INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Logique/Raisonnement

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

La **logique mathématique** est la science du **raisonnement**. Elle permet d'élaborer des raisonnements par enchaînements d'affirmations selon un langage et des règles précises.

Une **affirmation mathématique** peut être appelée **proposition**, **assertion**, **énoncé**...

Une affirmation mathématique dépendant d'une ou plusieurs **variables** est appelée **formule mathématique** ou **prédicat**.

Principes de la logique binaire

- Une proposition mathématique doit prendre une valeur de **vérité**.
- Une proposition mathématique ne peut prendre que **deux** valeurs de vérité : la valeur **vraie** ou la valeur **fausse** (principe du **tiers exclu**). Il n'y a donc pas de **tierce** possibilité.
- Une proposition mathématique ne peut **simultanément** être vraie et fausse (principe de **non-contradiction**).

Exemple 1.1

- « $5 < 3$ » est une **assertion fausse** ;
- « $3 < 5$ » est une **assertion vraie** ;
- « $x > 3$ » est un **prédicat** dépendant de la variable x.

Définition 1.2 (Négation)

Soit P une proposition.

*La **négation** de P est la proposition dont les valeurs de vérité sont les **contraires** de celles de P.*

*Elle est notée $\neg P$ (qui se lit « **non** P »).*

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemple 1.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P l'assertion « n est un nombre pair ». Alors $\neg P$ est l'assertion « n est un nombre impair ».

Remarque 1.4 (Lien avec les ensembles)

Soit E un ensemble, x un élément de E et A une partie de E.
Considérons P la propriété « $x \in A$ ». Alors :
$\neg P$ est la propriété « $x \notin A$ », c'est-à-dire « $x \in \complement_E A$ ».
On dit usuellement que la **négation** $\neg$ correspond au **complémentaire** $\complement$.

Remarque 1.5

La **négation logique** ne correspond pas nécessairement à la notion de **contraire** ou d'**antonyme** en sémantique. Par exemple, le contraire de « jeune » est « vieux » (et inversement), mais dire que quelqu'un n'est pas jeune ne signifie pas nécessairement qu'il est vieux...

Paradoxe du tiers exclu

- Considérons l'assertion P : *« Cette phrase contient sept mots. »*
  C'est **faux**, elle contient cinq mots.
  Sa négation $\neg P$: *« Cette phrase ne contient pas sept mots. »*
  C'est **faux**, elle contient effectivement sept mots.
  On est en présence d'une phrase et de sa négation, toutes les deux **fausses** à la fois !
- Considérons l'assertion Q : *« Cette phrase contient cinq mots. »*
  C'est **vrai**.
  Sa négation $\neg Q$: *« Cette phrase ne contient pas cinq mots. »*
  C'est **vrai** aussi.
  On est en présence d'une phrase et de sa négation, toutes les deux **vraies** à la fois !

En fait, dans les deux négations, « Cette phrase » fait référence aux assertions initiales...

Définition 1.6 (Conjonction)

Soit P et Q deux propositions.

*La **conjonction** de P et Q est la proposition qui **n'est vraie que** lorsque P et Q sont **simultanément** vraies.*

*Elle est notée $P \wedge Q$ (qui se lit « P **et** Q »).*

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.7

Soit $n \in \mathbb{N}$, P l'assertion « n est un multiple de 2 » et Q l'assertion « n est un multiple de 3 ». Alors $P \wedge Q$ est l'assertion « n est un multiple de 6 ».

Remarque 1.8 (Lien avec les ensembles)

Soit E un ensemble, x un élément de E, A et B deux parties de E.
Considérons P la propriété « $x \in A$ » et Q la propriété « $x \in B$ ». Alors :
$P \wedge Q$ est la propriété « $x \in A \cap B$ ».
On dit usuellement que la **conjonction** $\wedge$ correspond à l'**intersection** $\cap$.

Définition 1.9 (Disjonction)

Soit P et Q deux propositions.

*La **disjonction** de P et Q est la proposition qui est **vraie** lorsqu'**au moins** l'une des deux propositions est vraie.*

*Elle est notée $P \vee Q$ (qui se lit « P **ou** Q »).*

*On parle ici plus précisément de **ou inclusif** (par opposition au **ou exclusif**).*

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.10

Soit $x \in \mathbb{R}$, P l'assertion « $x \geqslant 1$ » et Q l'assertion « $x \leqslant -1$ ». Alors $P \vee Q$ est l'assertion « $|x| \geqslant 1$ ».

Remarque 1.11 (Lien avec les ensembles)

Soit E un ensemble, x un élément de E, A et B deux parties de E.
Considérons P la propriété « $x \in A$ » et Q la propriété « $x \in B$ ». Alors :
$P \vee Q$ est la propriété « $x \in A \cup B$ ».
On dit usuellement que la **disjonction** $\vee$ correspond à la **réunion** $\cup$.

Définition 1.12 (Disjonction exclusive (facultatif))

Soit P et Q deux propositions.

*La **disjonction exclusive** de P et Q est la proposition qui est **vraie** lorsqu'**une seule** des deux propositions est vraie.*

*Elle est notée $P \oplus Q$ ou $P \veebar Q$ (qui se lit « P **xor** Q »).*

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.13

Soit $x \in \mathbb{R}$, P l'assertion « $x \geqslant -1$ » et Q l'assertion « $x \leqslant 1$ ». Alors $P \oplus Q$ est l'assertion « $|x| > 1$ ».

Remarque 1.14 (Lien avec les ensembles)

Soit E un ensemble, x un élément de E, A et B deux parties de E.
Considérons P la propriété « $x \in A$ » et Q la propriété « $x \in B$ ». Alors :
$P \oplus Q$ est la propriété « $x \in A \,\Delta\, B$ ».
On dit usuellement que la **disjonction exclusive** $\oplus$ correspond à la **différence symétrique** Δ.

Propriétés 1.15 (Tautologie, contradiction)

Soit P une proposition.

