_y & v_y \\ z - z_A & u_z & v_z \end{vmatrix} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$$

Notons enfin  $d = ax_A + by_A + cz_A$ .

En égalant alors  $((\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}))$  à 0, on tire l'équation  $ax + by + cz = d$ .

## Exercice D.1

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

On donne  $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} x \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- ① Déterminer  $y$  et  $z$  pour que  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  soient colinéaires.

$$\text{Réponse : on a } \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -5y \\ 30 - 3z \\ 3y \end{pmatrix}.$$

Donc :  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont colinéaires ssi  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{0}$  ssi  $y = 0$  et  $z = 10$ .

- ② Déterminer  $x$  pour que  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$  soient orthogonaux.

$$\text{Réponse : on a } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 2x + 6.$$

Donc :  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$  sont orthogonaux ssi  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$  ssi  $x = -3$ .

- ③ Avec la valeur de  $x$  obtenue en question 2, quelle condition doivent vérifier  $y$  et  $z$  pour que les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  soient coplanaires ? Qu'observe-t-on lorsque  $y$  et  $z$  prennent les valeurs obtenues en question 1 ?

$$\text{Réponse : } ((\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & y & 13 \\ 3 & z & 2 \end{vmatrix} = 13y - 26z + 156 = 13(y - 2z + 12).$$

Donc :  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  sont coplanaires ssi  $((\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)) = 0$  ssi  $y - 2z + 12 = 0$ .

On observe que cette condition est satisfaite en particulier pour  $y = 0$  et  $z = 6$ , ce qui était prévisible puisque dans ce cas, les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont colinéaires.



Applications géométriques : distance entre deux droites de l'espace

- Soit  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites de l'espace **non parallèles non sécantes**.

La droite  $(D_1)$  est définie par un point  $A_1$  et un vecteur  $\vec{u}_1$ , et la droite  $(D_2)$  est définie par un point  $A_2$  et un vecteur  $\vec{u}_2$ .

On cherche à calculer la distance entre  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .

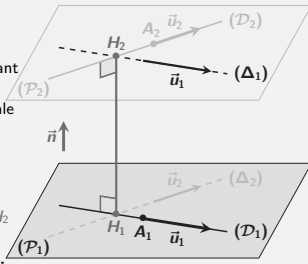
- \* Notons  $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ .  $\vec{n}$  est un vecteur normal aux droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .

Introduisons :

- \*  $(P_1)$  le plan orthogonal à  $\vec{n}$  contenant la droite  $(D_1)$ ;
- \*  $(\Delta_2)$  la droite projection orthogonale de  $(D_2)$  sur  $(P_1)$ ;
- \*  $H_1$  le point d'intersection de  $(D_1)$  et  $(\Delta_2)$ .

On introduit de même les objets géométriques similaires  $(P_2)$ ,  $(\Delta_1)$ ,  $H_2$  relatifs à la droite  $(D_2)$ .

La droite  $(H_1H_2)$  est la **perpendiculaire commune** à  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .



Applications géométriques : distance entre deux droites de l'espace

- Soit  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites de l'espace **non parallèles non sécantes**.

La droite  $(D_1)$  est définie par un point  $A_1$  et un vecteur  $\vec{u}_1$ , et la droite  $(D_2)$  est définie par un point  $A_2$  et un vecteur  $\vec{u}_2$ .

On cherche à calculer la distance entre  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .

- \* La distance entre  $(D_1)$  et  $(D_2)$  coïncide avec la distance entre  $H_1$  et  $H_2$  :

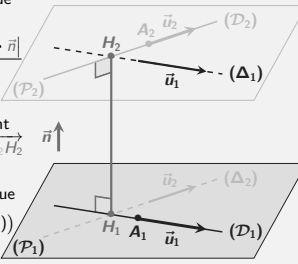
$$d(D_1, D_2) = H_1H_2 = \left\| \frac{(\vec{A}_1\vec{A}_2) \wedge \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\|$$

