

Fonctions usuelles

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

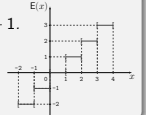
Sommaire

- 1 Fonction partie entière
- 2 Fonctions log/exp/puissances
 - Fonctions logarithmes
 - Fonctions exponentielles
 - Fonctions puissances
- 3 Fonctions trigonométriques
 - Fonction tangente
 - Fonction arcsin
 - Fonction arccos
 - Fonction arctan
 - Exemples
- 4 Fonctions hyperboliques
 - Définition/Variations
 - Graphes
 - Interprétation géométrique

1. Fonction partie entière

Théorème-définition 1.1 (Partie entière)

Pour tout réel x , il existe un **unique entier** n tel que $n \leq x < n + 1$.
Cet entier est appelé **partie entière** du réel x , il est noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x .



Proposition 1.2 (Propriétés)

Soit x un nombre réel. On a :

- 1 $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leq x$;
- 2 $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$;
- 3 $\forall n \in \mathbb{Z}, E(x + n) = E(x) + n$.

Exemple 1.3 (Partie entière et décimales (facultatif))

Soit x un réel **positif** et $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ son **écriture décimale propre** (a_0 étant un naturel et a_1, a_2, a_3, \dots des chiffres ne contenant pas de suite infinie de 9). Alors

- le nombre a_0 est la **partie entière** de x : $a_0 = E(x)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n^{e} décimale de x s'obtient selon $a_n = E(10^n x) - 10E(10^{n-1} x)$.

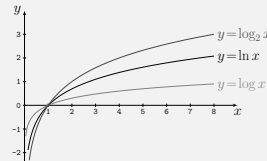
2. Fonctions log/exp/puissances

a) Fonctions logarithmes

Définition 2.1 (Fonctions logarithmes)

Soit a et b des réels strictement positifs, b étant différent de 1.

On note $\log_b(a)$ (et on lit : « log de a en base b ») le nombre $\frac{\ln a}{\ln b}$.



Cas particuliers :

- lorsque $b = e$, \log_e est la **logarithme népérien**;
- lorsque $b = 2$, \log_2 est appelé **logarithme binaire** (utilisé notamment en informatique, théorie de l'information...);
- lorsque $b = 10$, \log_{10} est appelé **logarithme décimal** (noté simplement \log , utilisé notamment en chimie (pH), acoustique (décibel)...).

Proposition 2.2 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs, tout réel b strictement positif différent de 1 et tout entier relatif n , on a :

- $\log_b(aa') = \log_b a + \log_b a'$
- $\log_b\left(\frac{a}{a'}\right) = \log_b a - \log_b a'$
- $\log_b(a^n) = n \log_b a$

2. Fonctions log/exp/puissances

b) Fonctions exponentielles

Définition 2.3 (Exponentiation)

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque.
On note a^b (et on lit : « a exposant b ») le nombre positif $e^{b \ln a}$.

Proposition 2.4 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs et tous réels b et b' , on a :

- $\ln(a^b) = b \ln a$
- $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ et $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$
- $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$ et $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ et $a^{-b} = \frac{1}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$

En particulier, pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n non nul, on retrouve $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Remarque 2.5 (Exponentiation en chaîne)

L'exponentiation n'est **ni commutative ni associative** :
en général on a $a^b \neq b^a$ et $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$.

2. Fonctions log/exp/puissances

b) Fonctions exponentielles

Définition 2.6 (Fonctions exponentielles)

Soit a un réel strictement positif. On appelle **fonction exponentielle de base a** l'application de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$, notée \exp_a , définie par $\exp_a(x) = a^x$.