- *La **disjonction** $P \vee (\neg P)$ est toujours **vraie**, elle est le simple reflet du **tiers exclu**. On dit que c'est une **tautologie** ;*
- *La **conjonction** $P \wedge (\neg P)$ est toujours **fausse**. C'est une **contradiction**.*

Propriétés 1.16 (Règles de De Morgan)

Soit P et Q deux propositions.

- *$\neg(P \vee Q)$ et $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ ont les **mêmes** valeurs de vérité ;*
- *$\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ ont les **mêmes** valeurs de vérité ;*

Propriétés 1.17 (Distributivité)

Soit P, Q et R trois propositions.

- *$(P \vee Q) \wedge R$ et $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ ont les **mêmes** valeurs de vérité ;*
- *$(P \wedge Q) \vee R$ et $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ ont les **mêmes** valeurs de vérité.*

Définition 1.18 (Égalité dans un produit cartésien)

Soit A et B deux ensembles. On considère le produit cartésien :

$$A \times B = \{(a,b),\ a \in A \text{ et } b \in B\}$$

*On définit l'**égalité de deux couples** (a,b) et (a',b') dans $A \times B$ selon*

$$(a,b) = (a',b') \quad \text{ssi} \quad [(a = a') \wedge (b = b')].$$

*Le **contraire** de l'égalité s'énonce selon*

$$(a,b) \neq (a',b') \quad \text{ssi} \quad [(a \neq a') \vee (b \neq b')].$$

Exemple 1.19 (Égalité dans $\mathbb{R}^2$)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ interprété comme un plan.

1. - $x^2 + y^2 = 0$ ssi $[x = 0 \wedge y = 0]$ ssi $(x,y) = (0,0)$
   - **Négation :** $x^2 + y^2 > 0$ ssi $[x \neq 0 \vee y \neq 0]$ ssi $(x,y) \neq (0,0)$

   On a ainsi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Interprétation géométrique : l'ensemble des points du plan à une distance strictement positive de l'origine O est le plan privé de O.

Exemple 1.19 (Égalité dans $\mathbb{R}^2$ (suite))

On se place dans $\mathbb{R}^2$ interprété comme un plan.

2. - $xy = 0$ ssi $[x = 0 \vee y = 0]$

   On a ainsi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} = D_1 \cup D_2$ où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

   Interprétation géométrique : D_1 est l'axe Ox, D_2 l'axe Oy, et l'ensemble des points du plan dont le produit des coordonnées est nul est la réunion de ces deux droites : $D_1 \cup D_2$.

   - **Négation :** $xy \neq 0$ ssi $[x \neq 0 \wedge y \neq 0]$
     ssi $[(x > 0 \vee x < 0) \wedge (y > 0 \vee y < 0)]$
     ssi $[(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$

   On a ainsi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup D_2) = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$ où $Q_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$, $Q_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y < 0\}$, $Q_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \wedge y > 0\}$, $Q_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \wedge y < 0\}$.

   Interprétation géométrique : Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont les quatres quadrants du plan strictement délimités par les deux axes de coordonnées D_1 et D_2. L'ensemble des points du plan dont le produit des coordonnées est non nul est le plan privé des deux axes, ou encore la réunion des quatre quadrants.

Définition 1.20 (Implication)

Soit P et Q deux propositions.

*L'**implication** de P à Q est la proposition qui **n'est fausse que** lorsque P est vraie et Q fausse.*

*Elle est notée $P \Longrightarrow Q$ (qui se lit « P **implique** Q »).*

*La **réciproque** de l'implication $P \Longrightarrow Q$ est l'implication $Q \Longrightarrow P$.*

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 1.21 (Relation de cause à effet)

- L'implication **ne préjuge pas** de la **véracité** de l'hypothèse.
  On peut comprendre l'implication $P \Longrightarrow Q$ selon
  « si P est vraie, alors Q est vraie ».
- L'implication exprime une relation de **cause** à **effet** :
  « une cause implique un effet ».
- La **négation** de l'implication se comprend alors selon
  « on a une cause sans en avoir l'effet correspondant ».

Propriétés 1.22 (Implication et négation)

1. *Les propositions $P \Longrightarrow Q$ et $(\neg P) \vee Q$ ont les **mêmes** valeurs de vérité.*
2. *La **négation** d'une implication $(P \Longrightarrow Q)$ **n'est pas** une implication, mais une **conjonction** : $P \wedge (\neg Q)$.*

Exemple 1.23

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'implication $(x = 2) \Longrightarrow (x^2 = 4)$ est **vraie**.
Sa **négation** s'énonce selon $(x = 2) \wedge (x^2 \neq 4)$, elle est **fausse**.

Propriété 1.24 (Contraposition)

- *Les implications $P \Longrightarrow Q$ et $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ ont les **mêmes** valeurs de vérité.*

*L'implication $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ est appelée **contraposée** de l'implication $P \Longrightarrow Q$.*

Exemple 1.25

La **contraposée** de l'implication de l'exemple 1.23 s'énonce selon $(x^2 \neq 4) \Longrightarrow (x \neq 2)$, elle est aussi **vraie**.

Propriété 1.26 (Implications en chaîne)

- *Si les implications $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow R$ sont vérifiées, alors $P \Longrightarrow R$ l'est aussi.*

Remarque 1.27 (Implication mathématique et langage courant)

La logique mathématique peut différer de celle du langage courant. Par exemple :

- ***« S'il pleut, alors mon jardin sera arrosé. »***

  Effet : arrosage du jardin
  Cause : la pluie

  $\rightarrow$ en **accord** avec l'implication mathématique.

  Négation : *« Il pleut et mon jardin n'est pas arrosé. »*

- ***« S'il pleut, alors il y a des nuages. »***

  Effet : la pluie
  Cause : les nuages

  $\rightarrow$ en **désaccord** avec l'implication mathématique...

  Dans cette implication, la pluie est la **cause** observée entraînant l'existence de nuages comme **effet** de conclusion.

