INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Fonctions usuelles

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

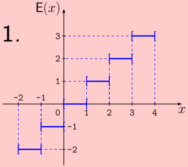
Sommaire

Sommaire

Théorème-définition 1.1 (Partie entière)

*Pour tout réel x, il existe un **unique entier** n tel que $n \leqslant x < n+1$.*

*Cet entier est appelé **partie entière** du réel x, il est noté $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x.*



Proposition 1.2 (Propriétés)

Soit x un nombre réel. On a :

1. $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$ *et* $x-1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$;
2. $\mathrm{E}(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$;
3. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x)+n$.

Exemple 1.3 (Partie entière et décimales (facultatif))

Soit x un réel **positif** et $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ son **écriture décimale propre** (a_0 étant un naturel et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des chiffres ne contenant pas de suite infinie de 9). Alors

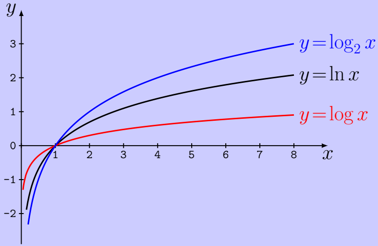
- le nombre a_0 est la **partie entière** de x : $a_0 = \mathrm{E}(x)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n^{e} décimale de x s'obtient selon
$$a_n = \mathrm{E}\big(10^n x\big) - 10\,\mathrm{E}\big(10^{n-1} x\big).$$

Sommaire

Définition 2.1 (Fonctions logarithmes)

*Soit a et b des réels strictement positifs, b étant **différent de 1**.*

On note $\log_b(a)$ (et on lit : « log de a en base b ») le nombre $\dfrac{\ln a}{\ln b}$.



Cas particuliers :

- *lorsque $b = \mathrm{e}$, $\log_{\mathrm{e}}$ est le logarithme **népérien** ;*
- *lorsque $b = 2$, $\log_2$ est appelé logarithme **binaire** (utilisé notamment en informatique, théorie de l'information...) ;*
- *lorsque $b = 10$, $\log_{10}$ est appelé logarithme **décimal** (noté simplement $\log$, utilisé notamment en chimie (pH), acoustique (décibel)...).*

Proposition 2.2 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs, tout réel b strictement positif différent de 1 et tout entier relatif n, on a :

- $\log_b(aa') = \log_b a + \log_b a'$
- $\log_b\left(\dfrac{a}{a'}\right) = \log_b a - \log_b a'$
- $\log_b(a^n) = n \log_b a$

Définition 2.3 (Exponentiation)

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque.
On note a^b (et on lit : « a exposant b ») le nombre positif $e^{b\ln a}$.

Proposition 2.4 (Propriétés)

Pour tous réels a et a' strictement positifs et tous réels b et b', on a :

- $\ln(a^b) = b\ln a$
- $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$ et $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- $(aa')^b = a^b a'^b$ et $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^b = \dfrac{a^b}{a'^b}$
- $\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$ et $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^b$

En particulier, pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n non nul, on retrouve $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Remarque 2.5 (Exponentiation en chaîne)

L'exponentiation n'est **ni commutative ni associative** :
en général on a $a^b \neq b^a$ et $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$.

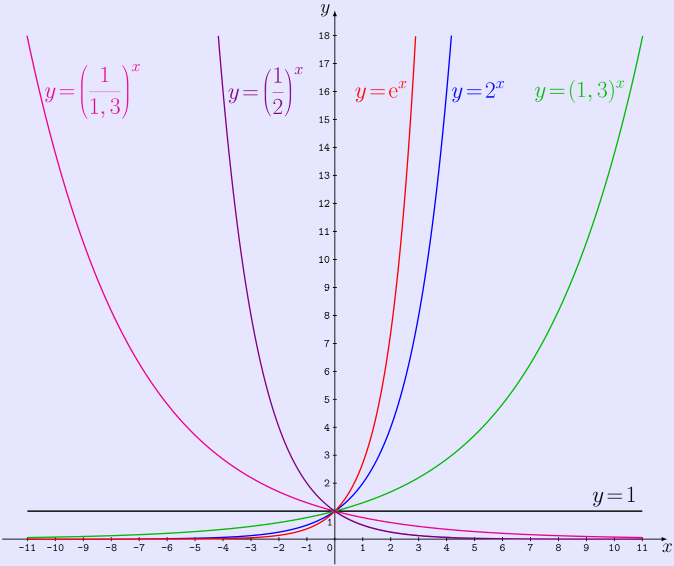
Définition 2.6 (Fonctions exponentielles)

Soit a un réel strictement positif. On appelle ***fonction exponentielle de base a*** *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0, +\infty[$, *notée* $\exp_a$, *définie par* $\exp_a(x) = a^x$.

