INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Généralités sur les fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

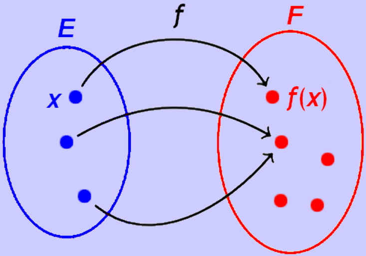
Sommaire

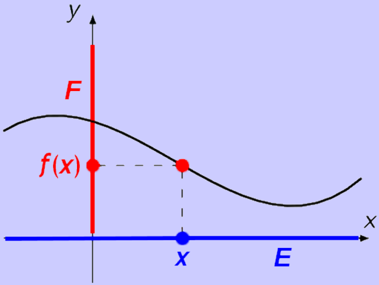
Sommaire

Définition 1.1 (Applications/Fonctions)

❶ *Une* ***application*** *f d'un ensemble E dans un ensemble F est une correspondance qui à tout élément x de E associe un élément noté $f(x)$ appartenant à F.*

- *Les ensembles E et F sont respectivement appelés* ***ensemble de départ*** *et* ***ensemble d'arrivée*** de l'application f.
- *Pour tout élément $x \in E$, l'élément $f(x)$ est* ***l'image*** de x *par f.*

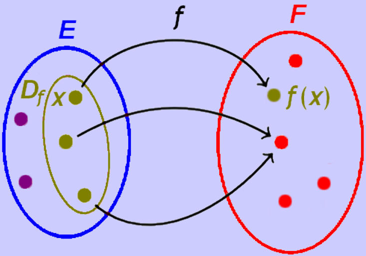


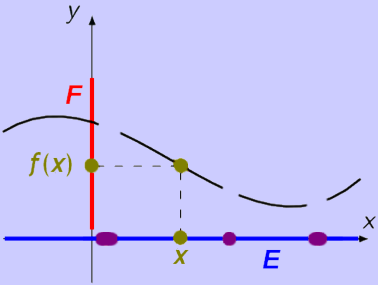


Définition 1.1 (Applications/Fonctions)

❷ *Une **fonction** f de E dans F est une application d'une partie $\mathcal{D}_f$ d'un ensemble E dans un ensemble F. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est alors appelé **ensemble de définition** de la fonction f.*
*En d'autres termes, une **fonction** de E dans F est une correspondance qui à tout élément de E associe **au plus** un élément de F.*

- *Les ensembles E et F sont respectivement appelés **ensemble de départ** et **ensemble d'arrivée** de la fonction f.*
- *Pour tout élément $x \in \mathcal{D}_f$, l'élément $f(x)$ est **l'image** de x par f.*

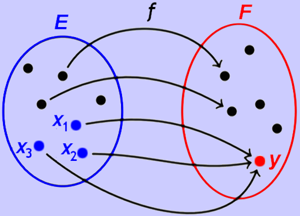


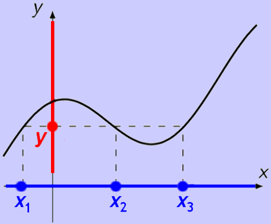


Définition 1.2 (Antécédents)

Soit $f : E \to F$ une fonction.

1. *Pour tout élément $y \in F$, s'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$, l'élément x est* ***un antécédent*** *de y par f.*



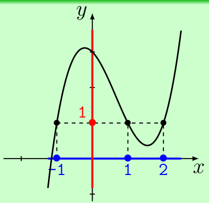


Exemple 1.3

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)(x-1)(x-2)+1 \end{array}$.

Les antécédents de 1 sont $-1, 1, 2$:

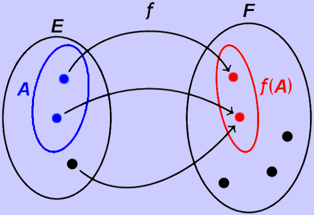
$$f(-1) = f(1) = f(2) = 1.$$

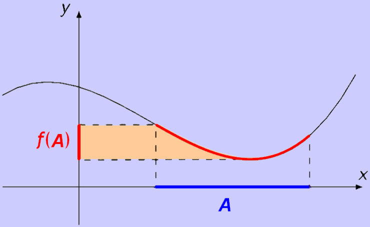


Définition 1.4 (Image directe)

Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E.

2. *L'**image directe** de A par f est l'ensemble noté $f(A)$ constitué des images par f des éléments de A :* $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.

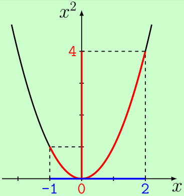




Exemple 1.5 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

On a $f([-1, 2]) = [0, 4]$.

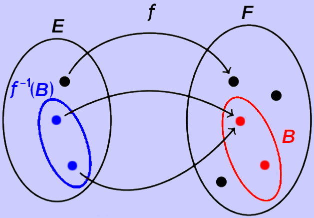


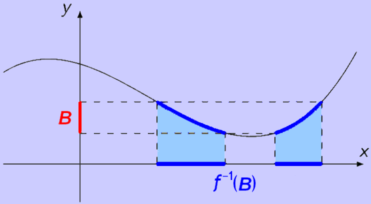
Définition 1.6 (Image réciproque (facultatif))

Soit $f : E \to F$ une application et B une partie de F.

3. *L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ constitué des antécédents par f des éléments de B :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

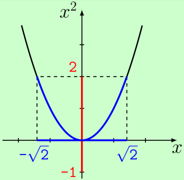




Exemple 1.7 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

On a $f^{-1}([-1, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.



Définition 1.8 (Restriction)

Soit une application $f : E \to F$ et A une partie de E. On appelle ***restriction*** *de f à A l'application de A dans F, notée $f_{|A}$, définie par $\forall\, x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$.*

En pratique, la restriction sert à obtenir des propriétés que l'on n'a pas sur l'application initiale (bijectivité, monotonie, continuité, etc). Par exemple, dans l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on sera souvent amener à restreindre la fonction considérée à des intervalles sur lesquels elle est monotone (étude des variations).

Exemple 1.9 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

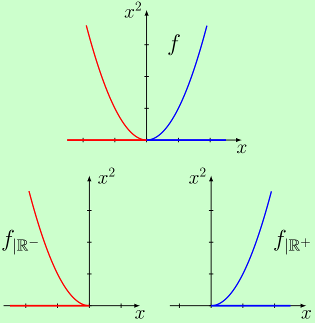
Cette application n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

- La restriction $f_{|\mathbb{R}^-} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

  est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

- La restriction $f_{|\mathbb{R}^+} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

  est croissante sur $\mathbb{R}^+$.



Définition 1.10 (Composition)

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- *On appelle **composée** de f par g l'application de E dans G notée $g \circ f$ (se lisant « g rond f ») définie par $\forall x \in E$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Schématiquement :*

$$g \circ f : \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 1.11 (Associativité)

*La loi de composition des applications est **associative** mais **non commutative**.*
Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ sont trois applications, alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Exemple 1.12 (Applications affines, non commutativité)

Fixons quatre réels a, b, c, d et considèrons les **applications affines**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + b \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cx + d \end{array}$$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = (ac)x + (bc + d)$$
$$(f \circ g)(x) = (ac)x + (ad + b)$$

En général $ad + b \neq bc + d$ et $f \circ g \neq g \circ f$.