  Négation : *« Il pleut et il n'y a pas de nuages. »*

Condition nécessaire, condition suffisante

Soit P et Q deux propositions telles que l'implication $P \Longrightarrow Q$ soit vraie. Alors :

- P est une condition **suffisante** pour avoir Q :
  il **suffit** que P soit vraie pour que Q soit vraie ;
- Q est une condition **nécessaire** pour avoir P :
  il **faut** que Q soit vraie pour que P soit vraie.

Exemple 1.28

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a clairement $x \geqslant 1 \Longrightarrow x \geqslant 0$. Autres formulations :

- Pour que $x \geqslant 1$, il **faut** que $x \geqslant 0$.
- Pour que $x \geqslant 0$, il **suffit** que $x \geqslant 1$.

Définition 1.29 (Équivalence)

Soit P et Q deux propositions.

*L'**équivalence** de P et Q est la proposition qui **n'est vraie que** lorsque P et Q ont **même** valeur de vérité (soit **simultanément** vraies, soit **simultanément** fausses).*

*Elle est notée $P \Longleftrightarrow Q$ (qui se lit «P **équivalent** à Q»).*

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propriété 1.30 (Équivalence et implication)

*L'**équivalence** $P \Longleftrightarrow Q$ a **même** valeur de vérité que la **double implication** $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$.*

Condition nécessaire et suffisante

Soit P et Q deux propositions telles que l'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$ soit vraie.
Alors P est une condition **nécessaire et suffisante** de Q :

il **faut** et il **suffit** que P soit vraie pour que Q soit vraie

ou encore

P est vraie **si et seulement si** Q est vraie.

Définition 1.31 (Quantificateurs universel/existentiel)

1. *L'expression « $\forall x \in A$ » se lit « **quel que soit** x élément de A » ou « **pour tout** x appartenant à A ».*

   La notation $\forall$ est un A à l'envers ; A est l'initiale de l'allemand Alle.
2. *L'expression « $\exists x \in A$ » se lit « **il existe** un élément x de A ».*
   *Dans cette expression, il est sous-entendu « **il existe au moins** ».*

   La notation $\exists$ est un E retourné. E est l'initiale de l'allemand Existieren.

Remarque 1.32 (Unicité)

On dit qu'un élément vérifiant une propriété P dans un ensemble E est **unique** si deux éléments vérifiant la propriété P sont nécessairement égaux, autrement dit :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (P(x_1) \wedge P(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

- L'unicité n'implique pas l'existence : quand il y a unicité, soit il y a un unique élément ayant la propriété P, soit il n'y en a pas.
- Le fait qu'il y ait conjointement existence et unicité de l'élément x vérifiant la propriété P se symbolise par : $\exists ! x \in E,\ P(x)$.

Propriétés 1.33 (Quantificateurs et négation)

- *La **négation** de $(\forall x \in A,\ P(x))$ est $(\exists x \in A,\ \neg P(x))$.*
- *La **négation** de $(\exists x \in A,\ P(x))$ est $(\forall x \in A,\ \neg P(x))$.*

Exemple 1.34 (Fonction nulle)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que *« f est la **fonction nulle** »* lorsque $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$.
Par **négation**, *« f **n'est pas** la **fonction nulle** »* lorsque $(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0)$.
Cette dernière proposition **ne** signifie **pas** que *« f **ne s'annule pas** »* : $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0)$.

Remarque 1.35 (Lien avec les ensembles)

Considérons un ensemble E.

- Soit A et B deux parties de E. Alors :
  La propriété « $\forall x \in E,\ x \in A \Longrightarrow x \in B$ » est équivalente à « $A \subset B$ ».
  La propriété « $\forall x \in E,\ x \in A \Longleftrightarrow x \in B$ » est équivalente à « $A = B$ ».
- Soit P et Q des prédicats définis sur E et $A = \{x \in E : P(x)\}$, $B = \{x \in E : Q(x)\}$.
  Alors :
  La propriété « $\forall x \in E,\ P(x) \Longrightarrow Q(x)$ » est équivalente à « $A \subset B$ ».
  La propriété « $\forall x \in E,\ P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$ » est équivalente à « $A = B$ ».

Remarque 1.36 (Quantificateurs et ordre)

1. On **peut permuter** deux quantificateurs de **même** nature :
   - $$\big(\forall x \in A, \forall y \in B,\ P(x,y)\big) \iff \big(\forall y \in B, \forall x \in A,\ P(x,y)\big)$$
     On peut écrire plus concisément
     $$\forall (x,y) \in A \times B,\ P(x,y)$$
   - $$\big(\exists x \in A, \exists y \in B,\ P(x,y)\big) \iff \big(\exists y \in B, \exists x \in A,\ P(x,y)\big)$$
     On peut écrire plus concisément
     $$\exists (x,y) \in A \times B,\ P(x,y)$$

   Par exemple :
   $$\big(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx\big) \iff \big(\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx\big)$$

Remarque 1.36 (Quantificateurs et ordre)

2. - On **ne peut pas permuter** deux quantificateurs de natures **différentes** :
     $$\exists x \in A, \forall y \in B,\ P(x,y)$$
     n'est **pas** équivalente en général à
     $$\forall y \in B, \exists x \in A,\ P(x,y)$$
     Dans la première assertion, x est un élément de A **indépendant** de tout $y \in B$ alors que dans la deuxième, x est un élément de A a priori **dépendant** de $y \in B$.
     Parfois on signale de manière plus explicite cette dépendance :
     $$\forall y \in B, \exists x(y) \in A,\ P(x(y),y)$$

   Par exemple :
   - la propriété $\big(\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant x\big)$ signifie que tout réel admet un majorant entier. Cette propriété est **vraie** (choisir e.g. $n = E(x)+1$, n dépend de x).
   - la propriété $\big(\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ n \geqslant x\big)$ signifie que tous les réels sont majorés par un certain entier. Cette propriété est **fausse** puisque $\mathbb{R}$ est non majoré.

Élaboration d'un raisonnement

À partir de **postulats** et d'**axiomes** (propriétés supposées intrinsèquement vraies), on enrichit par une démarche **hypothético-déductive** la théorie de nouveaux résultats hiérarchisés selon
- des **théorèmes** (résultats importants),
- des **propositions** (résultats de moindre importance),
- des **corollaires** (conséquences d'une proposition, d'un théorème),
- des **lemmes** (résultats préliminaires à un théorème)...