En décomposant ensuite  $\vec{H}_1\vec{H}_2$  selon  $\vec{H}_1\vec{A}_1 + \vec{A}_1\vec{A}_2 + \vec{A}_2\vec{H}_2$  et en remarquant que  $\vec{A}_1\vec{H}_1$  est colinéaire à  $\vec{u}_1$  et que  $\vec{A}_2\vec{H}_2$  est colinéaire à  $\vec{u}_2$ , donc que  $\vec{A}_1\vec{H}_1$  et  $\vec{A}_2\vec{H}_2$  sont orthogonaux à  $\vec{n}$ , on voit que

$$\vec{H}_1\vec{H}_2 \cdot \vec{n} = \vec{A}_1\vec{A}_2 \cdot \vec{n} = ((\vec{A}_1\vec{A}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2))$$

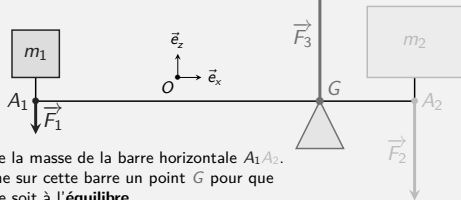
Ainsi :

$$d(D_1, D_2) = \frac{((\vec{A}_1\vec{A}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2))}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}$$



Barycentre et centre d'inertie (balance)

Considérons la balance ci-dessous permettant de comparer deux solides de masses  $m_1$  et  $m_2$  :



On néglige la masse de la barre horizontale  $A_1A_2$ . On cherche sur cette barre un point  $G$  pour que ce système soit à l'**équilibre**.

Bilan des forces :

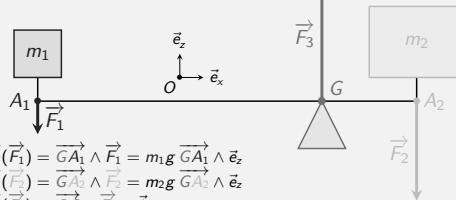
- poids du solide de masse  $m_1$  :  $\vec{F}_1 = -m_1g\vec{e}_z$ , appliqué en  $A_1$  ;
- poids du solide de masse  $m_2$  :  $\vec{F}_2 = -m_2g\vec{e}_z$ , appliqué en  $A_2$  ;
- réaction du support :  $\vec{F}_3 = F_3\vec{e}_z$ , appliquée en  $G$ .

Les objets étant immobiles, d'après la relation fondamentale de la statique, la somme des forces et la somme des moments (en n'importe quel point) sont nulles :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_G(\vec{F}_1) + \vec{M}_G(\vec{F}_2) + \vec{M}_G(\vec{F}_3) = \vec{0}$$

Barycentre et centre d'inertie (balance)

Considérons la balance ci-dessous permettant de comparer deux solides de masses  $m_1$  et  $m_2$  :



$$\begin{cases} \vec{M}_G(\vec{F}_1) = \vec{GA}_1 \wedge \vec{F}_1 = m_1g \vec{GA}_1 \wedge \vec{e}_z \\ \vec{M}_G(\vec{F}_2) = \vec{GA}_2 \wedge \vec{F}_2 = m_2g \vec{GA}_2 \wedge \vec{e}_z \\ \vec{M}_G(\vec{F}_3) = \vec{GG} \wedge \vec{F}_3 = \vec{0} \end{cases}$$

L'équation des moments donne  $g(m_1\vec{GA}_1 + m_2\vec{GA}_2) \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$ .

Comme  $g \neq 0$  et  $m_1\vec{GA}_1 + m_2\vec{GA}_2$  est colinéaire à  $\vec{e}_z$ , on en déduit l'équation :

$$m_1\vec{GA}_1 + m_2\vec{GA}_2 = \vec{0}$$

Ainsi, le **point d'équilibre**  $G$  n'est autre que le **barycentre** de  $A_1(m_1)$  et  $A_2(m_2)$  :

$$\vec{OG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{OA}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{OA}_2$$

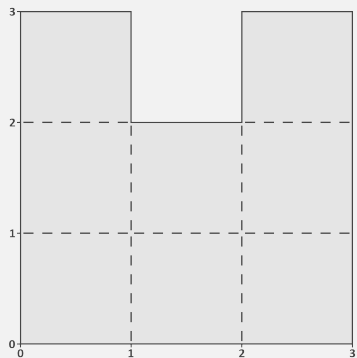
Par exemple, en choisissant  $O = A_1$  :  $\vec{A}_1G = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{A}_1A_2$ .

Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Première méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.



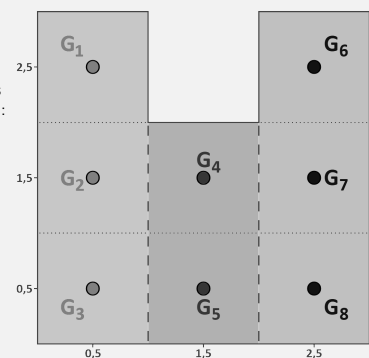
Barycentre et centre d'inertie (plaque)

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

Première méthode

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \vec{OG}_k$$



Application physique : force de Laplace

- Le dispositif des **rails de Laplace** consiste en deux rails métalliques parallèles situés dans l'entrefer d'un aimant en U engendrant un champ magnétique  $\vec{B}$ .

On y dépose une tige de longueur  $\ell$  susceptible de se déplacer sans frottement.

Si on relie les deux rails à un générateur, un courant continu d'intensité  $I$  circule dans le circuit, et provoque une force  $\vec{F}$  dite **force de Laplace** sur la tige la mettant en mouvement.

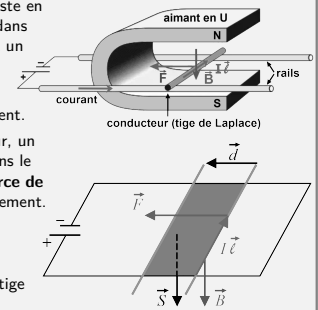
La force  $\vec{F}$  s'exprime selon la relation

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

le vecteur  $\vec{\ell}$  étant dirigé le long de la tige dans le sens du courant.

Le travail de  $\vec{F}$  pendant un déplacement  $\vec{d}$  de la tige le long des rails se calcule, en notant  $\vec{S} = \vec{d} \wedge \vec{\ell}$  et  $\Phi$  le flux coupé à travers la surface balayée par la tige, selon

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{d} = I (\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{d} = I ((\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{d})) \\ &= I ((\vec{d}, \vec{\ell}, \vec{B})) = I (\vec{d} \wedge \vec{\ell}) \cdot \vec{B} = I \vec{B} \cdot \vec{S} = I \Phi \end{aligned}$$



**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Première méthode**

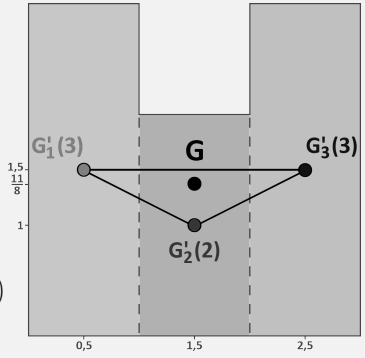
- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \vec{OG}_k$$

- Il coïncide avec le **centre d'inertie** des **barycentres** de 3 bandes de base 1u et de hauteurs 2u et 3u pondérés par les aires relatives :

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} (3\vec{OG}_1 + 2\vec{OG}_2 + 3\vec{OG}_3)$$

- En choisissant  $O = G'_2$  :

$$\vec{G'_2G} = \frac{3}{8} (\vec{G'_2G}_1 + \vec{G'_2G}_3)$$


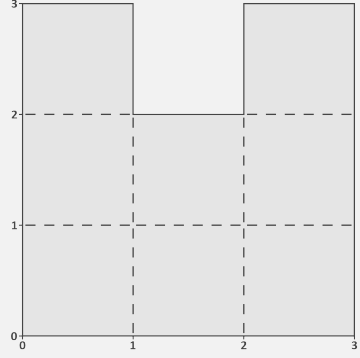
**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Deuxième méthode**

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.