- Lorsque $b = d = 0$, les applications f et g sont **linéaires** et **commutent :**

$$f \circ g = g \circ f.$$

Définition 1.13 (Injectivité)

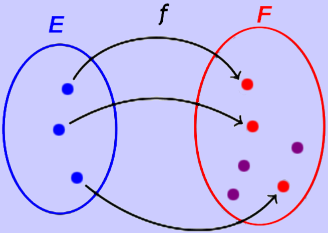
Soit $f : E \to F$ une application.

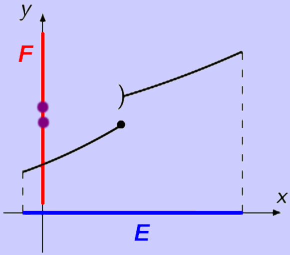
1. *On dit que f est **injective** (ou que f est une **injection**) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **au plus** un antécédent dans E. Autrement dit :*

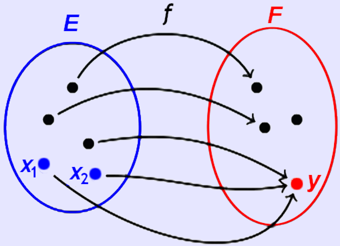
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)],$$

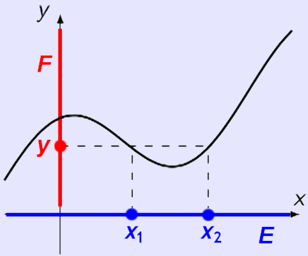
ou encore :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad [f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2].$$









Une application **non injective** :

$$\exists\,(x_1, x_2) \in E^2, \quad [x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad f(x_1) = f(x_2)].$$

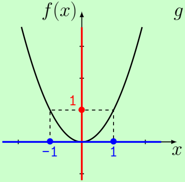
Exemple 1.14 (Fonction « carré »)

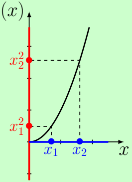
1. Soit l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

   On a $-1 \neq 1$ et $(-1)^2 = (1)^2$.
   Donc f n'est **pas injective.**

2. Soit l'application $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. $(g = f_{|\mathbb{R}^+})$

   On a $\forall\,(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow (x_1)^2 \neq (x_2)^2$.
   Donc g est **injective.**





Définition 1.15 (Surjectivité)

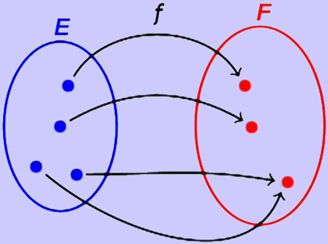
Soit $f : E \to F$ une application.

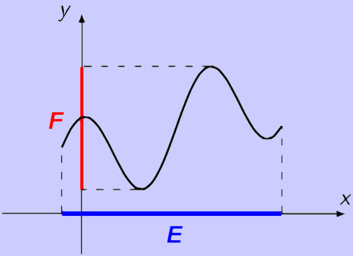
2. *On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection**) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **au moins** un antécédent dans E :*

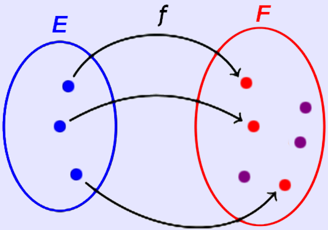
$$\forall y \in F, \quad [\exists x \in E, y = f(x)].$$

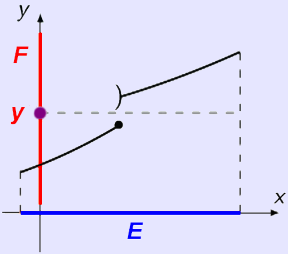
Autrement dit :

$$f(E) = F.$$









Une application **non surjective** :

$$\exists\, y \in F, \quad [\forall\, x \in E,\, y \neq f(x)].$$

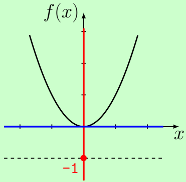
Exemple 1.16 (Fonction « carré »)

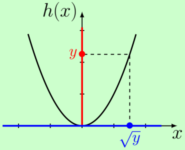
1. Soit l'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

   On a $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$.
   Donc f n'est **pas surjective.**

2. Soit l'application $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

   On a $\forall\, y \in \mathbb{R}^+, \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$.
   Donc h est **surjective.**





Définition 1.17 (Bijectivité/Réciprocité)

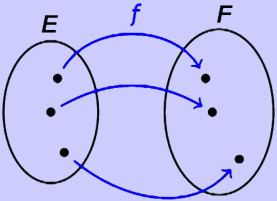
Soit $f : E \to F$ une application.

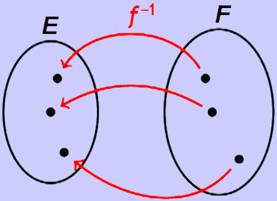
3. *On dit que f est* ***bijective*** *(ou que f est une* ***bijection****) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet* ***exactement*** *un antécédent dans E, c'est-à-dire lorsqu'elle est à la fois* ***injective et surjective*** *:*

$$\forall\, y \in F, \quad [\exists!\, x \in E,\, y = f(x)].$$

On note alors $x = f^{-1}(y)$, ce qui définit une application f^{-1} de F dans E appelée ***bijection réciproque*** *de f (ou plus simplement réciproque de f). Elle est caractérisée par*

$$\forall\, x \in E, \forall\, y \in F, \quad [y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)].$$

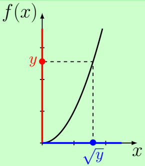




Exemple 1.18 (Fonction « carré »)

Soit l'application $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

On a $\forall\, y \in \mathbb{R}^+,\ \exists! x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = y$. En effet : $x = \sqrt{y}$.
Donc f est **bijective** de réciproque $f^{-1}\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.



Proposition 1.19 (Bijectivité et composition)

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux ***bijections****.*

Alors $g \circ f : E \to G$ est une ***bijection*** *et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Exemple 1.20 (Fonctions « carré, racine, logarithme, exponentielle »)

Soit l'application $h\colon \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{\ln x} \end{array}$.

h est la composée $g \circ f$ avec $f\colon \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ et $g\colon \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

- f est **bijective** de réciproque $f^{-1}\colon \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$
- g est **bijective** de réciproque $g^{-1}\colon \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

Donc h est **bijective** de réciproque $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\colon \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x^2} \end{array}$

Proposition 1.21 (Réciprocité)

Notons Id_A *l'application (dite* ***identité****) qui va d'un ensemble* A *dans lui-même définie par* $\forall x \in A$, $\mathrm{Id}_A(x) = x$*. Pour toute application* $f : E \to F$ ***bijective****, on a :*

- $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ *et* $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ *;*
- f^{-1} *est bijective et* $(f^{-1})^{-1} = f$*.*

Remarque 1.22 (Réciprocité (facultatif))

1. Si $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ sont deux applications telles que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$, alors φ est **injective** et ψ est **surjective**.
2. Soit $f : E \to F$ une application.
   S'il existe deux applications $g_1 : F \to E$ et $g_2 : F \to E$ telles que $g_1 \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_F$ alors $g_1 = g_2$ et f est **bijective** de **réciproque** g_1 : $f^{-1} = g_1 = g_2$.