On dresse ci-après toute une liste de méthodes de raisonnement fondées sur la logique mathématique.

Exemple 2.1 (Axiomes de Peano)

La construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels de Peano peut être décrite par les **cinq axiomes** suivants :
1. L'ensemble $\mathbb{N}$ contient un élément particulier appelé « zéro ».
2. Tout entier naturel a un unique successeur qui est un entier naturel.
3. Zéro n'est le successeur d'aucun entier naturel.
4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
5. Si un sous-ensemble d'entiers naturels contient zéro et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est $\mathbb{N}$.

Raisonnement direct

Le raisonnement **direct** (ou par **hypothèse auxiliaire**, ou par **déduction**) utilise la règle du **modus-ponens** (du Latin : « mode qui, en posant, pose »), ou **syllogisme** :

Si H est vrai et l'implication $(H \Longrightarrow C)$ est vraie, alors C est vrai.

H est l'**hypothèse** et C la **conclusion**.

Exemple 2.2

« *Tous les humains sont mortels* » (**tautologie**).
Or Socrate est un humain (**hypothèse auxiliaire**) ;
donc Socrate est mortel (**conclusion**).

Exemple 2.3 (Diagonale d'un carré)

Soit $ABCD$ un carré de côté a.

D'après le théorème de Pythagore (**tautologie**), « *dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés* » :
$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$
Or $ABCD$ est un carré (**hypothèse auxiliaire**), donc, en particulier, le triangle ABC est rectangle en B et $AB = BC = a$.

On en déduit alors (**conclusion**) que la diagonale AC du carré vaut $a\sqrt{2}$.

Raisonnement par disjonction des cas

Le raisonnement par **disjonction des cas** est un raisonnement direct dans lequel l'hypothèse peut se décomposer en plusieurs autres hypothèses $H \iff H_1 \vee H_2$:

Si les implications $(H_1 \Longrightarrow C)$ et $(H_2 \Longrightarrow C)$ sont vraies,
alors l'implication $(H \Longrightarrow C)$ est vraie.

Exemple 2.4 (Produit de deux entiers consécutifs)

« Pour tout entier n, $n(n+1)/2$ est un entier. »

Soit n un entier.

Un entier est soit pair soit impair.
- Si n est pair, alors n peut s'écrire sous la forme $n = 2p$ avec p entier.
  On a $n(n+1)/2 = p(2p+1)$ qui est entier.
- Si n est impair, alors n peut s'écrire sous la forme $n = 2p+1$ avec p entier.
  On a $n(n+1)/2 = (p+1)(2p+1)$ qui est entier.

Exemple 2.5 (Valeur absolue et inégalités)

Fixons un réel positif a.

« $\forall x \in \mathbb{R}$, $(|x| \leqslant a) \iff (-a \leqslant x \leqslant a)$. »

Soit x un réel.

Un réel est positif ou négatif (0 est considéré comme étant positif et négatif).
1. Supposons $|x| \leqslant a$.
   - Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$ donc $0 \leqslant x \leqslant a$. Or $-a \leqslant 0$, donc $-a \leqslant x \leqslant a$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$ donc $-a \leqslant x \leqslant 0$. Or $a \geqslant 0$, donc $-a \leqslant x \leqslant a$.
2. Supposons réciproquement $-a \leqslant x \leqslant a$.
   - Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$ donc $|x| \leqslant a$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$ donc $-|x| \geqslant -a$, soit encore $|x| \leqslant a$.

Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par **contraposition** utilise la règle du **modus-tollens** (du Latin : « mode qui, en niant, nie ») :
$$(H \Longrightarrow C) \iff (\neg C \Longrightarrow \neg H).$$

Exemple 2.6 (Carré et parité)

1. ***« Pour tout entier n, si n^2 est impair, alors n est impair. »***
   La **contraposée** de cette assertion s'énonce selon :
   « si n est pair, alors n^2 est pair. »
   Cette dernière est vraie. En effet : si n est pair, alors n peut s'écrire sous la forme $n = 2p$ avec p entier. Le carré $n^2 = 4p^2$ est effectivement pair. D'où la véracité de l'assertion initiale.
2. ***« Pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair. »***
   La **contraposée** de cette assertion s'énonce selon :
   « si n est impair, alors n^2 est impair. »
   Cette dernière est vraie. En effet : si n est impair, alors n peut s'écrire sous la forme $n = 2p+1$ avec p entier. Le carré $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ est effectivement impair. D'où la véracité de l'assertion initiale.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on suppose son contraire, et l'on montre que cela vient contredire une proposition vraie.

Exemple 2.7 (Irrationnalité de 2, nombres premiers)

1. ***« Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel. »*** Supposons le contraire, i.e. $\sqrt{2}$ est rationnel.
   - Le nombre $\sqrt{2}$ s'écrirait sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec p, q deux entiers premiers entre eux.
   - Par définition de $\sqrt{2}$, on aurait $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$, soit encore $p^2 = 2q^2$.
   - Donc p^2 serait pair, et d'après l'exemple 2.6, p serait pair.
   - On pourrait donc écrire $p = 2p'$ pour un entier p' et l'on aurait ensuite $q^2 = 2p'^2$.
   - Ainsi, q^2 serait pair, et d'après l'exemple 2.6, q serait pair.
   - Finalement, p et q seraient simultanément pairs alors qu'ils étaient premiers entre eux.

   D'où une **contradiction**. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est rationnel » était donc **fausse**.
2. ***« Il y a une infinité de nombres premiers. »*** Supposons le contraire, i.e. qu'il n'y aurait qu'un nombre fini n de nombres premiers. Notons-les $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.
   - Considèrons alors le nombre $P = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$.
   - Par construction, P serait strictement supérieur à 1 et ne serait divisible par aucun nombre premier. P serait ainsi un nombre premier différent de $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.
   - Il y aurait alors au moins $n+1$ nombres premiers.