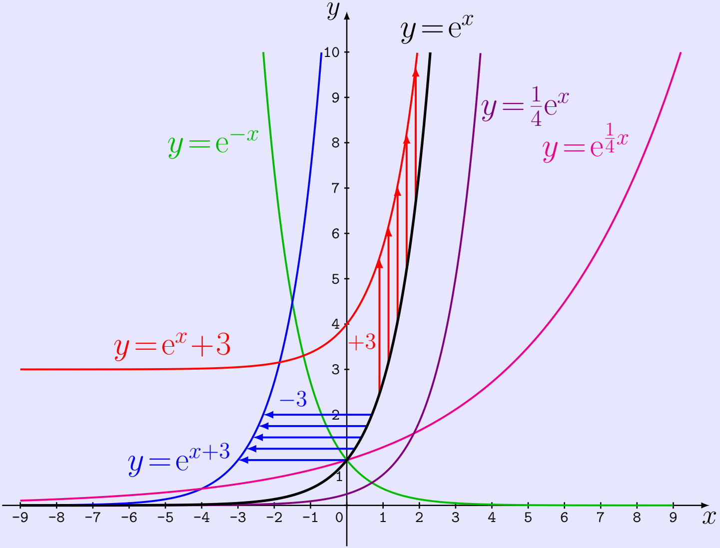
Proposition 2.7 (Propriétés)

Soit a un réel strictement positif et $\exp_a$ *la fonction exponentielle de base a.*

1. $\exp_a$ *est* ***dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $\exp_a' : x \mapsto (\ln a)a^x$.
2. *Pour* $0 < a < 1$, $\exp_a$ *est* ***strictement décroissante*** *sur* $\mathbb{R}$ *avec*
$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = 0.$$
3. *Pour* $a > 1$, $\exp_a$ *est* ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$ *avec*
$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = +\infty.$$
4. *Les courbes de* $\exp_a$ *et* $\exp_{\frac{1}{a}}$ *sont* ***symétriques*** *l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.*



Courbes représentatives de quelques fonctions exponentielles



Courbes représentatives de quelques fonctions exponentielles

Définition 2.8 (Fonctions puissances)

*Soit a un réel quelconque. On appelle **fonction puissance d'exposant a** l'application de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ qui à tout réel $x>0$ associe le réel x^a.*

Proposition 2.9 (Propriétés)

La fonction puissance d'exposant a est :

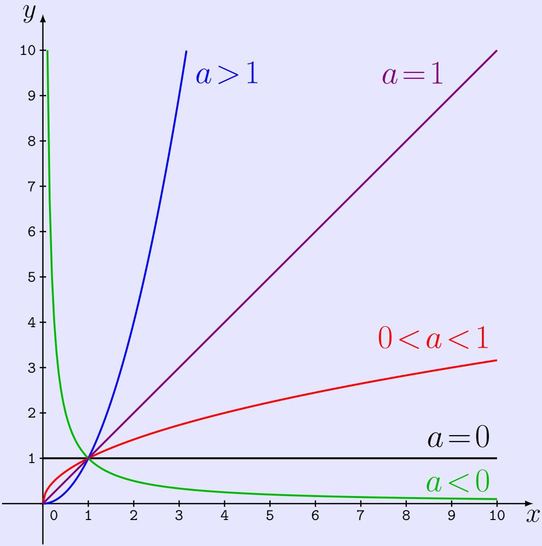
1. ***dérivable** sur $]0,+\infty[$ de fonction dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$;*
2. ***strictement croissante** sur $]0,+\infty[$ **si $a>0$** avec $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$;*
3. ***strictement décroissante** sur $]0,+\infty[$ **si $a<0$** avec $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$;*
4. ***bijective** lorsque $a \neq 0$ de réciproque la fonction puissance d'exposant $\dfrac{1}{a}$.*

Remarque 2.10 (Extension (facultatif))

Pour tout entier **impair** n, la fonction puissance d'exposant n peut se prolonger en une bijection définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la fonction puissance d'exposant $\dfrac{1}{n}$ sur $\mathbb{R}$ comme réciproque. En particulier : $\forall x \in \mathbb{R},\ (-x)^{\frac{1}{n}} = -x^{\frac{1}{n}}$.

Plus généralement, on peut définir pour tout rationnel de la forme $\frac{p}{2q+1}$ où p et q sont deux entiers, la fonction puissance d'exposant $\frac{p}{2q+1}$ selon

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^{\frac{p}{2q+1}} = \left(x^{\frac{1}{2q+1}}\right)^p.$$



Courbes représentatives de quelques fonctions puissances

Sommaire

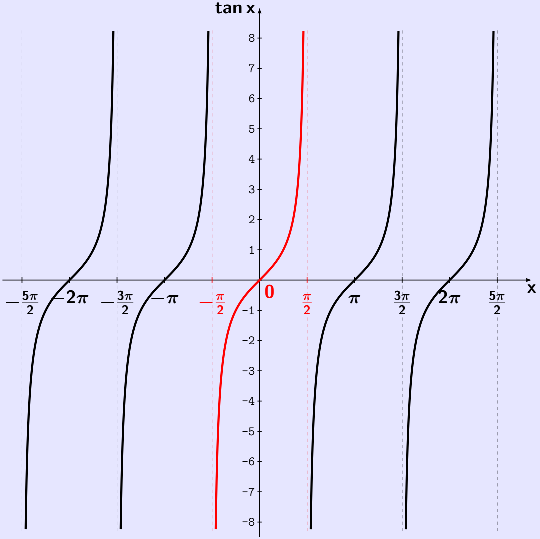
Définition 3.1 (Fonction tangente)

*La **fonction tangente** est l'application notée* **tan** *qui va de*

$D_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $\forall\, x \in D_{\tan},\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