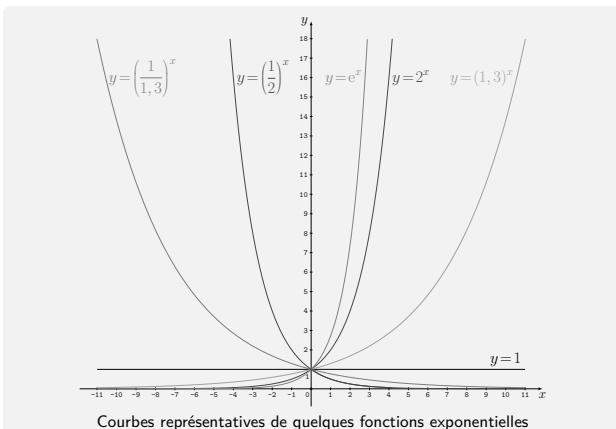
Proposition 2.7 (Propriétés)

Soit a un réel strictement positif et \exp_a la fonction exponentielle de base a .

- 1 \exp_a est **dérivable** sur \mathbb{R} de dérivée $\exp_a : x \mapsto (\ln a)a^x$.
- 2 Pour $0 < a < 1$, \exp_a est **strictement décroissante** sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0$.
- 3 Pour $a > 1$, \exp_a est **strictement croissante** sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = +\infty$.
- 4 Les courbes de \exp_a et $\exp_{\frac{1}{a}}$ sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

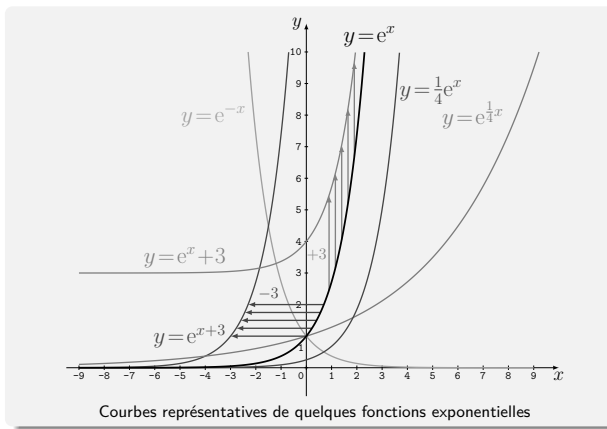
2. Fonctions log/exp/puissances

b) Fonctions exponentielles



2. Fonctions log/exp/puissances

b) Fonctions exponentielles



2. Fonctions log/exp/puissances

c) Fonctions puissances

Définition 2.8 (Fonctions puissances)

Soit a un réel quelconque. On appelle **fonction puissance d'exposant a** l'application de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$ associe le réel x^a .

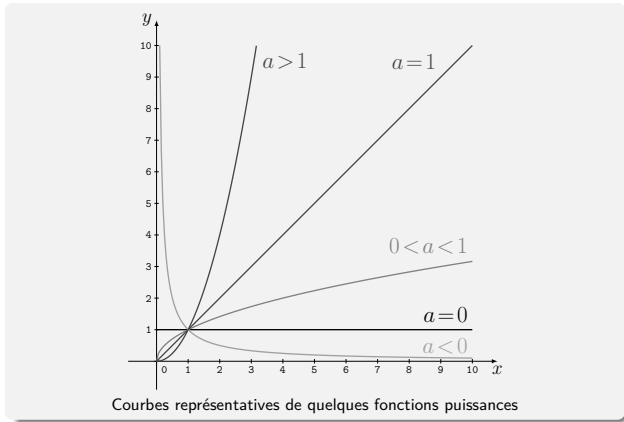
Proposition 2.9 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant a est :

- 1 **dérivable** sur $]0, +\infty[$ de fonction dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$;
- 2 **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$ si $a > 0$ avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$;
- 3 **strictement décroissante** sur $]0, +\infty[$ si $a < 0$ avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$;
- 4 **bijective** lorsque $a \neq 0$ de réciproque la fonction puissance d'exposant $\frac{1}{a}$.