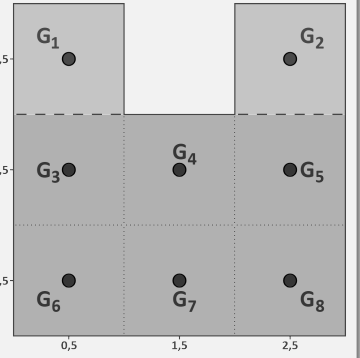
**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Deuxième méthode**

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \vec{OG}_k$$


**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

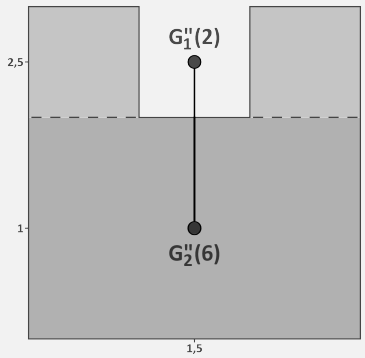
On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Deuxième méthode**

- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \vec{OG}_k$$

- Il coïncide aussi avec le **centre d'inertie** des **barycentres** de deux carrés de côté 1u et d'un rectangle de côtés 2u et 3u, pondérés par les aires relatives :

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} (2\vec{OG}_1 + 6\vec{OG}_2)$$


**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Deuxième méthode**

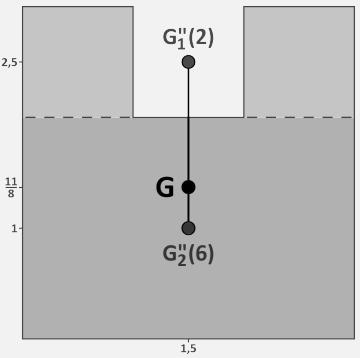
- On subdivise la plaque en 8 carrés de côté 1u.
- Le **centre d'inertie** de la plaque est l'**isobarycentre** des **centres d'inertie** des 8 carrés :

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \vec{OG}_k$$

- Il coïncide aussi avec le **centre d'inertie** des **barycentres** de deux carrés de côté 1u et d'un rectangle de côtés 2u et 3u, pondérés par les aires relatives :

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} (2\vec{OG}_1 + 6\vec{OG}_2)$$

- En choisissant  $O = G'_2$  :

$$\vec{G'_2G} = \frac{1}{4} \vec{G'_2G}_1$$


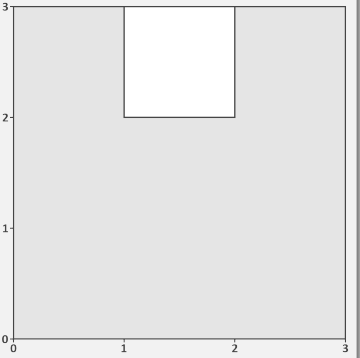
**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Troisième méthode**

- Le **centre d'inertie** de la plaque peut aussi s'obtenir à l'aide des **centres d'inertie** de la plaque carrée complète de côté 3u et du carré retiré de côté 1u au milieu d'un bord.



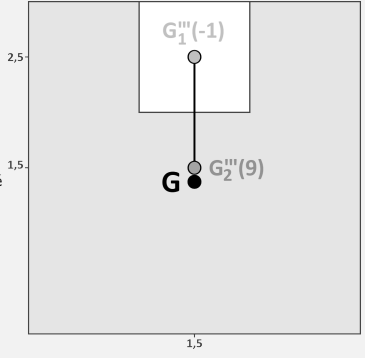
**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Troisième méthode**

- Le **centre d'inertie** de la plaque peut aussi s'obtenir à l'aide des **centres d'inertie** de la plaque carrée complète de côté 3u et du carré retiré de côté 1u au milieu d'un bord.
- Partant de la plaque complète de **centre d'inertie**  $G'''_2$  (de masse 9 fois celle d'un carré de côté 1u) :

$$\vec{OG'''_2} = \frac{1}{9} (\vec{OG'''_1} + 8\vec{OG})$$


**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

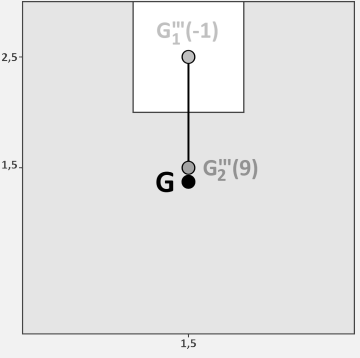
On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Troisième méthode**