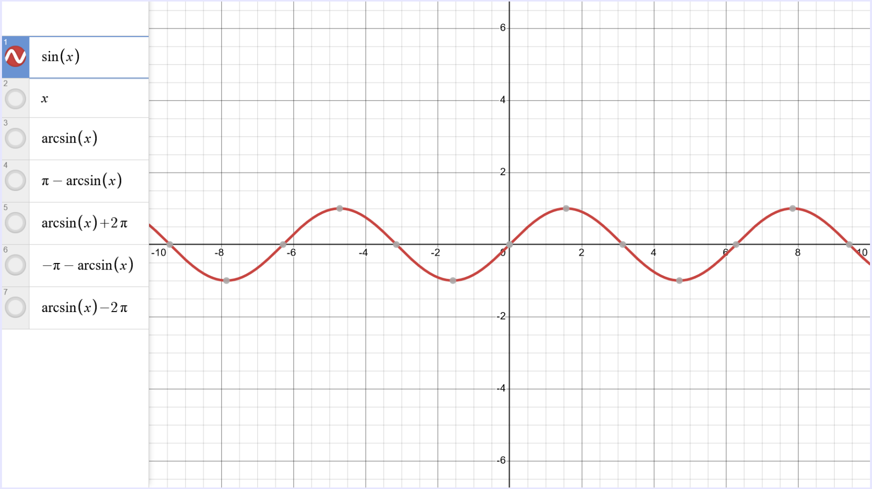
Proposition 3.2 (Propriétés)

1. *La fonction* tan *est **impaire** et **π-périodique**.*
2. *La fonction* tan *est **dérivable** sur* $D_{\tan}$*, de dérivée :*
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$
3. *La fonction* tan *est **strictement croissante** sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

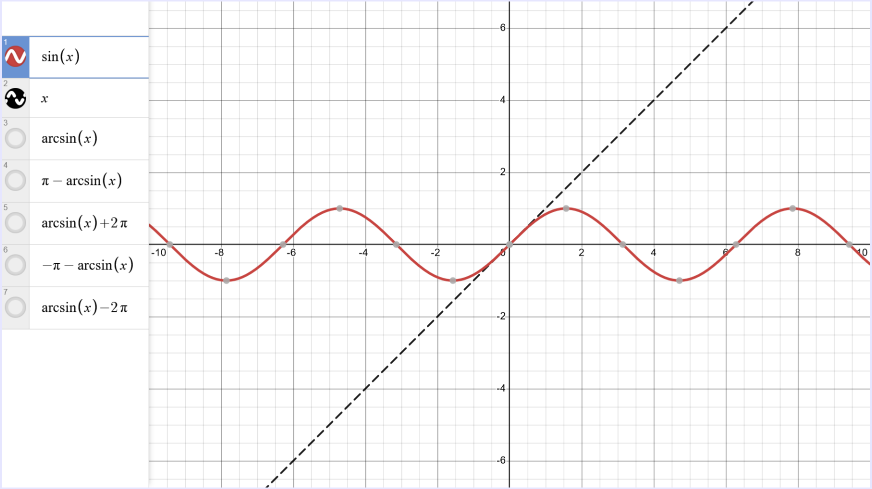


Courbe représentative de la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$

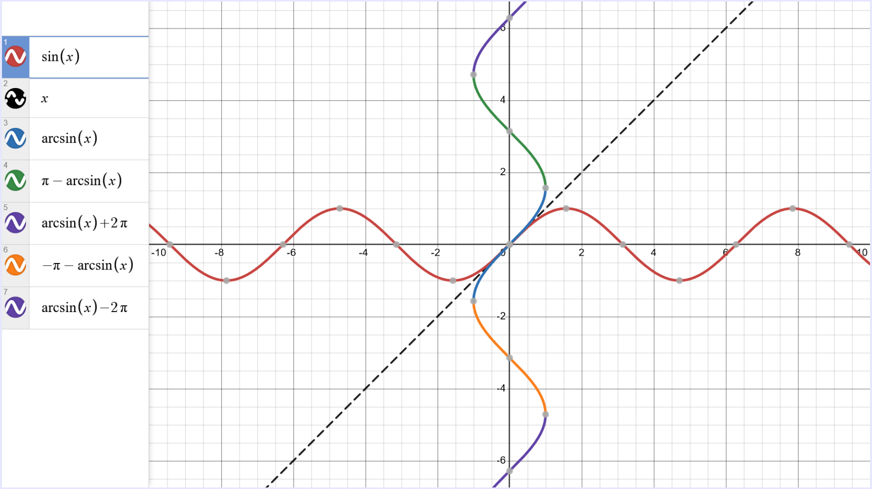
Prologue : à partir d'une sinusoïde horizontale...