Remarque 2.10 (Extension (facultatif))

Pour tout entier **impair** n , la fonction puissance d'exposant n peut se prolonger en une bijection définie de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , ce qui permet de définir la fonction puissance d'exposant $\frac{1}{n}$ sur \mathbb{R} comme réciproque. En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^{\frac{1}{n}} = -x^{\frac{1}{n}}$.
Plus généralement, on peut définir pour tout rationnel de la forme $\frac{p}{2q+1}$ où p et q sont deux entiers, la fonction puissance d'exposant $\frac{p}{2q+1}$ selon $\forall x \in \mathbb{R}, x^{\frac{p}{2q+1}} = (x^{\frac{1}{2q+1}})^p$.



Définition 3.1 (Fonction tangente)

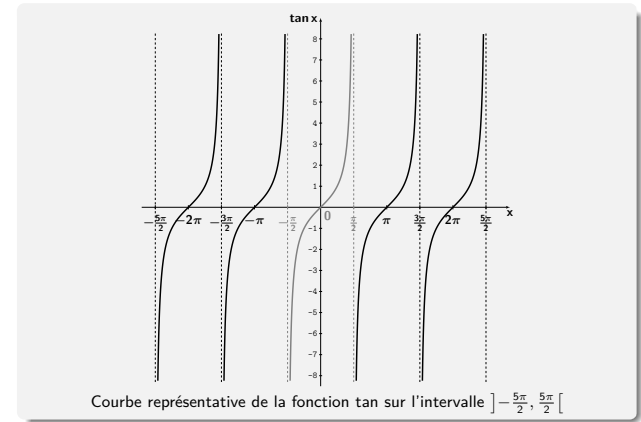
La fonction tangente est l'application notée **tan** qui va de

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par } \forall x \in D_{\tan}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

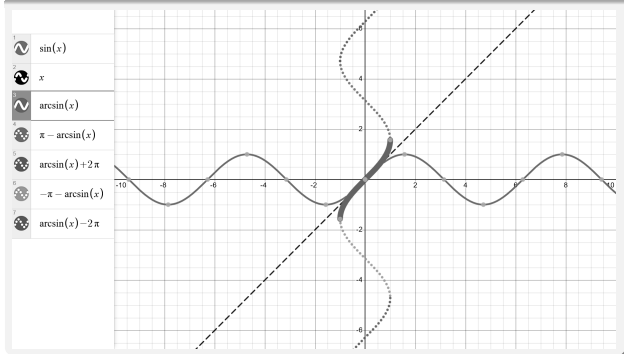
Proposition 3.2 (Propriétés)

- 1 La fonction tan est **impaire** et **π -périodique**.
- 2 La fonction tan est **dérivable** sur D_{\tan} , de dérivée :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$
- 3 La fonction tan est **strictement croissante** sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- 4 $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.



Prologue : à partir d'une sinusoïde horizontale...



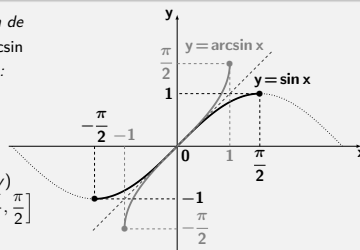
Proposition 3.3 (Fonction arcsin)

La fonction sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$ et l'on note arcsin sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \mapsto \arcsin(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



Proposition 3.4

- 1 arcsin est **continue, strictement croissante** et **impaire** sur $[-1, 1]$.
- 2 $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x$
- 3 arcsin est **dérivable** sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 4 $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$

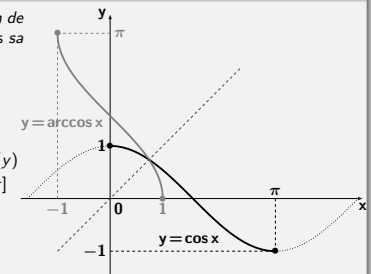
Proposition 3.5 (Fonction arccos)

La fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et l'on note arccos sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$



Proposition 3.6

- 1 arccos est **continue, strictement décroissante** sur $[-1, 1]$.
- 2 $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$
- 3 arccos est **dérivable** sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 4 $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x$
- 5 $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