Exemple 1.23 (Équipotence de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$)

Soit les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ 2|n| - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$

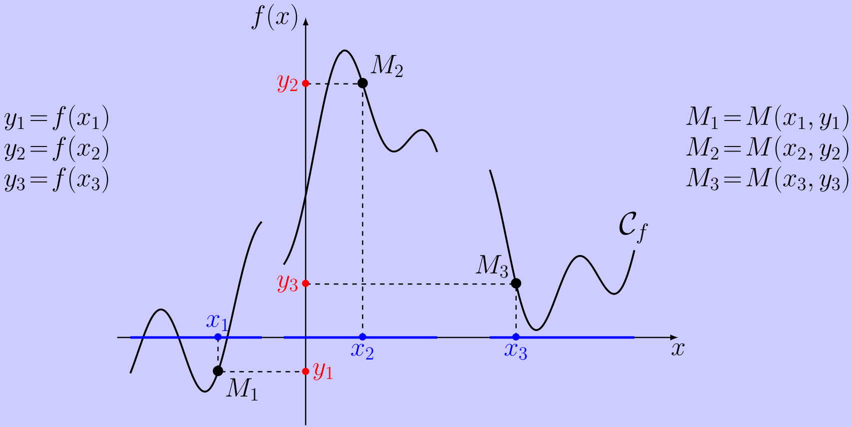
On a $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
Donc f et g sont des bijections **réciproques** l'une de l'autre : $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$.

Sommaire

Définition 2.1 (Graphe/Courbe)

Soit une application $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$.

*On appelle **graphe** ou **courbe représentative** de f l'ensemble des points $M(x, f(x))$ du plan repéré lorsque x décrit D. On notera par la suite $\mathcal{C}_f$ cette courbe.*



Définition 2.2 (Opérations)

Soit f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit la ***somme****, le* ***produit*** *et le* ***quotient*** *de f et g selon*

$$f+g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad f\times g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)\times g(x) \end{array} \qquad \frac{f}{g} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Notons $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ les ensembles de définition de f et g. Alors

$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \qquad \mathcal{D}_{f\times g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \qquad \mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \neq 0\}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$,

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad (f\times g)(x) = f(x)\times g(x) \quad \text{et si } g(x) \neq 0,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemple 2.3 (Fonctions polynômes, rationnelles)

1. Une fonction **polynôme** est la **somme** de fonctions **monômes** $x \longmapsto a_k x^k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$
2. Une fonction **rationnelle** est le **quotient** de deux fonctions **polynômes** P et Q : $R = \dfrac{P}{Q}$
$$\forall x \in \mathcal{D}_R,\ R(x) = \frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + b_{q-2}x^{q-2} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Définition 2.4 (Croissance/Décroissance)

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

1. *On dit que f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur D si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\ (\textit{resp. } f(x_1) \geqslant f(x_2))]$$

ou encore

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0\ (\textit{resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant 0)].$$

2. *On dit que f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur D si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (\textit{resp. } f(x_1) > f(x_2))$$

ou encore

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2,\ [x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\ (\textit{resp. } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0)].$$

3. *On dit qu'une fonction est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur D lorsqu'elle est **croissante sur D** ou **décroissante sur D** (resp. **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur D).*

Proposition 2.5 (Variations et composition)

Soit D et D' deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \to D'$, $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications. Alors l'application $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ est :

- ***croissante** si f et g sont de **même monotonie** (i.e. toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes) ;*
- ***décroissante** si f et g sont de **monotonie contraires.***

Exemple 2.6

Soit l'application $h\colon \begin{array}{rcl}]3,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(\ln(x-3)\big)^2 \end{array}$.

- h est la composée $g \circ f$ avec $f\colon \begin{array}{rcl}]3,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x-3) \end{array}$ et $g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u^2 \end{array}$.

  f est **croissante**, mais g n'est pas **monotone**. On est ainsi amené à considérer des restrictions.
- $h_{|]3,4]}$ est la composée $g_1 \circ f_1$ avec $f_1\colon \begin{array}{rcl}]3,4] & \longrightarrow &]-\infty,0] \\ x & \longmapsto & \ln(x-3) \end{array}$ et $g_1\colon \begin{array}{rcl}]-\infty,0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u^2 \end{array}$.

  f_1 est **croissante** et g_1 **décroissante**, donc h est **décroissante** sur $]3,4]$.
- $h_{|[4,+\infty[}$ est la composée $g_2 \circ f_2$ avec $f_2\colon \begin{array}{rcl} [4,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \ln(x-3) \end{array}$ et $g_2\colon \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u^2 \end{array}$.

  f_2 est **croissante** et g_2 **croissante**, donc h est **croissante** sur $[4,+\infty[$.

Proposition 2.7 (Variations et injectivité)

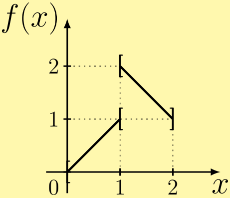
Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application.
*Si f est **strictement monotone**, alors elle est **injective**.*

Remarque 2.8 (Variations et injectivité)

Attention : la réciproque est **fausse** : une injection **n**'est **pas** nécessairement monotone.

Par exemple : l'application

$$f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 3-x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$



est **injective** mais **pas monotone**.

Définition 2.9 (Majorant/Minorant d'un ensemble)

1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.*
On dit que α est un ***majorant*** *de A ou que α* ***majore*** *A si $\forall x \in A,\ x \leqslant \alpha$.*
On dit que α est un ***minorant*** *de A ou que α* ***minore*** *A si $\forall x \in A,\ x \geqslant \alpha$.*

2. *Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui admet (au moins) un majorant (resp. un minorant), on dit qu'elle est* ***majorée*** *(resp.* ***minorée****).*

3. *Si A est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est* ***bornée****, ce qui équivaut à :*
$$\exists M > 0,\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant M.$$

4. *On dit que A admet un* ***plus grand élément*** *(resp. un* ***plus petit élément****) α lorsque α est* ***à la fois*** *un majorant (resp. un minorant) de A* ***et*** *un élément de A. S'il existe, α s'appelle aussi le* ***maximum*** *(resp. le* ***minimum****) de A et se note $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).*

Théorème-définition 2.10 (Borne supérieure/inférieure d'un ensemble)

1. *Pour toute partie* ***non vide et majorée*** *A de $\mathbb{R}$, il existe un* ***unique*** *réel qui est* ***le plus petit des majorants*** *de A ; ce réel s'appelle la* ***borne supérieure*** *de A et on le note $\sup(A)$.*
2. *Pour toute partie* ***non vide et minorée*** *A de $\mathbb{R}$, il existe un* ***unique*** *réel qui est* ***le plus grand des minorants*** *de A ; ce réel s'appelle la* ***borne inférieure*** *de A et on le note $\inf(A)$.*

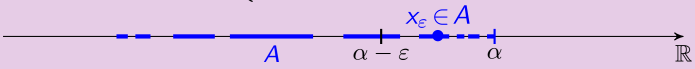
Par convention,

- *si A est une partie* ***non vide non majorée****, on pose $\sup(A) = +\infty$;*
- *si A est une partie* ***non vide non minorée****, on pose $\inf(A) = -\infty$;*
- *on pose également $\sup(\varnothing) = -\infty$ et $\inf(\varnothing) = +\infty$.*

Proposition 2.11 (Caractérisation (facultatif))

La ***borne supérieure*** *peut se caractériser selon*

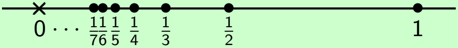
$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A, \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant \alpha \end{cases}$$



On peut caractériser la ***borne inférieure*** *de manière similaire.*

Exemple 2.12

1. Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont **ni majorés ni minorés**, ils admettent $-\infty$ et $+\infty$ pour borne inférieure et borne supérieure.
2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
   - Les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ sont **bornés** et admettent tous a pour borne inférieure et b pour borne supérieure.
   - L'intervalle $[a, b]$ admet a pour plus petit élément et b pour plus grand élément, alors que l'intervalle $]a, b[$ n'admet ni plus petit ni plus grand élément.
   - Les intervalles $[a, +\infty[$ et $]a, +\infty[$ sont **minorés** mais **pas majorés,** ils admettent a pour borne inférieure et $+\infty$ pour borne supérieure.
3. Soit $A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.