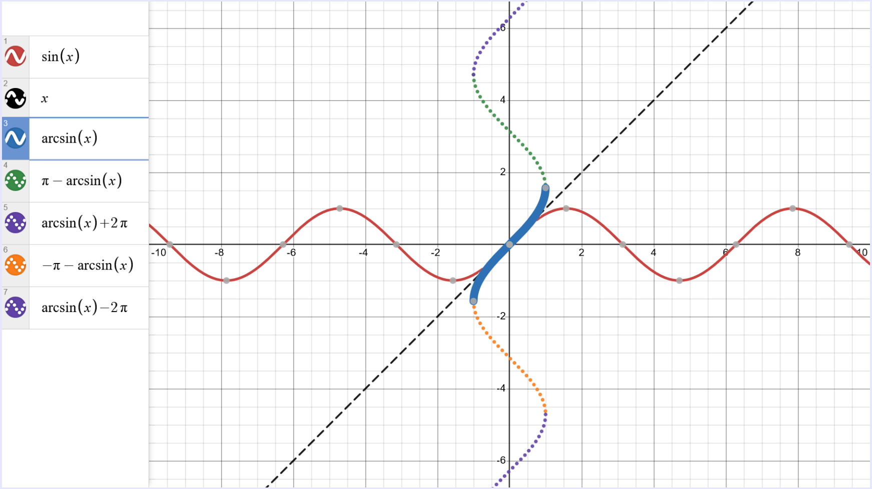
Prologue : après une symétrie...



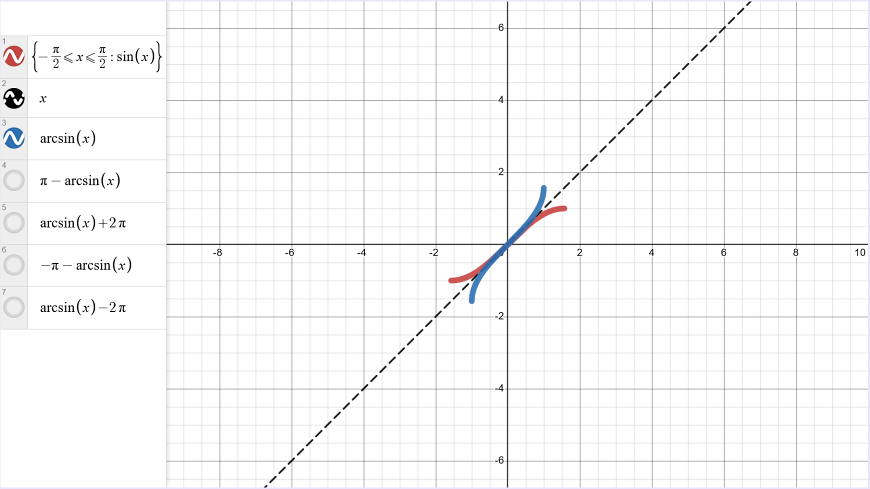
Prologue : une sinusoïde verticale...



Prologue : puis un extrait !



Prologue : puis un extrait !

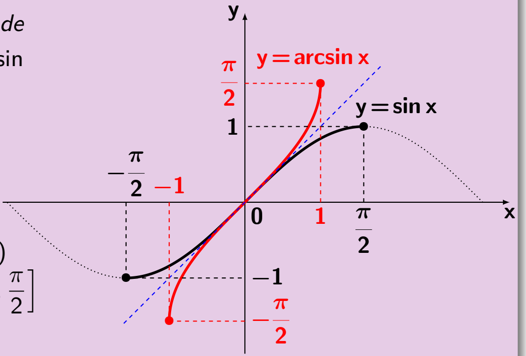


Proposition 3.3 (Fonction arcsin)

La fonction sin *réalise une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1, 1]$ *et l'on note* arcsin *sa fonction réciproque. On a donc :*

$$\begin{aligned} \text{arcsin} : [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \text{arcsin}(x) \end{aligned}$$

et $\begin{cases} y = \text{arcsin}(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$



Proposition 3.4

1. arcsin *est **continue**, **strictement croissante** et **impaire** sur* $[-1, 1]$.
2. $\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], & \sin(\text{arcsin}(x)) = x \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \text{arcsin}(\sin(x)) = x \end{cases}$
3. arcsin *est **dérivable** sur* $]-1, 1[$ *et*

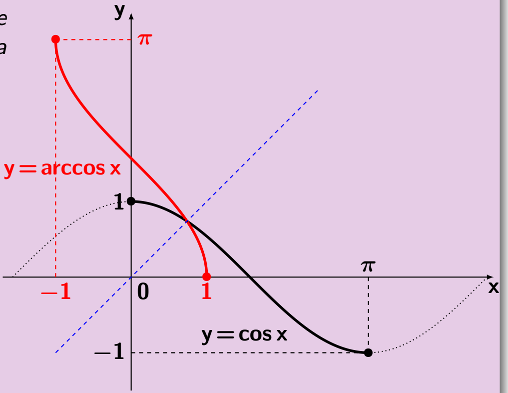
$$\forall x \in]-1, 1[, \ \text{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Proposition 3.5 (Fonction arccos)

La fonction cos *réalise une bijection de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, 1]$ *et l'on note* arccos *sa fonction réciproque. On a donc :*

$$\begin{aligned} \text{arccos} : \ [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longmapsto \text{arccos}(x) \end{aligned}$$

$$\textit{et} \quad \begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$$



Proposition 3.6

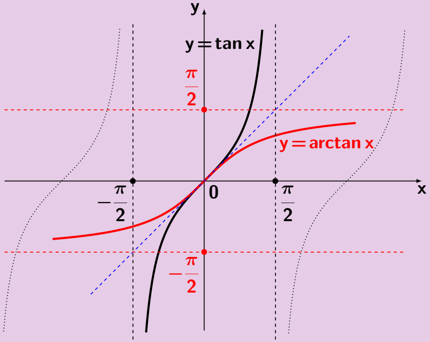
1. arccos *est* ***continue***, ***strictement décroissante*** *sur* $[-1, 1]$.
2. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall x \in [0,\pi], & \arccos(\cos(x)) = x \end{cases}$
3. arccos *est* ***dérivable*** *sur* $]-1,1[$ *et*
$$\forall x \in]-1,1[, \ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
4. $\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Proposition 3.7 (Fonction arctan)