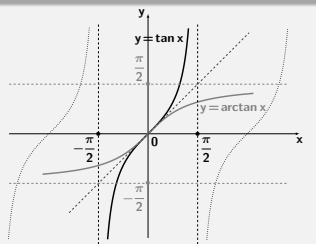
Proposition 3.7 (Fonction arctan)

La fonction tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} et l'on note arctan sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x \mapsto \arctan(x)$$

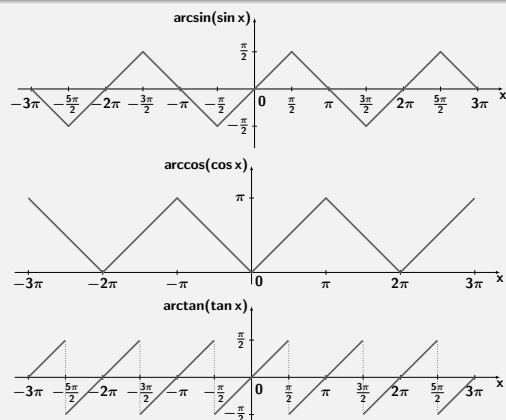
$$\text{et } \begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$



Proposition 3.8

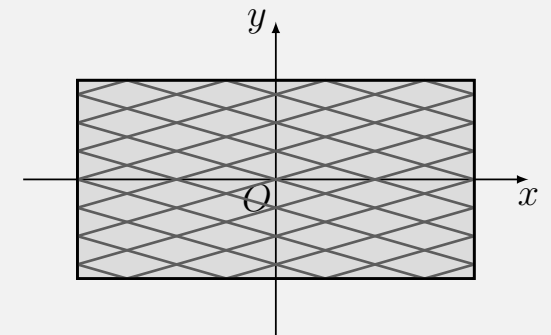
- 1 arctan est **continue, strictement croissante** et **impaire** sur \mathbb{R} .
- 2 $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$
- 3 arctan est **dérivable** sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- 4 $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exemple 3.9 (Courbes en « dents de scie » (facultatif))



Exemple 3.10 (Billard rectangulaire (facultatif))

Courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 2 \arcsin(\sin(7t)) \\ y(t) = \arcsin(\sin(4t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

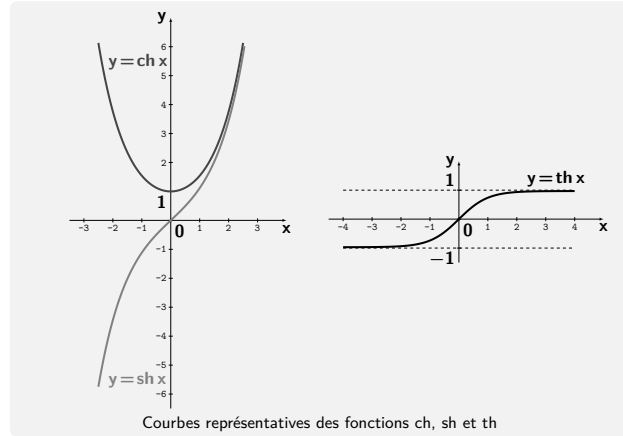


Définition 4.1 (Fonctions hyperboliques)

- 1 On appelle **fonction cosinus hyperbolique**, notée ch (ou cosh), l'application de \mathbb{R} dans $[1, +\infty[$ qui à tout réel x associe le réel $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- 2 On appelle **fonction sinus hyperbolique**, notée sh (ou sinh), l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout réel x associe le réel $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- 3 On appelle **fonction tangente hyperbolique**, notée th (ou tanh), l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à tout réel x associe le réel $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

Proposition 4.2 (Parité/Variations)

- 1 La fonction ch est **paire** et **dérivable** sur \mathbb{R} de dérivée $\text{ch}' = \text{sh}$.
- 2 La fonction sh est **impaire** et **dérivable** sur \mathbb{R} de dérivée $\text{sh}' = \text{ch}$.
- 3 La fonction th est **impaire** et **dérivable** sur \mathbb{R} de dérivée $\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}$.
- 4 La fonction ch est **strictement décroissante** sur \mathbb{R}_- , **strictement croissante** sur \mathbb{R}_+ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$.
- 5 La fonction sh est **strictement croissante** sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$.
- 6 La fonction th est **strictement croissante** sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$.