   D'où une **contradiction**. L'hypothèse « il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers » était donc **fausse**.

Raisonnement par contre-exemple

Pour montrer que la propriété $\forall x \in A, P(x)$ est fausse, il suffit de trouver un $x_0 \in A$ pour lequel $P(x_0)$ est fausse. On dit que ce x_0 est un **contre-exemple**.

Exemple 2.8 (Parité, imparité d'une fonction)

Rappelons la définition de fonctions **paires**, **impaires**.
- Une fonction f est **paire** lorsque
  1. D_f est **symétrique** par rapport à 0 ;
  2. $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est **impaire** lorsque
  1. D_f est **symétrique** par rapport à 0 ;
  2. $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$.

Considérons la fonction réelle f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 - x$.

Montrons que f n'est ni paire ni impaire.
On a $f(1) = 2$ et $f(-1) = 4$.
1. On a $\exists x \in D_f,\ f(-x) \neq f(x)$ (on a trouvé le **contre-exemple** $x = 1$), donc f n'est pas paire.
2. On a $\exists x \in D_f,\ f(-x) \neq -f(x)$ (on a trouvé le **contre-exemple** $x = 1$), donc f n'est pas impaire.

Raisonnement par récurrence

Pour prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur à l'entier fixé n_0, il suffit d'établir que :

1. $P(n_0)$ est vraie (on dit que la propriété est **fondée** ou **initialisée**) ;
2. pour tout entier i supérieur ou égal à n_0, ($P(i)$ vraie) implique ($P(i+1)$ vraie), ou encore, en langage mathématique :

$$\forall i \geqslant n_0,\ P(i) \Longrightarrow P(i+1)$$

(on dit que la propriété est **héréditaire**).

La récurrence ainsi présentée est la récurrence **simple** (par opposition à la récurrence **forte**).

Exemple 2.9 (Somme des premiers entiers)

« Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. »

Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : pour $n = 1$, on a d'une part : $\sum_{k=1}^{1} k = 1$. D'autre part : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Ainsi $P(1)$ est vraie. La propriété est donc **fondée**.

Hérédité : Soit i un entier supérieur ou égal à 1.
Supposons $P(i)$ vraie, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{i} k = \frac{i(i+1)}{2}$.
Montrons que $P(i+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{i+1} k = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$.
On a

$$\sum_{k=1}^{i+1} k = \sum_{k=1}^{i} k + (i+1) = \frac{i(i+1)}{2} + (i+1) = \frac{i^2+3i+2}{2} = \frac{(i+1)(i+2)}{2}.$$

Ainsi $P(i+1)$ est vraie. La propriété est donc **héréditaire**.

On en conclut par **récurrence** que pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est **vraie**.

Exemple 2.10 (Somme des premiers cubes)

« Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. »

Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a d'une part : $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$. D'autre part : $\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = 1$. Ainsi $P(1)$ est vraie. La propriété est donc **fondée**.

Hérédité : Soit i un entier supérieur ou égal à 1.
Supposons $P(i)$ vraie, i.e. $\sum_{k=1}^{i} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{i} k\right)^2$.
Montrons que $P(i+1)$ est alors vraie, i.e. $\sum_{k=1}^{i+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{i+1} k\right)^2$.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{i+1} k^3 = \sum_{k=1}^{i} k^3 + (i+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{i} k\right)^2 + (i+1)^3$.

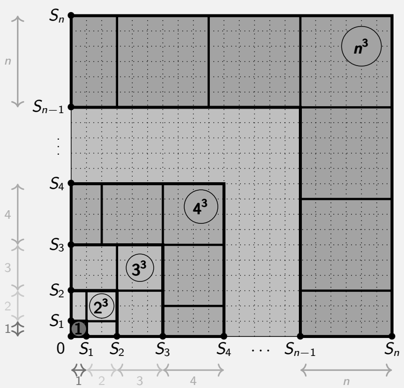
Or, d'après l'exemple 2.9, $\sum_{k=1}^{i} k = \frac{i(i+1)}{2}$, donc

$$\sum_{k=1}^{i+1} k^3 = \left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^2 + (i+1)^3 = (i+1)^2\left(\frac{i^2}{4} + i + 1\right) = \left(\frac{(i+1)(i+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{i+1} k\right)^2.$$

Ainsi $P(i+1)$ est vraie. La propriété est donc **héréditaire**.

On en conclut par **récurrence** que pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est **vraie**.

Exemple 2.10 (Somme des premiers cubes — illustration)



Posons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \text{ et } T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

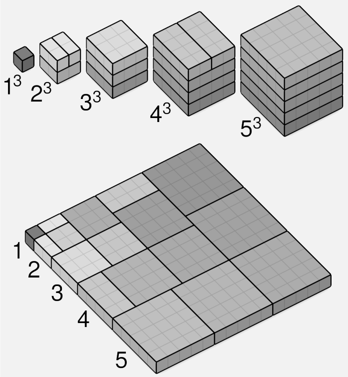
Le grand carré (de côté S_n) contient S_n^2 carrés unitaires (de côté 1).

Il se décompose en n équerres-talons contenant chacune $1, 2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3$ carrés unitaires.

Il contient donc T_n carrés unitaires :

$$T_n = S_n^2$$

Exemple 2.10 (Somme des premiers cubes — illustration)



Chaque gros cube contient $1, 2^3, 3^3, 4^3, \dots, n^3$ cubes unités répartis sur $1, 2, 3, 4, \dots, n$ plaques carrées, chacunes composant les équerres-talons.

- Lorsque le nombre de plaques est **impair (2p+1)** : p plaques superposées (resp. juxtaposées en ligne) constituent la hauteur (resp. largeur) de l'équerre, 1 dernière plaque réalise l'angle de l'équerre.
- Lorsque le nombre de plaques est **pair (2p)** : $p-1$ plaques superposées en hauteur (resp. juxtaposées en ligne) constituent la hauteur (resp. largeur) de l'équerre, 1 plaque réalise l'angle, 1 dernière plaque est divisée en deux et complète les extrémités.

Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par **analyse-synthèse** se déroule en deux étapes :

1. l'**analyse** : on raisonne sur une hypothétique solution au problème considéré et l'on accumule des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution ;
2. la **synthèse** : on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats pouvant être des solutions) et l'on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions au problème initial.

Exemple 2.11 (Une équation irrationnelle)

Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x = \sqrt{x+2}$.

Analyse : en élevant au carré, on a **nécessairement** $x^2 - x - 2 = 0$. Les solutions de cette dernière équation sont -1 et 2.

Synthèse : on **vérifie** si les candidats ainsi obtenus sont solutions de l'équation initiale : 2 convient, mais pas -1.

- Dans l'**analyse**, on raisonne par **conditions nécessaires**. Si une équation (E_1) **entraîne** une équation (E_2), alors l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_1$ de (E_1) est **contenu** dans l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_2$ de (E_2) : si $(E_1) \Longrightarrow (E_2)$, alors $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$.
- La **synthèse** consiste à **vérifier** quels éléments de $\mathcal{S}_2$ sont dans $\mathcal{S}_1$.

Exemple 2.12 (Parties paire et impaire d'une fonction)

« Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. »

En effet : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Analyse : on suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe une fonction paire p et une fonction impaire i telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p(x) + i(x)$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$.
On en tire nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Synthèse : on vérifie que les candidats précédemment obtenus conviennent effectivement. Si l'on définit p et i par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

alors p et i ont les propriétés voulues : p est **paire**, i est **impaire**, et $f = p + i$.

Exemple 2.12 (Parties paire et impaire d'une fonction)

« Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. »

Exemples

- Fixons des réels a, b, c, d, e et considérons la fonction **polynôme** définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.
  On a $f(-x) = ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e$. Les parties paires et impaires de f sont alors données par

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = ax^4 + cx^2 + e \text{ et } i(x) = bx^3 + dx$$

  p et i sont également des fonctions **polynômes**.
- Pour la fonction **exponentielle**, les parties paires et impaires sont données par $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $i(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$. Ces fonctions s'appelent respectivement **cosinus hyperboliques** et **sinus hyperboliques** et sont notées ch (ou cosh) et sh (ou sinh) :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$

  Elles jouent un rôle fondamental en mathématiques et seront étudiées en détails dans un chapitre ultérieur.

INSA

Symbole $\sum$

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/_alachal/diaporamas/diaporama_sigma.pdf

INSA

Binôme de Newton

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/_alachal/diaporamas/diaporama_binome.pdf

Notions à retenir

- Logique
  - Connecteurs logiques
  - Quantificateurs
- Méthodes de raisonnement
  - Direct
  - Disjonction des cas
  - Contraposition
  - Absurde
  - Contre-exemple
  - Récurrence
  - Analyse-synthèse

Annexe
Théorie des ensembles

Définition A.1

1. *Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments** de l'ensemble. On dit que ces éléments **appartiennent** à l'ensemble.*
2. *La notation « $x \in E$ » signifie « x appartient à l'ensemble E ».*
   La notation « $x \notin E$ » signifie « x n'appartient pas à l'ensemble E ».
3. *Un ensemble peut être défini de deux façons : en **extension** (lorsqu'on cite ses éléments) ou en **compréhension** (lorsqu'il réunit des éléments vérifiant une certaine propriété).*
4. *L'**ensemble vide** est un ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\varnothing$.*

Exemple A.2

- Description en **extension** : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
  Convention : on écrit tous les éléments entre deux accolades séparés par des virgules ou des points-virgules. L'ordre n'a pas d'importance, et lorsque plusieurs éléments sont identiques, on ne les écrit qu'une seule fois. Par exemple $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ et $\{1, 1\} = \{1\}$.
- Description en **compréhension** : A est l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à 5 : $A = \{x \in \mathbb{N}^* \ : \ x \leqslant 5\}$.
- Dans $\mathbb{R}$, l'**intervalle** $[a, b]$ est l'ensemble écrit en **compréhension** selon $\{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x \leqslant b\}$.

Exemple A.3 (Diagramme de Venn)

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{3, 4\}$.

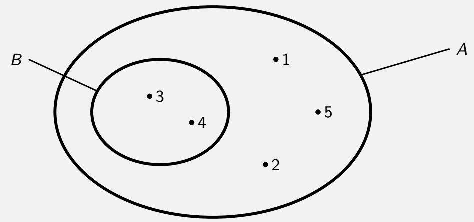


FIGURE – Représentation des ensembles A et B

Définition A.4

*Lorsqu'un ensemble E est **fini**, le nombre d'éléments qu'il contient est appelé son **cardinal**. On le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $\#E$.*
*Convention : lorsque E est **infini**, on pose $\mathrm{Card}(E) = +\infty$.*

Exemple A.5

- $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$, $\mathrm{Card}(\{\varnothing\}) = 1$.
- $\mathrm{Card}\big(\{1, 2, 3, 4, 5\}\big) = 5$.
- $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = +\infty$, $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = +\infty$.

Remarque A.6

Ne pas confondre $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$.

Définition A.7 (Égalité, inclusion)

- *Deux ensembles sont **égaux** si et seulement si ils contiennent les **mêmes** éléments.*
- *Soit A et B deux ensembles. On dit que A **est inclus dans** B si tout élément de A est élément de B. On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B, ou une **partie** de B. On note alors $A \subset B$. On rencontre parfois la notation $A \subseteq B$.*

Remarque A.8

- Si $A = B$ alors $A \subset B$.
- Ne pas confondre « appartient » et « est inclus ».
  Par exemple, on peut écrire $3 \in \{3, 4\}$ et $\{3\} \subset \{3, 4\}$ mais **pas** $\{3\} \in \{3, 4\}$.

Propriété A.9 (Égalité et inclusion)

Soit A et B deux ensembles. $A = B$ équivaut à $A \subset B$ et $B \subset A$.