La fonction tan *réalise une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$ *et l'on note* arctan *sa fonction réciproque. On a donc :*

$$\begin{aligned}\arctan :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x &\longmapsto \arctan(x)\end{aligned}$$

et $\begin{cases} y = \arctan(x)\\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{cases} x=\tan(y)\\ y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$



Proposition 3.8

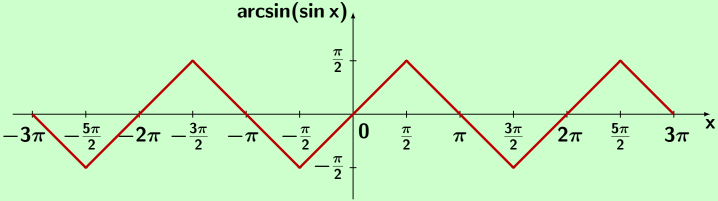
1. arctan *est* ***continue***, ***strictement croissante*** *et* ***impaire*** *sur* $\mathbb{R}$.

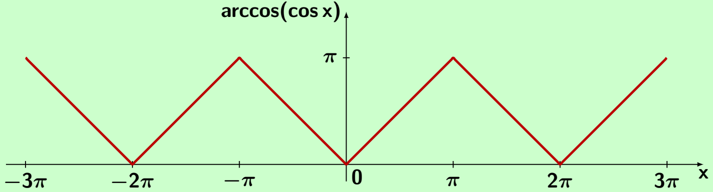
2. $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}, & \tan(\arctan(x)) = x\\ \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, & \arctan(\tan(x)) = x\end{cases}$

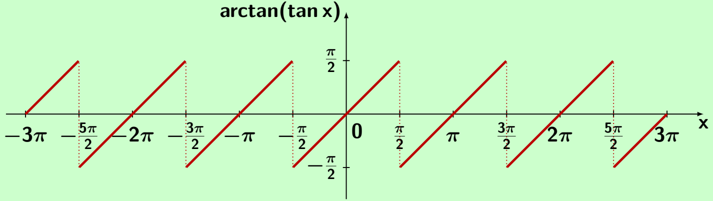
3. arctan *est* ***dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *et*
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4. $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & \textit{si } x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \textit{si } x<0\end{cases}$

Exemple 3.9 (Courbes en « dents de scie » (facultatif))

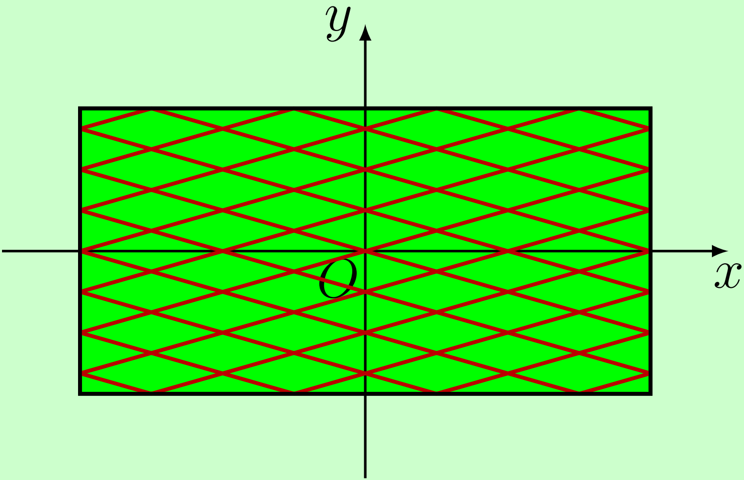






Exemple 3.10 (Billard rectangulaire (facultatif))

Courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 2\arcsin(\sin(7t)) \\ y(t) = \arcsin(\sin(4t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$



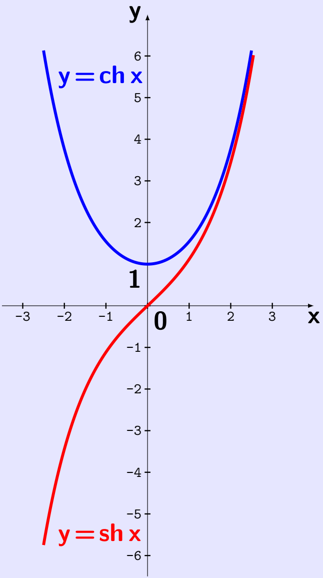
Sommaire

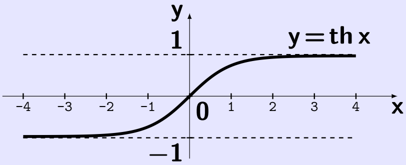
Définition 4.1 (Fonctions hyperboliques)

1. *On appelle* ***fonction cosinus hyperbolique****, notée* ch *(ou* cosh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $[1, +\infty[$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. *On appelle* ***fonction sinus hyperbolique****, notée* sh *(ou* sinh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. *On appelle* ***fonction tangente hyperbolique****, notée* th *(ou* tanh*), l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à tout réel* x *associe le réel* $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

Proposition 4.2 (Parité/Variations)

1.
   a. *La fonction* ch *est* ***paire*** *et* ***dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $\text{ch}' = \text{sh}$.
   b. *La fonction* sh *est* ***impaire*** *et* ***dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $\text{sh}' = \text{ch}$.
   c. *La fonction* th *est* ***impaire*** *et* ***dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \dfrac{1}{\text{ch}^2}$.
2.
   a. *La fonction* ch *est* ***strictement décroissante*** *sur* $\mathbb{R}_-$, ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}_+$ *avec* $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{ch}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$.
   b. *La fonction* sh *est* ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$.
   c. *La fonction* th *est* ***strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{th}(x) = -1$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$.