Courbes représentatives des fonctions ch , sh et th

Proposition 4.3 (Pourquoi les termes « cosinus » et « sinus » dans ch et sh ?)

- 1 Pour tous réels a et b : $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$.
- 2 Pour tous réels a et b : $\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{ch}(a)\text{sh}(b)$.
- 3 Pour tout réel a : $\text{ch}^2(a) - \text{sh}^2(a) = 1$.

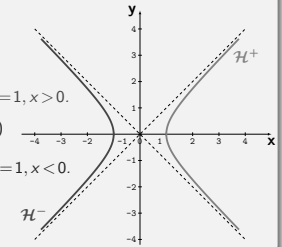
« Explication » : pour tout réel a : $\text{ch}(a) = \cos(ia)$ et $\text{sh}(a) = -i \sin(ia)$...

Proposition 4.4 (Pourquoi le terme « hyperbolique » dans ch et sh ?)

La courbe paramétrée $F^+ : t \mapsto (\text{ch}(t), \text{sh}(t))$ définie sur \mathbb{R} a pour support la branche d'hyperbole \mathcal{H}^+ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1, x > 0$.

La courbe paramétrée $F^- : t \mapsto (-\text{ch}(t), \text{sh}(t))$ définie sur \mathbb{R} a pour support la branche d'hyperbole \mathcal{H}^- d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1, x < 0$.

L'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ est la réunion des deux branches \mathcal{H}^- et \mathcal{H}^+ .



La chaînette dans la nature...



INSA NOTIUM NATIONALIUM INGENIERUM UNIVERSITATIS LYONENSIS

Courbes de Lissajous

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lissajous/Lissajous.html

INSA NOTIUM NATIONALIUM INGENIERUM UNIVERSITATIS LYONENSIS

Courbes cycloïdales

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_cycloides/cycloides0.html

INSA NOTIUM NATIONALIUM INGENIERUM UNIVERSITATIS LYONENSIS

Trigonométrie

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_trigonometrie.pdf

INSA NOTIUM NATIONALIUM INGENIERUM UNIVERSITATIS LYONENSIS

Présentation Maple

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation_maple_html/presentation_maple0.html

Notions à retenir

- Fonctions usuelles
 - * partie entière
 - * logarithmes
 - * exponentielles
 - * puissances
 - * trigonométriques (tan, arcsin, arccos, arctan)
 - * hyperboliques

Annexes

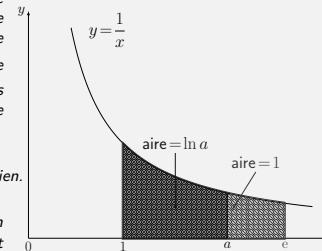
- Fonctions \ln/\exp
- Trigonométrie

Définition A.1 (Fonction logarithme népérien)

Pour tout réel strictement positif a , on appelle **logarithme naturel** ou encore **logarithme népérien** de a le nombre noté $\ln a$ égal à l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$ dans un repère orthonormal.

On note e le nombre tel que $\ln e = 1$. e est appelé **base** du logarithme népérien. Numériquement : $e = 2,7182818 \dots$

Cette quantité définit une application $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout réel strictement positif : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.



Proposition A.2 (Propriétés)

Pour tous réels x et x' strictement positifs et tout entier relatif n , on a :

- $\ln(xx') = \ln x + \ln x'$
- $\ln\left(\frac{x}{x'}\right) = \ln x - \ln x'$
- $\ln(x^n) = n \ln x$

Définition A.3 (Fonction exponentielle)

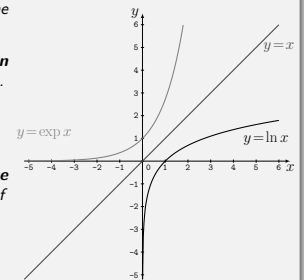
La fonction **logarithme népérien** définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .

Sa bijection réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.

On note aussi $\exp(x) = e^x$.

On a pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$.

On peut démontrer que \exp est l'**unique solution** f de l'équation différentielle $f' = f$ vérifiant la **condition initiale** $f(0) = 1$.



Proposition A.4 (Propriétés)

Pour tous réels x et x' et tout entier relatif n , on a :

- $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$
- $e^{x-x'} = \frac{e^x}{e^{x'}}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

A. Fonctions ln/exp | **b) Fonction exponentielle**

Définition A.5 (Exponentielle complexe)
 Soit x, y deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $x + iy$ selon $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

Proposition A.6 (Propriétés)
 Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier n , on a :

- $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ et $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$ et $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

En particulier, pour tout nombre réel θ et tout nombre entier n , on a (formule de de Moivre) :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ ou encore } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Exemple A.7 (Onde sinusoïdale amortie)
 Une **onde sinusoïdale amortie** peut être modélisée par une fonction de la forme $t \mapsto e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$, $\alpha > 0$ désignant un coefficient d'amortissement et $\omega > 0$ la pulsation de l'onde.
 Il peut être judicieux de l'interpréter comme la partie réelle ou imaginaire de la fonction complexe $t \mapsto e^{(-\alpha+i\omega)t}$.

B. Fonctions trigonométriques | **a) Triangle rectangle**

Définition B.1 (Sinus, Cosinus, Tangente)
 On considère un triangle ABC rectangle en B. On note $\hat{A} = (\widehat{AB}, \widehat{AC})$.

- Le **Sinus** est le rapport du côté « Opposé » à l'« Hypoténuse ».
- Le **Cosinus** est le rapport du côté « Adjacent » à l'« Hypoténuse ».
- La **Tangente** est le rapport du côté « Opposé » au côté « Adjacent ».

On note : $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$ $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$ $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

B. Fonctions trigonométriques | **b) Cercle trigonométrique**

Proposition B.2 (Cercle trigonométrique)

Sur le cercle de centre O et de rayon 1 :

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = 1$$

$$\overline{OH} = \cos \theta \quad \overline{OK} = \sin \theta$$

Sur les tangentes T et T' :

$$\overline{AT} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\overline{BT'} = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

Le point M a pour coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

B. Fonctions trigonométriques | **c) Angles**

Définition B.3 (Radian)
 Le **radian** est la mesure d'un angle interceptant sur la circonférence d'un cercle centré au point d'intersection des demi-droites délimitant le secteur angulaire, un arc d'une longueur égale au rayon.

Quelques valeurs remarquables

θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

B. Fonctions trigonométriques | **c) Angles**

Valeurs remarquables

B. Fonctions trigonométriques | **d) Fonctions cosinus/sinus**

Définition B.4 (Fonctions cosinus et sinus)
 Les quantités trigonométriques **cos** et **sin** définissent des **fonctions trigonométriques** sur \mathbb{R} dont voici les graphes.

— fonction cosinus
 — fonction sinus

B. Fonctions trigonométriques | **d) Fonctions cosinus/sinus**

Définition B.4 (Fonctions cosinus et sinus)
 Les quantités trigonométriques **cos** et **sin** définissent des **fonctions trigonométriques** sur \mathbb{R} dont voici les graphes.

— fonction cosinus
 — fonction sinus

B. Fonctions trigonométriques | **e) Formulaire**

Symétries/rotations élémentaires

angles **opposés** (symétrie par rapport à Ox)
 $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
 cos : fonction **paire** sin : fonction **impaire**

angles **supplémentaires** (symétrie par rapport à Oy)
 $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

demi-tour (symétrie par rapport à O)
 $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$

angles **complémentaires** (symétrie par rapport à $x=y$)
 $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$

quart de tour (rotation d'angle droit)
 $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta)$ $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta)$