   - L'ensemble A est non vide, majoré par 1 et minoré par 0.
   - On a $1 \in A$ donc $\sup(A) = \max(A) = 1$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$ donc 0 est un minorant de A. Supposons qu'il ne soit pas le plus grand. Il existerait alors un minorant $\varepsilon > 0$: on aurait donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geqslant \varepsilon$, ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ et l'ensemble $\mathbb{N}^*$ serait majoré, ce qui est absurde. Donc 0 est le plus grand des minorants de A et alors $\inf(A) = 0$. Or $0 \notin A$, donc A n'a pas de plus petit élément.

Définition 2.13 (Fonctions majorées/minorées)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. - *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est un **majorant** de f si*
   $$\forall x \in D, \quad f(x) \leqslant \alpha.$$
   - *On dit que f est **majorée** sur D si elle admet au moins un majorant. Dans ce cas, elle admet un **plus petit majorant** appelé **borne supérieure**. Il est noté $\sup\limits_{x\in D} f(x)$. On a $\sup\limits_{x\in D} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in D\}$.*
   - *Si f est une fonction **non majorée**, on pose par convention $\sup\limits_{x\in D} f(x) = +\infty$.*
2. - *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est un **minorant** de f si*
   $$\forall x \in D, \quad f(x) \geqslant \alpha.$$
   - *On dit que f est **minorée** sur D si elle admet au moins un minorant. Dans ce cas, elle admet un **plus grand minorant** appelé **borne inférieure**. Il est noté $\inf\limits_{x\in D} f(x)$. On a $\inf\limits_{x\in D} f(x) = \inf\{f(x),\ x \in D\}$.*
   - *Si f est une fonction **non minorée**, on pose par convention $\inf\limits_{x\in D} f(x) = -\infty$.*
3. *On dit que f est **bornée** sur D si elle est à la fois **majorée** et **minorée** sur D, ce qui équivaut à*
   $$\exists M > 0, \forall x \in D, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Définition 2.13 (Fonctions majorées/minorées)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

④ • *Soit $x_0 \in D$. On dit que f admet un **maximum** sur D en x_0 si*

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

*Dans ce cas, on dit que $f(x_0)$ est un **maximum** de f sur D et on le note $\max\limits_{x \in D} f(x)$. On a $\sup\limits_{x \in D} f(x) = \max\limits_{x \in D} f(x) = f(x_0)$.*

⑤ • *Soit $x_0 \in D$. On dit que f admet un **minimum** sur D en x_0 si*

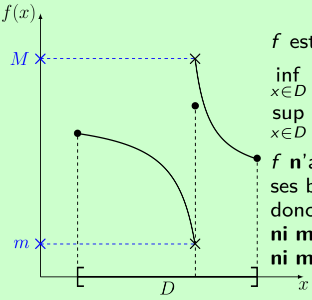
$$\forall x \in D, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

*Dans ce cas, on dit que $f(x_0)$ est un **minimum** de f sur D et on le note $\min\limits_{x \in D} f(x)$. On a $\inf\limits_{x \in D} f(x) = \min\limits_{x \in D} f(x) = f(x_0)$.*

Remarque 2.14

Attention : une fonction majorée (donc admettant une **borne supérieure**) peut **ne pas** admettre de **maximum**.

Exemple 2.15

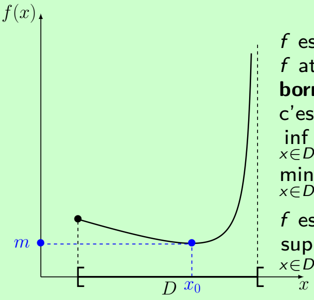


f est **bornée**

$\inf_{x\in D} f(x) = m$

$\sup_{x\in D} f(x) = M$

f **n'atteint pas** ses bornes donc n'admet **ni maximum, ni minimum**



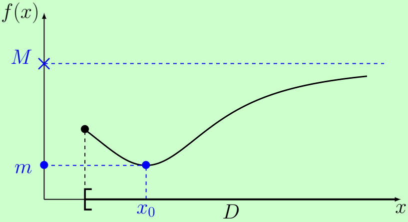
f est **minorée**
f atteint sa **borne inférieure**
c'est un **minimum**

$\inf_{x\in D} f(x) = m$

$\min_{x\in D} f(x) = m$

f est **non majorée**

$\sup_{x\in D} f(x) = +\infty$



f est **bornée**

f atteint sa **borne inférieure**
c'est un **minimum**

$\inf_{x\in D} f(x) = \min_{x\in D} f(x) = m$

f **n'atteint pas** sa borne supérieure donc n'admet **pas de maximum**

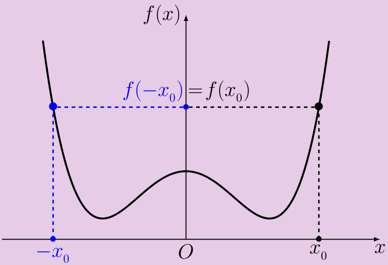
$\sup_{x\in D} f(x) = M$

Définition 2.16 (Parité)

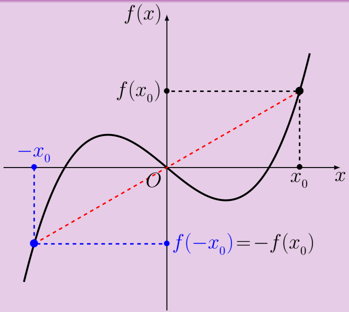
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application dont l'ensemble de définition D est ***symétrique*** *par rapport à 0 (i.e. $\forall x \in D, -x \in D$).*

1. *On dit que f est une fonction* ***paire*** *lorsque $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.*
2. *On dit que f est une fonction* ***impaire*** *lorsque $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.*

Proposition 2.17 (Parité et symétries)



Si f est ***paire*** *alors $\mathcal{C}_f$ est* ***symétrique*** *par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.*



Si f est ***impaire*** *alors $\mathcal{C}_f$ est* ***symétrique*** *par rapport à l'origine du repère.*

Proposition 2.18 (Parité et opérations)

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un ensemble D **symétrique** par rapport à 0.*
   - *Si f et g sont **paires** (resp. **impaires**), alors $f + g$ est **paire** (resp. **impaire**).*
   - *Si f et g ont **même parité**, alors $f \times g$ est **paire** ;*
     *si f et g ont des **parités contraires**, alors $f \times g$ est **impaire**.*
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications respectivement définies sur des ensembles D et D' **symétriques** par rapport à 0.*
   - *Si f est **paire**, alors $g \circ f$ est **paire**.*
   - *Si f est **impaire**, alors $g \circ f$ a la **même parité** que g.*
3. *Soit $f : D \to D'$ une **bijection impaire** entre deux ensembles D et D' **symétriques** par rapport à 0. Alors f^{-1} est **impaire**.*

Exemple 2.19

1. Pour tout entier **pair** (resp. **impair**) p, la fonction $x \longmapsto x^p$ (définie sur $\mathbb{R}$ si $p \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ si $p \in \mathbb{Z}_-^*$) est **paire** (resp. **impaire**).
2. La fonction cos est **paire** et la fonction sin est **impaire.**
3. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une application.
   - L'application $x \longmapsto f(\cos x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est **paire**.
   - Si f est **paire** (resp. **impaire**), l'application $x \longmapsto f(\sin x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est **paire** (resp. **impaire**).