Courbes représentatives des fonctions ch, sh et th

Proposition 4.3 (Pourquoi les termes « cosinus » et « sinus » dans ch et sh ?)

1. *Pour tous réels a et b :* $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$.
2. *Pour tous réels a et b :* $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$.
3. *Pour tout réel a :* $\operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) = 1$.

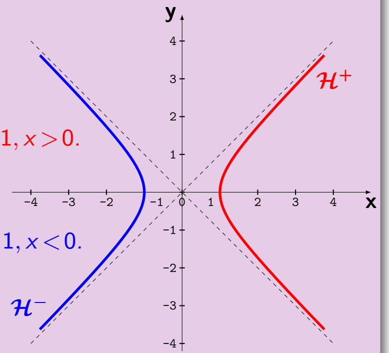
« Explication » : pour tout réel a : $\operatorname{ch}(a) = \cos(\mathrm{i}a)$ *et* $\operatorname{sh}(a) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}a)$*...*

Proposition 4.4 (Pourquoi le terme « hyperbolique » dans ch et sh ?)

*La courbe paramétrée $F^+ : t \mapsto (\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t))$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour support la branche d'**hyperbole** $\mathcal{H}^+$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1, x > 0$.*

*La courbe paramétrée $F^- : t \mapsto (-\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t))$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour support la branche d'**hyperbole** $\mathcal{H}^-$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1, x < 0$.*

*L'**hyperbole** d'équation $x^2 - y^2 = 1$ est la réunion des deux branches $\mathcal{H}^-$ et $\mathcal{H}^+$.*



La chaînette dans la nature...

Colliers

Arche de Saint-Louis – Missouri

Voûtes de la Casa Mila
Barcelone

Lignes à haute-tension

Vincent Ganivet : Catène de containers
Le Havre

Arches devant le bâtiment
Sophie Germain – INSA Lyon

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Courbes de Lissajous

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lissajous/Lissajous.html

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Courbes cycloïdales

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_cycloides/cycloides0.html

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Trigonométrie

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_trigonometrie.pdf

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Présentation Maple

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/presentation_maple_html/presentation_maple0.html

Notions à retenir

- Fonctions usuelles
  - ⋆ partie entière
  - ⋆ logarithmes
  - ⋆ exponentielles
  - ⋆ puissances
  - ⋆ trigonométriques (tan, arcsin, arccos, arctan)
  - ⋆ hyperboliques

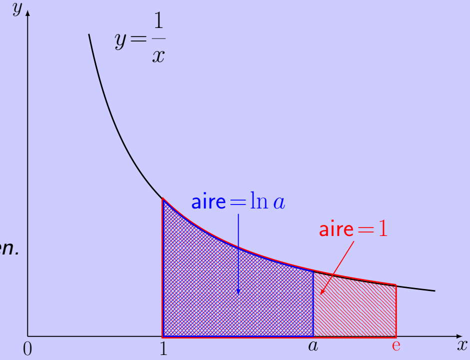
Annexes

- Fonctions ln/exp
- Trigonométrie

Sommaire

Définition A.1 (Fonction logarithme népérien)

Pour tout réel strictement positif a, *on appelle* ***logarithme naturel*** *ou encore* ***logarithme népérien*** *de* a *le nombre noté* $\ln a$ *égal à l'aire comprise entre la courbe d'équation* $y = \dfrac{1}{x}$, *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = a$ *dans un repère orthonormal.*



On note e *le nombre tel que* $\ln \mathrm{e} = 1$.
e *est appelé* ***base*** *du logarithme népérien.*
Numériquement : $\mathrm{e} = 2,7182818\ldots$

Cette quantité définit une application $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que pour tout réel strictement positif :* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Proposition A.2 (Propriétés)

Pour tous réels x *et* x' *strictement positifs et tout entier relatif* n, *on a :*

- $\ln(xx') = \ln x + \ln x'$
- $\ln\left(\dfrac{x}{x'}\right) = \ln x - \ln x'$
- $\ln(x^n) = n \ln x$

Définition A.3 (Fonction exponentielle)

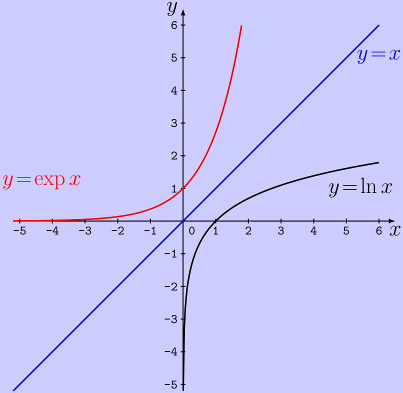
*La fonction **logarithme népérien** définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.