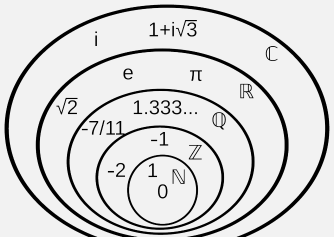
Propriété A.10 (Inclusions en chaîne)

Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Exemple A.11 (Ensembles de numération)

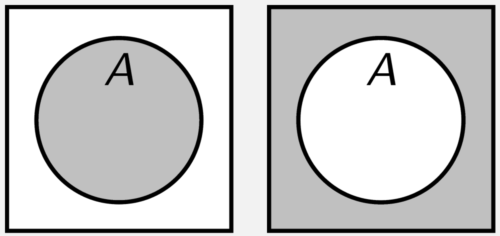
Pour les ensembles de numération usuels, on a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



Définition A.12 (Complémentaire)

*Soit A un sous-ensemble de E. On appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble formé des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\complement_E A$, ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, A^c ou encore $\overline{A}$.*



Exemple A.13

1. Dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{]-\infty, a]} =]a, +\infty[$ et $\overline{]-\infty, a[} = [a, +\infty[$.
2. Dans $\mathbb{Z}$, notons $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{I}$) le sous-ensemble des nombres pairs (resp. impairs). On a $\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{I}$ et $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{P}$.

Propriétés A.14

- *$\overline{\overline{A}} = A$.*
- *$\overline{\varnothing} = E$ et $\overline{E} = \varnothing$ si E est le référentiel.*
- *Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.*

Propriété A.15 (Complémentaire et cardinal)

*Si le référentiel E est un ensemble **fini** et A un sous-ensemble de E :*

$$\mathrm{Card}\big(\overline{A}\big) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

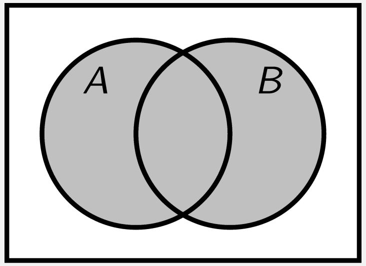
Exemple A.16

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ un référentiel et $A = \{1, 2, 5\}$ et $B = \{1, 2, 3, 5\}$ deux parties de E.

- On a $\overline{A} = \{3, 4\}$ et $\overline{B} = \{4\}$. On constate que $A \subset B$ et $\overline{B} \subset \overline{A}$.
  Puis $\overline{\overline{A}} = \{1, 2, 5\} = A$ et $\overline{\overline{B}} = \{1, 2, 3, 5\} = B$.
- On a $\mathrm{Card}(E) = 5$.
  Concernant A : $\mathrm{Card}(A) = 3$ et $\mathrm{Card}\big(\overline{A}\big) = 2 = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.
  Concernant B : $\mathrm{Card}(B) = 4$ et $\mathrm{Card}\big(\overline{B}\big) = 1 = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(B)$.

Définition A.17 (Réunion)

*Soit A et B deux ensembles. La **réunion** de A et B, notée $A \cup B$ (qui se lit « A **union** B ») est l'ensemble formé des éléments appartenant à A **ou (inclusif)** à B.*

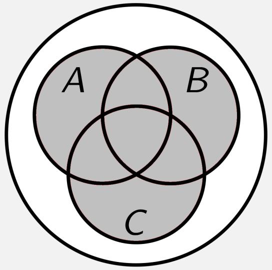


Exemple A.18

1. Dans $\mathbb{R}$, on a $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*_- \cup \mathbb{R}^*_+ = \mathbb{R}^*$.
2. Dans $\mathbb{Z}$, on a $\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{Z}$.

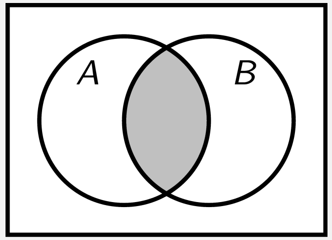
Propriétés A.19

- *$A \subset A \cup B$;*
- *si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$ (et réciproquement) ;*
- *$A \cup \varnothing = A$; $A \cup A = A$; $A \cup \overline{A} = E$ si E est le référentiel ;*
- *$A \cup B = B \cup A$ (**commutativité**) ;*
- *$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (**associativité**).*
  Dans ce cas, on écrira plus simplement $A \cup B \cup C$.



Définition A.20 (Intersection)

*Soit A et B deux ensembles. L'**intersection** de A et B notée $A \cap B$ (qui se lit « A **inter** B ») est l'ensemble formé des éléments appartenant à A **et** à B.*



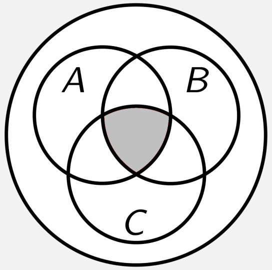
*Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **disjoints**.*

Exemple A.21

1. Dans $\mathbb{R}$, on a $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$ et $\mathbb{R}^*_- \cap \mathbb{R}^*_+ = \varnothing$.
2. Dans $\mathbb{Z}$, on a $\mathbb{P} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

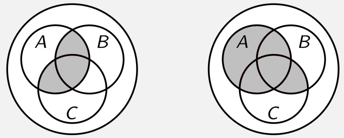
Propriétés A.22

- *$A \cap B \subset A$;*
- *Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ (et réciproquement) ;*
- *$A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap A = A$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$;*
- *$A \cap B = B \cap A$ (**commutativité**) ;*
- *$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (**associativité**).*
  Dans ce cas, on écrira plus simplement $A \cap B \cap C$.

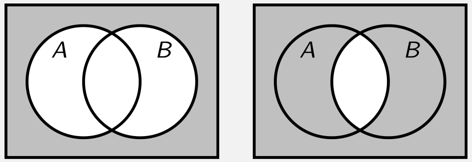


Propriétés A.23 (Relations entre réunion, intersection et complémentaire)

- ***Distributivité** de l'intersection sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;*
- ***Distributivité** de l'union sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;*



- *Lois de **De Morgan** : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*



Exemple A.24

Dans $\mathbb{R}$, pour tout réel positif a, on a $\overline{[-a, a]} =]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$.