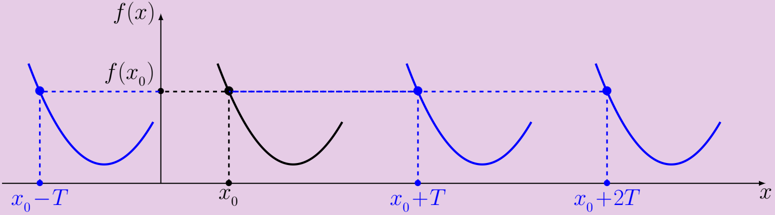
Définition 2.20 (Périodicité)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application et T un réel positif non nul.
*On dit que f est **périodique de période** T (ou qu'elle est T-périodique) lorsque*

$$\forall x \in D,\ x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Proposition 2.21 (Périodicité et symétries)

*Si f est **périodique** alors $\mathcal{C}_f$ est la répétition à l'infini du même motif tracé sur une période.*



Remarque 2.22 (Périodes)

Une fonction T-périodique est également nT-périodique pour n'importe quel entier non nul n. "La" période T n'est donc pas unique et pas nécessairement minimale.

Proposition 2.23 (Périodicité et opérations)

Soit T un réel positif non nul.

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux applications T-**périodiques.***
   - *Alors $f + g$ et $f \times g$ sont T-**périodiques.***
     Ce résultat est aussi valable pour le quotient f/g sur son ensemble de définition.

   *Autrement dit, si f et g admettent une période **commune,** $f+g$ et $f \times g$ sont périodiques.*
2. *Soit $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux applications.*
   - *Si f est T-**périodique**, alors $g \circ f$ est T-**périodique**.*

Exemple 2.24

1. Les fonctions cos et sin sont 2π-**périodiques**.
2. Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels.

   La fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ est 2π-**périodique**.
3. Soit T un réel positif non nul, p et q des entiers positifs non nuls.
   Soit f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$ resp. pT-**périodique** et qT-**périodique.**
   Alors $f + g$ et $f \times g$ sont des applications rT-**périodiques** où $r = \text{ppcm}(p, q)$.

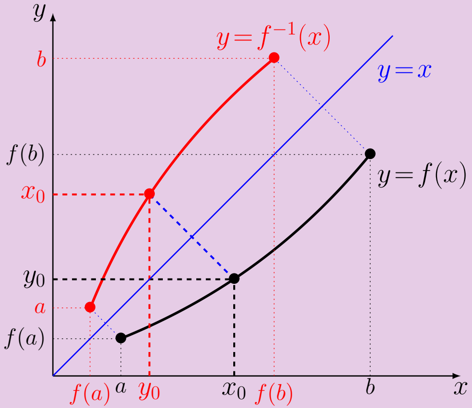
Remarque 2.25 (Périodicité et addition/multiplication (facultatif))

La somme et le produit de deux fonctions périodiques **ne sont** en général **pas** périodiques.
Exemple : pour tout **irrationnel** a, l'application $x \longmapsto \cos(x) + \cos(ax)$ **n'est pas** périodique.

Proposition 2.26 (Bijectivité et symétrie)

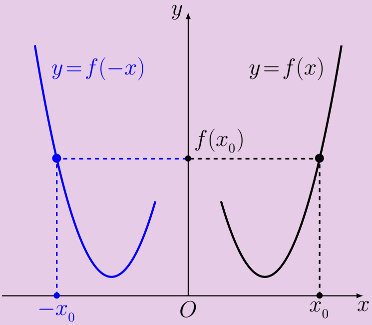
*Soit $f : D \to D'$ une **bijection** où D et D' sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$.*

*Alors sa courbe représentative et celle de sa réciproque dans un repère orthonormal du plan sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée aussi première bissectrice).*



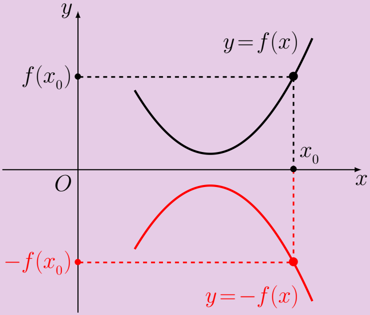
Proposition 2.27 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(-x)$



Le graphe de l'application $x \mapsto f(-x)$ est le **symétrique** de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.

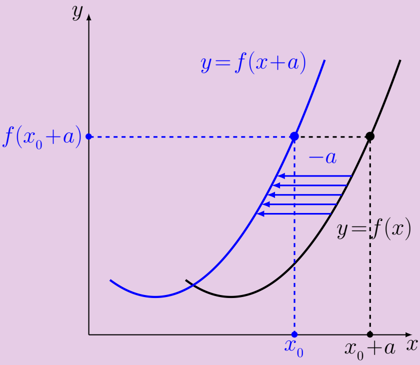
Application $x \mapsto -f(x)$



Le graphe de l'application $x \mapsto -f(x)$ est le **symétrique** de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.

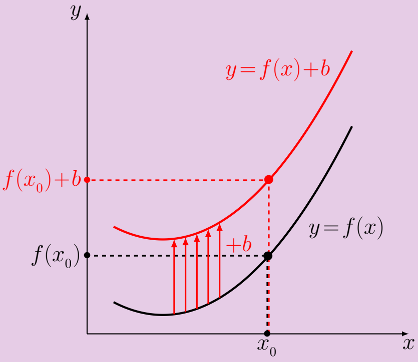
Proposition 2.27 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(x+a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto f(x+a)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la **translation** de vecteur $-a\vec{i}$ (translation « horizontale »).

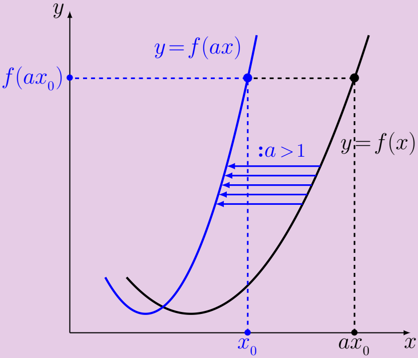
Application $x \mapsto f(x)+b$ avec $b \in \mathbb{R}$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto f(x)+b$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la **translation** de vecteur $b\vec{j}$ (translation « verticale »).

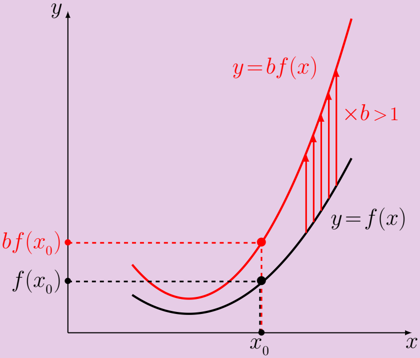
Proposition 2.27 (Courbes et transformations géométriques)

Application $x \mapsto f(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto f(a\,x)$ est obtenu par **réduction/agrandissement** dans la direction des abscisses de $\mathcal{C}_f$ d'un facteur $|a|$, suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées lorsque $a < 0$.