*Sa bijection réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$.

On note aussi $\exp(x) = e^x$.

On a pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$.

On peut démontrer que exp *est l'**unique solution*** f *de l'**équation différentielle*** $f' = f$ *vérifiant la **condition initiale*** $f(0) = 1$.



Proposition A.4 (Propriétés)

Pour tous réels x *et* x' *et tout entier relatif* n, *on a :*

- $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$
- $e^{x-x'} = \dfrac{e^x}{e^{x'}}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Définition A.5 (Exponentielle complexe)

*Soit x, y deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $x+\mathrm{i}y$ selon*

$$e^{x+\mathrm{i}y} = e^x\, e^{\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Proposition A.6 (Propriétés)

Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier n, on a :

- $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ *et* $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$ *et* $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

*En particulier, pour tout nombre réel θ et tout nombre entier n, on a (formule de **de Moivre**) :*

$$\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta} \quad \textit{ou encore} \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

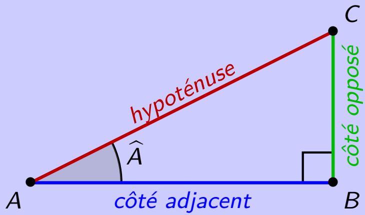
Exemple A.7 (Onde sinusoïdale amortie)

Une **onde sinusoïdale amortie** peut être modélisée par une fonction de la forme $t \longmapsto e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$, $\alpha > 0$ désignant un coefficient d'amortissement et $\omega > 0$ la pulsation de l'onde.

Il peut être judicieux de l'interpréter comme la partie réelle ou imaginaire de la fonction complexe $t \longmapsto e^{(-\alpha+\mathrm{i}\omega)t}$.

Définition B.1 (Sinus, Cosinus, Tangente)

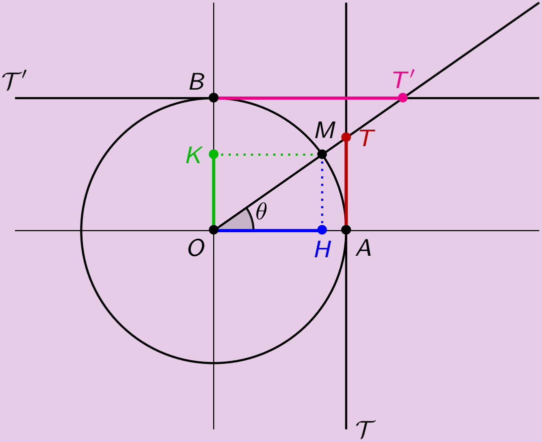
On considère un triangle ABC rectangle en B. On note $\widehat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



- *Le* ***Sinus*** *est le rapport du côté* ***« Opposé »*** *à l'****« Hypoténuse »***.
- *Le* ***Cosinus*** *est le rapport du côté* ***« Adjacent »*** *à l'****« Hypoténuse »***.
- *La* ***Tangente*** *est le rapport du côté* ***« Opposé »*** *au côté* ***« Adjacent »***.

On note : $\sin \widehat{A} = \dfrac{BC}{AC}$ $\qquad \cos \widehat{A} = \dfrac{AB}{AC}$ $\qquad \tan \widehat{A} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$

Proposition B.2 (Cercle trigonométrique)



Sur le cercle de centre O et de rayon 1 :

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = 1$$

$$\overline{OH} = \cos\theta \quad \overline{OK} = \sin\theta$$

Sur les tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$:

$$\overline{AT} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\overline{BT'} = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

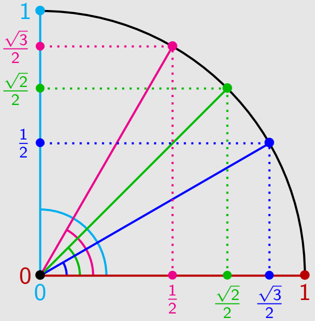
Le point M a pour coordonnées $\left(\cos\theta, \sin\theta\right)$ *et* $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

Définition B.3 (Radian)

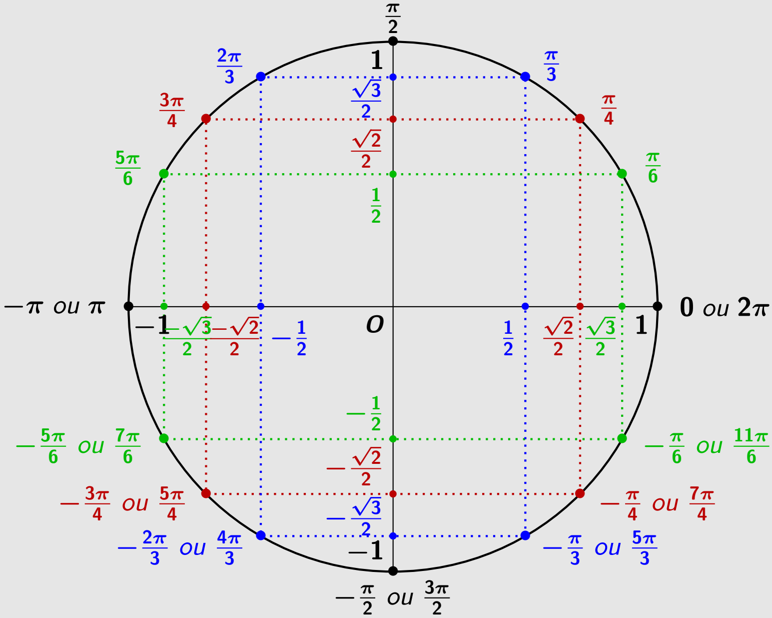
*Le **radian** est la mesure d'un angle interceptant sur la circonférence d'un cercle centré au point d'intersection des demi-droites délimitant le secteur angulaire, un arc d'une longueur égale au rayon.*