Remarque A.25

L'intersection est prioritaire sur la réunion, c'est-à-dire : $A \cap B \cup C = (A \cap B) \cup C$ et non $A \cap (B \cup C)$.

Propriété A.26 (Réunion, intersection et cardinal)

*Si A et B sont des ensembles **finis** :*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

*Si de plus A et B sont **disjoints** :*

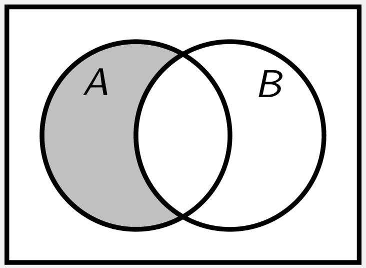
$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

Exemple A.27

Soit $A = \{1, 4, 5\}$ et $B = \{1, 2, 3, 5\}$.
D'une part : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A \cap B = \{1, 5\}$.
D'autre part : $\mathrm{Card}(A) = 3$, $\mathrm{Card}(B) = 4$, $\mathrm{Card}(A \cup B) = 5$, $\mathrm{Card}(A \cap B) = 2$.
On vérifie que l'on a bien $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Définition A.28 (Différence)

*Soit A et B deux ensembles. La **différence** de A et B, notée $A \backslash B$ (qui se lit « A **moins** B ») est l'ensemble formé des éléments appartenant à A qui **n**'appartiennent **pas** à B.*



Exemple A.29

1. Dans $\mathbb{R}$, on a $\mathbb{R} \backslash \{0\} = \mathbb{R}^*$ et $[a, b] \backslash \{a, b\} =]a, b[$.
2. Dans $\mathbb{Z}$, on a $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{P} = \mathbb{I}$.

Propriétés A.30

- *$A \backslash B = A \cap \overline{B}$;*
- *$A \backslash B \subset A$;*
- *$A \backslash \varnothing = A$; $A \backslash A = \varnothing$;*
- *Si $A \subset B$, alors $A \backslash B = \varnothing$ (et réciproquement) ;*
- *$(A \backslash B) \cup (A \cap B) = A$;*
- *$(A \backslash B) \cup B = A \cup B$.*

Propriété A.31 (Différence et cardinal)

*Si A et B sont des ensembles **finis** :*

$$\mathrm{Card}(A \backslash B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

Si de plus $B \subset A$:

$$\mathrm{Card}(A \backslash B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(B)$$

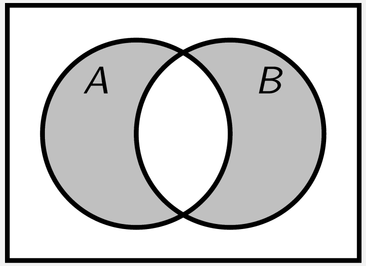
Exemple A.32

Soit $A = \{1, 4, 5\}$ et $B = \{1, 2, 3, 5\}$.
D'une part : $A \backslash B = \{4\}$ et $A \cap B = \{1, 5\}$.
D'autre part : $\mathrm{Card}(A) = 3$, $\mathrm{Card}(A \backslash B) = 1$, $\mathrm{Card}(A \cup B) = 2$.
On vérifie que l'on a bien $\mathrm{Card}(A \backslash B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Définition A.33 (Différence symétrique (facultatif))

*Soit A et B deux ensembles. La **différence symétrique** de A et B, notée $A \Delta B$ (qui se lit « A **delta** B ») est l'ensemble formé des éléments appartenant **soit** à A **soit** à B, mais pas aux deux simultanément. On a*

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

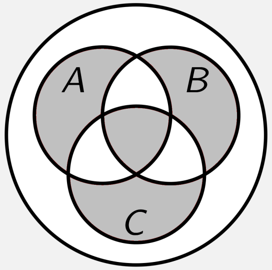


Exemple A.34

Dans $\mathbb{R}$, si $a < c < b < d$, $[a, b] \Delta [c, d] = [a, c[\cup]b, d]$.

Propriétés A.35

- *$A \Delta B \subset A \cup B$;*
- *$A \Delta \varnothing = A$; $A \Delta A = \varnothing$;*
- *$A \Delta B = \varnothing$ si et seulement si $A = B$;*
- *$A \Delta B = B \Delta A$ (**commutativité**) ;*
- *$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (**associativité**).*
  Dans ce cas, on écrira plus simplement $A \Delta B \Delta C$.



Définition A.37 (Produit cartésien)

*Soit A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de A et B l'ensemble des **couples** d'éléments de A et de B, pris dans cet ordre. On le note $A \times B$ et on lit « A **croix** B ».*

$$A \times B = \{(a, b),\ a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Exemple A.38

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$, alors
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$
- Pour dire $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, on peut noter $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

Remarque A.39

- $A \times A$ se note aussi A^2 ; par exemple, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.
- Ne pas confondre **couple** et **paire**. La notation (a, b) désigne un **couple** alors que la notation $\{a, b\}$ désigne, lorsque $a \neq b$, un ensemble à deux éléments.

  Dans un **couple**, l'ordre d'écriture est important : lorsque $a \neq b$, (a, b) et (b, a) sont des couples **distincts**. On peut également considérer le couple (a, a) qui ne se simplifie pas en a.

  Dans une **paire**, l'ordre d'écriture n'a pas d'importance : lorsque $a \neq b$, $\{a, b\} = \{b, a\}$. De plus, lorsque $a = b$, on n'écrit qu'une seule fois a : $\{a, a\} = \{a\}$.

Propriété A.40 (Produit et cardinal)

*Si A et B sont des ensembles **finis** :*

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$$

Définition A.41 (Produit cartésien de n ensembles)

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles. On appelle **produit cartésien** de $A_1, A_2, \dots, A_n$ l'ensemble des **n-uplets** d'éléments de $A_1, A_2, \dots, A_n$, pris dans cet ordre. On le note $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n),\ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

Exemple A.42

Lorsque les n ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont identiques à A, le produit cartésien $A \times A \times \cdots \times A$ se note aussi A^n.

Par exemple, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble est le modèle fondamental d'**espace vectoriel** de dimension n en **algèbre linéaire**.