Application $x \mapsto bf(x)$ avec $b \in \mathbb{R}^*$ fixé



Le graphe de l'application $x \mapsto b\,f(x)$ est obtenu par **agrandissement/réduction** dans la direction des ordonnées de $\mathcal{C}_f$ d'un facteur $|b|$, suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses lorsque $b < 0$.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Mélanges Faros et cryptographie

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_melanges_faros.pdf

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Courbes de Lissajous

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lissajous/Lissajous.html

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Courbes cycloïdales

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_cycloides/cycloides0.html

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Présentation Maple

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation_maple_html/presentation_maple0.html

Notions à retenir

- Application/fonction
  - ⋆ Détermination de l'ensemble de définition
  - ⋆ Calculs par composition
- Injection/surjection/bijection
  - ⋆ Maîtrise de ces notions
  - ⋆ Détermination de la réciproque
- Fonctions réelles
  - ⋆ Analyse qualitative des variations
  - ⋆ Tracé de graphes
  - ⋆ Identification de symétries

Annexe
Illustration de la réciprocité

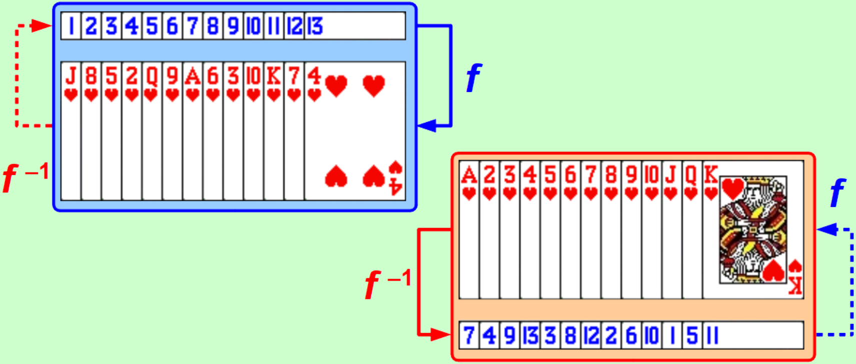
Sommaire

Exemple A.1 (Jeu de cartes)

Considérons un jeu de cartes identifiées par les valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_N$ et notons f la correspondance entre **positions** de cartes numérotées de 1 à N et **valeurs** de cartes.

On définit ainsi une **bijection** $f : \{1, 2, \ldots, N\} \longrightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$.

Le nombre $f(i)$ indique la **valeur** de la carte située en **position n° i**
alors que $f^{-1}(v_j)$ indique la **position** de la carte de **valeur v_j**.



Dans cet exemple, $f : \{1, 2, \ldots, 13\} \longrightarrow \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}$.

Exemple A.2 (Le code génétique)

- Le code génétique est un ensemble de règles permettant de **traduire** les informations contenues dans le génome des cellules vivantes afin de synthétiser les protéines. Il établit une correspondance entre le **génotype** et le **phénotype** d'un organisme, soit, entre d'une part, des **triplets de nucléotides**, appelés **codons**, sur l'ARN messager et d'autre part, les **acides aminés** protéinogènes incorporés dans les protéines synthétisées lors de la phase de **traduction** de l'ARN messager par les ribosomes.

- Un **ARN** est une molécule constituée de nucléotides de quatre types :

  adénine (A), **cytosine** (C), **guanine** (G), **uracile** (U).

  Les différents **acides aminés** sont listés dans le tableau ci-dessous :

Acide aminé	Symbole
Alanine	**A**
Cystéine	**C**
Acide aspartique	**D**
Acide glutamique	**E**
Phénylalanine	**F**
Glycine	**G**
Histidine	**H**
Isoleucine	**I**
Lysine	**K**
Leucine	**L**

Acide aminé	Symbole
Méthionine	**M**
Asparagine	**N**
Proline	**P**
Glutamine	**Q**
Arginine	**R**
Sérine	**S**
Thréonine	**T**
Valine	**V**
Tryptophane	**W**
Tyrosine	**Y**

On introduit alors les ensembles $\mathcal{A} = \{A, C, G, U\}$ et

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Y}, *\}$$

le symbole $*$ désignant un codon de ***«terminaison»*** (codon STOP).

Exemple A.2 (Le code génétique)

La phase de traduction peut être représentée par la correspondance

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{A}^3 = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (A_1, A_2, A_3) & \longmapsto & A_1A_2A_3 \end{array}$$

1re base \ 2e base	A		C		G		U		3e base
A	AAA	K	ACA	T	AGA	R	AUA	I	A
	AAC	N	ACC	T	AGC	S	AUC	I	C
	AAG	K	ACG	T	AGG	R	AUG	M	G
	AAU	N	ACU	T	AGU	S	AUU	I	U
C	CAA	Q	CCA	P	CGA	R	CUA	L	A
	CAC	H	CCC	P	CGC	R	CUC	L	C
	CAG	Q	CCG	P	CGG	R	CUG	L	G
	CAU	H	CCU	P	CGU	R	CUU	L	U
G	GAA	E	GCA	A	GGA	G	GUA	V	A
	GAC	D	GCC	A	GGC	G	GUC	V	C
	GAG	E	GCG	A	GGG	G	GUG	V	G
	GAU	D	GCU	A	GGU	G	GUU	V	U
U	UAA	*	UCA	S	UGA	*	UUA	L	A
	UAC	Y	UCC	S	UGC	C	UUC	F	C
	UAG	*	UCG	S	UGG	W	UUG	L	G
	UAU	Y	UCU	S	UGU	C	UUU	F	U

Exemple A.2 (Le code génétique)

- f est une **application** : un codon code l'information pour exactement un acide aminé, on dit que le code génétique est ***« cohérent »*** ou ***« non ambigu »***;
- f est **surjective** : par définition, tous les acides aminés sont codés à l'aide de codons;
- Tableau des antécédents des acides aminés par f :

Symbole	Codons
A	*GCU, GCC, GCA, GCG*
C	*UGU, UGC*
D	*GAU, GAC*
E	*GAA, GAG*
F	*UUU, UUC*
G	*GGU, GGC, GGA, GGG*
H	*CAU, CAC*
I	*AUU, AUC, AUA*
K	*AAA, AAG*
L	*UUA, UUG, CUU, CUC, CUA, CUG*

Symbole	Codons
M	*AUG*
N	*AAU, AAC*
P	*CCU, CCC, CCA, CCG*
Q	*CAA, CAG*
R	*CGU, CGC, CGA, CGG, AGA, AGG*
S	*UCU, UCC, UCA, UCG, AGU, AGC*
T	*ACU, ACC, ACA, ACG*
V	*GUU, GUC, GUA, GUG*
W	*UGG*
Y	*UAU, UAC*
$*$	*UAG, UAA, UGA*

Par exemple, les antécédents de l'alanine, l'arginine et l'asparagine sont donnés par

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{A}) &= \{(G, C, U), (G, C, C), (G, C, A), (G, C, G)\} \\ f^{-1}(\mathbf{R}) &= \{(C, G, U), (C, G, C), (C, G, A), (C, G, G), (A, G, A), (A, G, G)\} \\ f^{-1}(\mathbf{N}) &= \{(A, A, U), (A, A, C)\} \end{aligned}$$

- f **n'est pas injective** : on dit que le code génétique est ***« redondant »*** ou ***« dégénéré »***.