- Le **centre d'inertie** de la plaque peut aussi s'obtenir à l'aide des **centres d'inertie** de la plaque carrée complète de côté 3u et du carré retiré de côté 1u au milieu d'un bord.
- Partant de la plaque complète de **centre d'inertie**  $G'''_2$  (de masse 9 fois celle d'un carré de côté 1u) :

$$\vec{OG'''_2} = \frac{1}{9} (\vec{OG'''_1} + 8\vec{OG})$$

d'où l'on tire

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} (9\vec{OG'''_2} - \vec{OG'''_1})$$


**E. Applications des barycentres** | **a) Centre d'inertie**

**Barycentre et centre d'inertie (plaque)**

On examine une plaque carrée homogène de côté 3 unités amputée d'un carré de côté 1 unité situé au milieu d'un bord de la plaque. Déterminons son **centre d'inertie**.

**Troisième méthode**

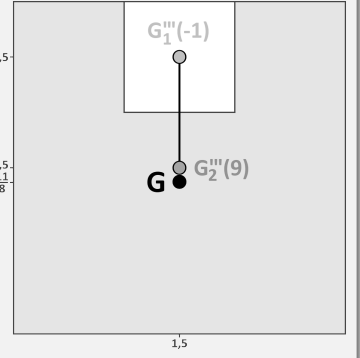
- Le **centre d'inertie** de la plaque peut aussi s'obtenir à l'aide des **centres d'inertie** de la plaque carrée complète de côté 3u et du carré retiré de côté 1u au milieu d'un bord.
- Partant de la plaque complète de **centre d'inertie**  $G'''_2$  (de masse 9 fois celle d'un carré de côté 1u) :

$$\vec{OG'''_2} = \frac{1}{9} (\vec{OG'''_1} + 8\vec{OG})$$

d'où l'on tire

$$\vec{OG} = \frac{1}{8} (9\vec{OG'''_2} - \vec{OG'''_1})$$

- En choisissant  $O = G'''_2$  :

$$\vec{G'''_2G} = \frac{1}{8} \vec{G'''_1G'''_2}$$


Barycentre et moyennes multiples

On considère un groupe de  $n$  élèves passant  $m$  épreuves.

Pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ , notons  $N_{ij}$  la note obtenue à la  $j^{\text{e}}$  épreuve par l'élève n°  $i$ .

épreuve \ élève	n° 1 coef. $\alpha_1$	n° 2 coef. $\alpha_2$	...	n° m coef. $\alpha_m$	moyenne élève
n° 1	$N_{11}$	$N_{12}$	...	$N_{1m}$	$M_1''$
n° 2	$N_{21}$	$N_{22}$	...	$N_{2m}$	$M_2''$
...	...	...		...	...
n° n	$N_{n1}$	$N_{n2}$	...	$N_{nm}$	$M_n''$
moyenne épreuve	$M_1'$	$M_2'$	...	$M_m'$	$M$

•  $M_j' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{ij}$  est la moyenne (arithmétique) du groupe à la  $j^{\text{e}}$  épreuve

•  $M_i'' = \sum_{j=1}^m \alpha_j N_{ij} / \sum_{j=1}^m \alpha_j$  est la moyenne (pondérée) de toutes les épreuves de l'élève n°  $i$

Le théorème de composition des barycentres permet de calculer la moyenne générale de toutes les épreuves du groupe et se traduit par l'identité entre les « moyennes des moyennes » :

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{n} N_{ij} / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{n} = \sum_{j=1}^m \alpha_j M_j' / \sum_{j=1}^m \alpha_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i''$$

69