B. Fonctions trigonométriques | **e) Formulaire**

Formulaire 1 (Somme des angles)
 Pour tous réels θ et φ :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) - \cos(\theta)\sin(\varphi)$$

En particulier :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

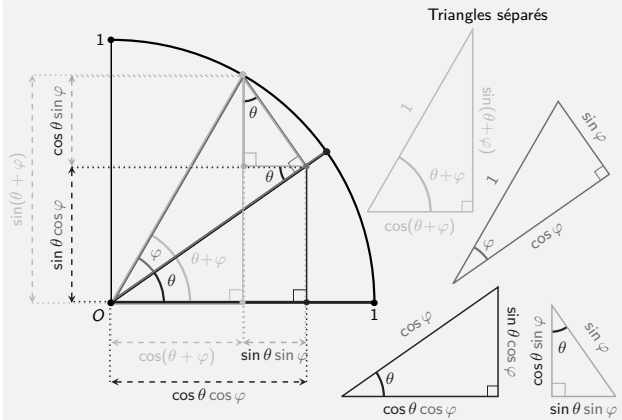
$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Exemple B.5
 Partant de $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ avec $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on tire :

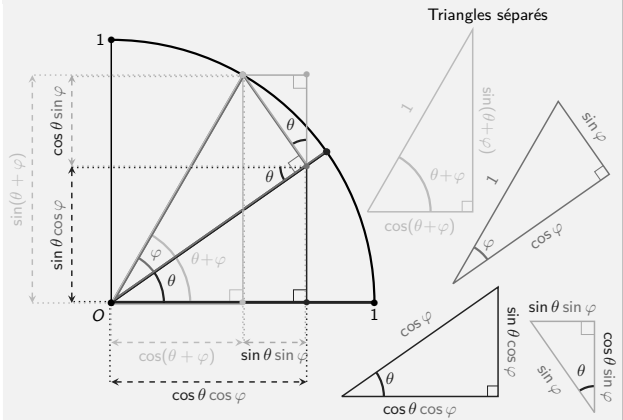
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

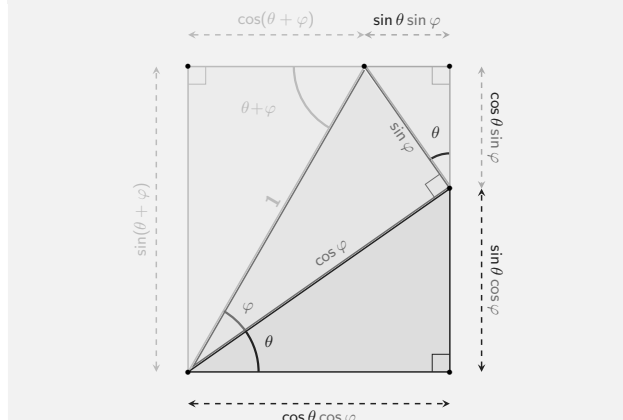
Explication : $\cos(\theta + \varphi)$ et $\sin(\theta + \varphi)$



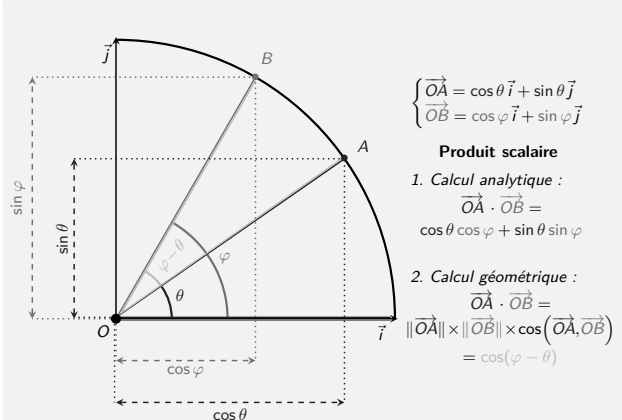
Explication : $\cos(\theta + \varphi)$ et $\sin(\theta + \varphi)$ (variante)