Exemple A.3 (L'hôtel infini de Hilbert)

Petite incursion dans le monde de l'infini : le **« Grand Hôtel Infini »** affiche « complet » pour la nuit (i.e. chaque chambre est occupée par un client).

- Les chambres sont numérotées par les nombres $1, 2, 3, \ldots$

  Arrive un nouveau client.

  « — Pas de problème ! »

  lui répond le gérant de l'hôtel.

  « — Installez-vous dans la chambre n° 1.
  Je demande au client de la chambre n° 1 de passer dans la chambre n° 2, à celui de la chambre n° 2 de passer dans la chambre n° 3, etc. ».

  L'accueil dispose bien sûr d'un téléphone spécial qui permet de téléphoner simultanément à toutes les chambres en demandant au client de la chambre n° n de passer dans la n° $(n+1)$... Le nouveau client a ainsi pu être reçu.

Modélisation :

- les chambres de l'hôtel sont numérotées $1, 2, 3, \ldots$;
- les clients de l'hôtel sont numérotées $1, 2, 3, \ldots$ et le nouveau client est numéroté 0.
- $\mathbb{N}$ représente l'ensemble des clients, $\mathbb{N}^*$ celui des chambres.
- L'attribution des chambres repose sur la bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ définie par
$$n \longmapsto n+1.$$

Exemple A.3 (L'hôtel infini de Hilbert)

Petite incursion dans le monde de l'infini : le **« Grand Hôtel Infini »** affiche « complet » pour la nuit (i.e. chaque chambre est occupée par un client).

- Les chambres sont à présent numérotées par les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots$

  Dix minutes plus tard arrive un car (**infini**, bien sûr !) de nouveaux clients qui demandent à passer la nuit dans l'hôtel.

  « — Pas de problème !! »

  répond le gérant au chauffeur du car, et en utilisant de nouveau son fameux téléphone :

  « — Je demande au client de la chambre n° n de passer dans la n° (2n). »

  Il indique alors au chauffeur du car la consigne :

  « — Le passager n° i du car peut disposer de la chambre n° (2i–1). »

  (Laquelle est effectivement libre, toutes les chambres de n° impair ayant été libérées.)

Modélisation :

- les chambres de l'hôtel sont numérotées $0, 1, 2, 3, \ldots$;
- les clients de l'hôtel sont numérotées $0, 1, 2, 3, \ldots$ et les nouveaux clients sont numérotés $-1, -2, -3, \ldots$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ représente l'ensemble de tous les clients, $\mathbb{N}$ celui des chambres.
- L'attribution des chambres repose sur la bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$ définie par

$$n \longmapsto \begin{cases} 2n \text{ si } n \geqslant 0, \\ 2|n| - 1 \text{ si } n \leqslant -1. \end{cases}$$

Exemple A.3 (L'hôtel infini de Hilbert)

Petite incursion dans le monde de l'infini : le **« Grand Hôtel Infini »** affiche « complet » pour la nuit (i.e. chaque chambre est occupée par un client).

- Les chambres sont toujours numérotées par les nombres $0, 1, 2, 3, \dots$

  Une demi-heure plus tard arrive un groupe quelque peu plus important constitué d'une **infinité** de cars, chacun ayant à leur bord une **infinité** de passagers.

  « — Pas de problème, je vous arrange ça !!! »

  répond le responsable de l'accueil décidément très arrangeant...

  « — Je téléphone au client de la chambre n° n lui demandant de passer dans la chambre n° (2n+1). »

  (Ce qui libère toutes les chambres de n° pair.)
  Puis il donne la consigne suivante au responsable du groupe d'autocars :

  « — Le passager n° i du bus n° j devra occuper la chambre n° $2^j(2i–1)$. »

Modélisation :

- les chambres de l'hôtel sont numérotées $0, 1, 2, 3, \dots$;
- les clients de l'hôtel sont numérotées $0, 1, 2, 3, \dots$ et les voyageurs sont identifiés par le n° $1, 2, 3, \dots$ de leur car de transport et le n° $0, 1, 2, 3, \dots$ de leur place à l'intérieur.

- $\mathbb{N}$ représente l'ensemble des chambres, $\mathbb{N} \times \{0\}$ celui des clients de l'hôtel, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ celui des passagers des bus.
- L'attribution des chambres repose sur la bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ définie par
$$(i, j) \longmapsto 2^j(2i + 1).$$

Exemple A.3 (L'hôtel infini de Hilbert)

Petite incursion dans le monde de l'infini : le **« Grand Hôtel Infini »** affiche « complet » pour la nuit (i.e. chaque chambre est occupée par un client).

Moralité :

Dans tous les cas,
tout se passe bien, tout le monde est logé,
jamais deux voyageurs différents
ne se sont vu attribuer la même chambre...
*...et le **« Grand Hôtel Infini »** affiche toujours complet !*

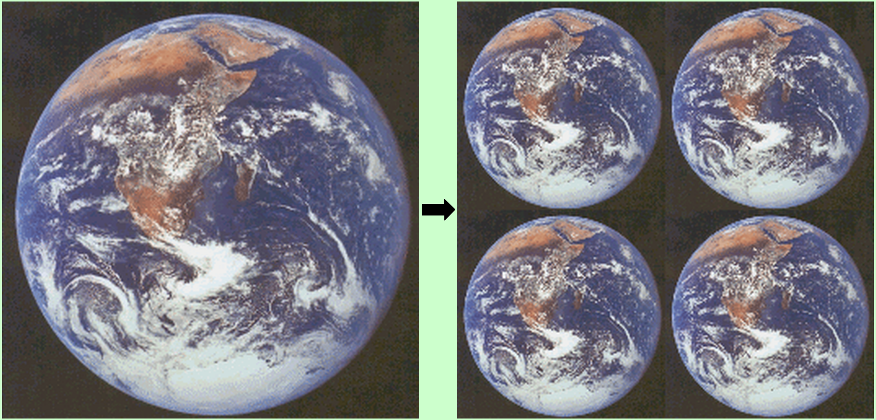
Explication :
Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont **équipotents**, c'est-à-dire en bijection.

Bien que $\mathbb{Z}$ semble contenir « deux fois plus » de nombres que $\mathbb{N}$, et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ « infiniment plus » de nombres que $\mathbb{N}$, en fait les trois ensembles contiennent la « même infinité » de nombres... C'est l'**« infini dénombrable »**.

Remarque : $\mathbb{Q}$ est également équipotent à $\mathbb{N}$...
Mais pas $\mathbb{R}$ qui contient réellement « infiniment plus » de nombres que $\mathbb{N}$!

Exemple A.4 (Transformation du photomaton)

La **transformation du photomaton** consiste à **quadrupliquer** une image en quatre autres images identiques (en apparence) de taille réduite.



Exemple A.4 (Transformation du photomaton)

La **transformation du photomaton** consiste à **quadrupliquer** une image en quatre autres images identiques (en apparence) de taille réduite.

Une image est un tableau rectangulaire composé de pixels, chaque pixel est reperé par sa position (i, j) dans ce tableau, i étant le numéro de ligne, j celui de colonne.

Considérons une image de taille $2p \times 2q$, p et q étant des naturels fixés.
$2p$ est sa hauteur et $2q$ sa largeur.
Le procédé de **quadruplication** consiste à déplacer chaque pixel dans le tableau selon la parité de ses indices de position i et j.
Ce processus peut s'exécuter en prenant des sous-carrés consécutifs de taille 2×2.

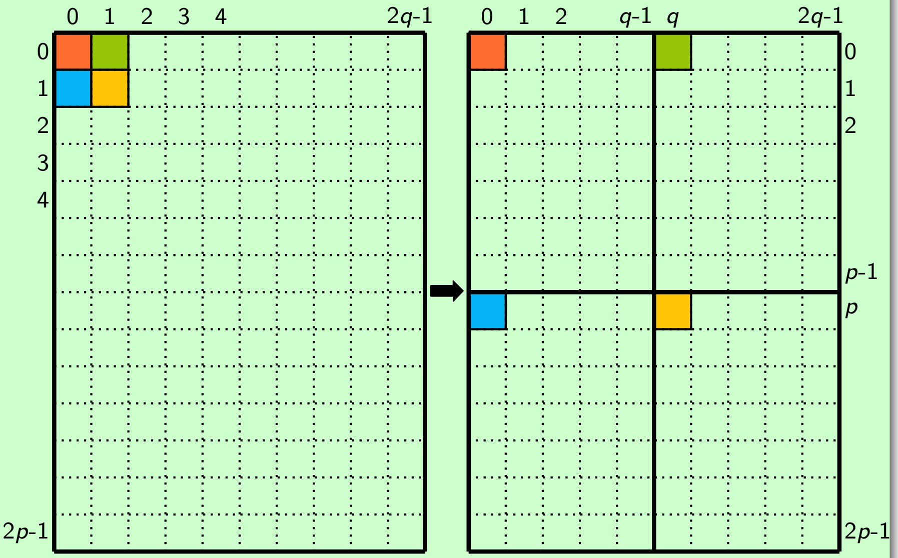
La **transformation du photomaton** peut se décrire par l'application

$$\varphi : [\![0, 2p-1]\!] \times [\![0, 2q-1]\!] \longrightarrow [\![0, 2p-1]\!] \times [\![0, 2q-1]\!]$$

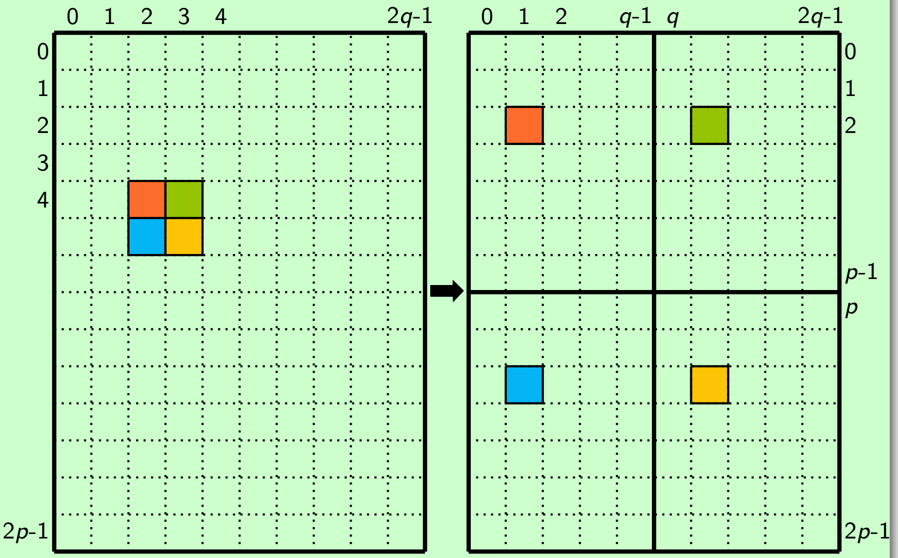
définie selon

$$(i, j) \longmapsto \begin{cases} \left(\dfrac{i}{2}, \dfrac{j}{2}\right) & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont } \textbf{pairs} \\ \left(\dfrac{i}{2}, q + \dfrac{j-1}{2}\right) & \text{si } i \text{ est } \textbf{pair} \text{ et } j \textbf{ impair} \\ \left(p + \dfrac{i-1}{2}, \dfrac{j}{2}\right) & \text{si } i \text{ est } \textbf{impair} \text{ et } j \textbf{ pair} \\ \left(p + \dfrac{i-1}{2}, q + \dfrac{j-1}{2}\right) & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont } \textbf{impairs} \end{cases}$$

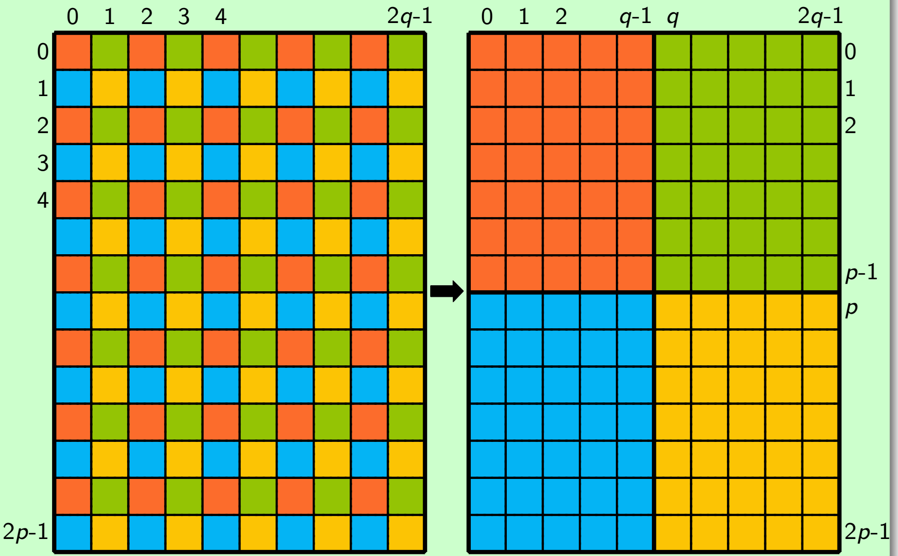
Exemple A.4 (Transformation du photomaton)



Exemple A.4 (Transformation du photomaton)



Exemple A.4 (Transformation du photomaton)



Exemple A.4 (Transformation du photomaton)

La transformation du photomaton inverse est décrite par l'application réciproque

$$\varphi^{-1} : [\![0, 2p-1]\!] \times [\![0, 2q-1]\!] \longrightarrow [\![0, 2p-1]\!] \times [\![0, 2q-1]\!].$$

Elle est définie selon

$$(i, j) \longmapsto \begin{cases} (2i, 2j) & \text{si } i \leqslant p-1 \text{ et } j \leqslant q-1 \\ (2i, 2j-2q+1) & \text{si } i \leqslant p-1 \text{ et } j \geqslant q \\ (2i-2p+1, 2j) & \text{si } i \geqslant p \text{ et } j \leqslant q-1 \\ (2i-2p+1, 2j-2q+1) & \text{si } i \geqslant p \text{ et } j \geqslant q \end{cases}$$

Elle répartit les pixels de chacun des quadrants alternativement sur chaque ligne et chaque colonne. Les quatre quadrants se retrouvent superposés et d'apparence dilatée.

Exemple A.4 (Transformation du photomaton)

La transformation du photomaton inverse est décrite par l'application réciproque

$$\varphi^{-1} : [\![0, 2p-1]\!] \times [\![0, 2q-1]\!] \longrightarrow [\![0, 2p-1]\!] \times [\![0, 2q-1]\!].$$