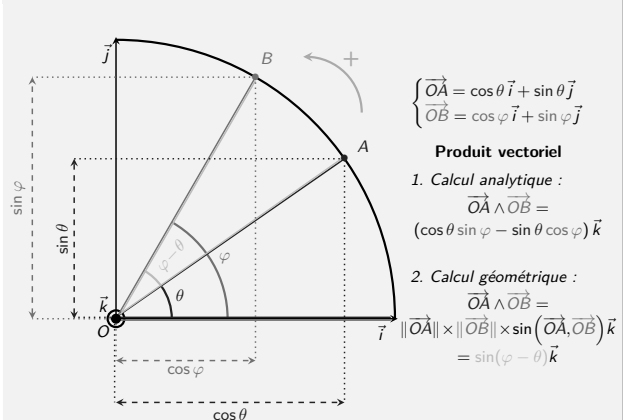
Explication : $\cos(\theta + \varphi)$ et $\sin(\theta + \varphi)$ (résumé)



Explication : $\cos(\varphi - \theta)$ et $\sin(\varphi - \theta)$



Explication : $\cos(\varphi - \theta)$ et $\sin(\varphi - \theta)$



Définition B.6 (Exponentielle complexe)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Proposition B.7 (Formulaire via les complexes)

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \times e^{i\varphi}$$

En particulier, pour tout nombre réel θ et tout nombre entier n , on a (formule de de Moivre) :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ ou encore } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

En effet : $e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)$
 $= (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)$
 $= \cos \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi) + i \sin \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi)$
 $= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
 $= e^{i\theta} \times e^{i\varphi}$

Exemple B.8

La formule de de Moivre donne :

- pour $n = 3$: $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ et $\sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$;
- pour $n = 4$: $\cos(4\theta) = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$ et $\sin(4\theta) = 4 \sin \theta (2 \cos^2 \theta - \cos \theta)$.

Formulaire 2 (Produit de sinus/cosinus (facultatif))

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos \varphi &= \frac{1}{2} [\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi)] \\ \sin \theta \sin \varphi &= \frac{1}{2} [\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)] \\ \sin \theta \cos \varphi &= \frac{1}{2} [\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)] \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{aligned}$$

En effet : en ajoutant ou soustrayant $\cos(\theta + \varphi)$ et $\cos(\theta - \varphi)$,

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \\ \cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) &= 2 \cos \theta \cos \varphi \\ \cos(\theta + \varphi) - \cos(\theta - \varphi) &= -2 \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

Formulaire 3 (Somme de sinus/cosinus (facultatif))

$$\begin{aligned} \cos \theta + \cos \varphi &= 2 \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \\ \cos \theta - \cos \varphi &= -2 \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \\ \sin \theta + \sin \varphi &= 2 \sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \\ \sin \theta - \sin \varphi &= 2 \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

En effet : on part de $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$.

Pour $\alpha = \frac{\theta + \varphi}{2}$ et $\beta = \frac{\theta - \varphi}{2}$, on a $\alpha + \beta = \theta$ et $\alpha - \beta = \varphi$,

et l'on trouve $\cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$.

Formulaire 4 (Tangente (facultatif))

$$\begin{aligned} \tan(-\theta) &= -\tan \theta & \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\frac{1}{\tan \theta} \\ \tan(\pi + \theta) &= \tan \theta & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{1}{\tan \theta} \\ \tan(\pi - \theta) &= -\tan \theta & \cos \theta &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ \tan(\theta + \varphi) &= \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi} & \cos \theta &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ \tan(\theta - \varphi) &= \frac{\tan \theta - \tan \varphi}{1 + \tan \theta \tan \varphi} & \sin \theta &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ \tan(2\theta) &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} & \tan \theta &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \tan(\theta + \varphi) &= \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\cos(\theta + \varphi)} = \frac{\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi}{\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}{1 - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta \cos \varphi}} = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi} \end{aligned}$$

Proposition B.9 (Dérivation)

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) \quad \sin'(\theta) = \cos(\theta)$$

Explication heuristique