Quelques valeurs remarquables

θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

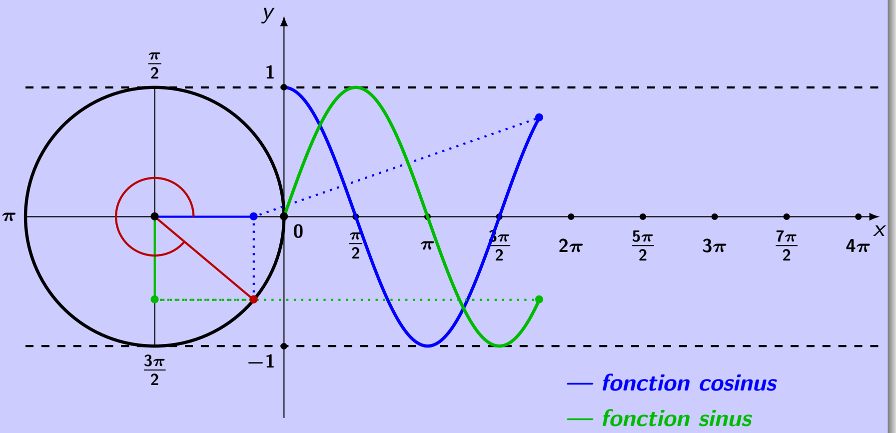


Valeurs remarquables



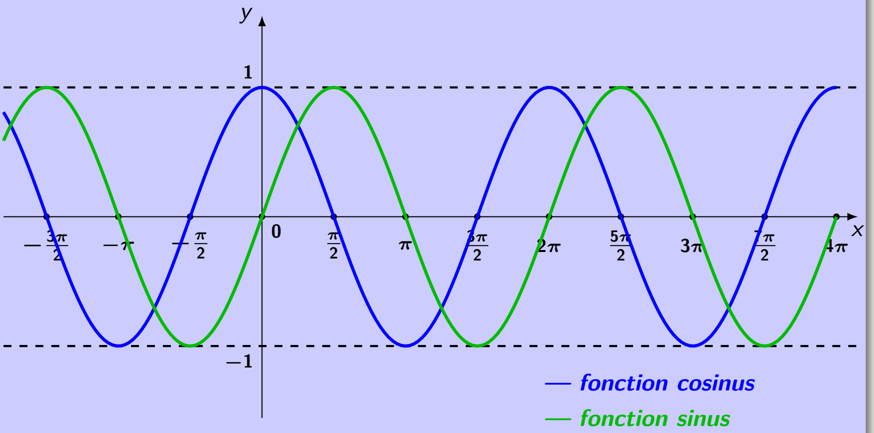
Définition B.4 (Fonctions cosinus et sinus)

Les quantités trigonométriques **cos** *et* **sin** *définissent des* ***fonctions trigonométriques*** *sur $\mathbb{R}$ dont voici les graphes.*

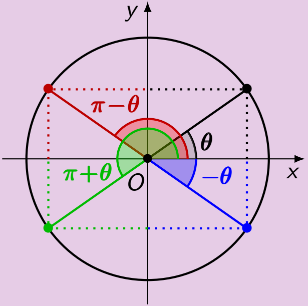


Définition B.4 (Fonctions cosinus et sinus)

Les quantités trigonométriques **cos** *et* **sin** *définissent des* ***fonctions trigonométriques*** *sur* $\mathbb{R}$ *dont voici les graphes.*



Symétries/rotations élémentaires



angles ***opposés*** *(symétrie par rapport à Ox)*

$$\cos(-\theta)=\cos(\theta) \qquad \sin(-\theta)=-\sin(\theta)$$

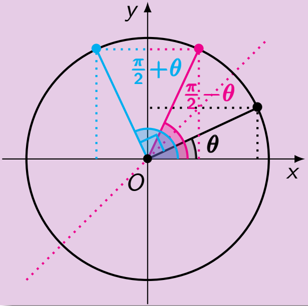
cos : *fonction* ***paire*** sin : *fonction* ***impaire***

angles ***supplémentaires*** *(symétrie par rapport à Oy)*

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta) \qquad \sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$$

demi-tour *(symétrie par rapport à O)*

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta) \qquad \sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$$



angles ***complémentaires*** *(symétrie par rapport à $x=y$)*

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin(\theta) \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\cos(\theta)$$

quart de tour *(rotation d'angle droit)*

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}+\theta)=-\sin(\theta) \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2}+\theta)=\cos(\theta)$$

Formulaire 1 (Somme des angles)

Pour tous réels θ et φ :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta+\varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\\
\cos(\theta-\varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi)\\
\sin(\theta+\varphi) &= \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)\\
\sin(\theta-\varphi) &= \sin(\theta)\cos(\varphi) - \cos(\theta)\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

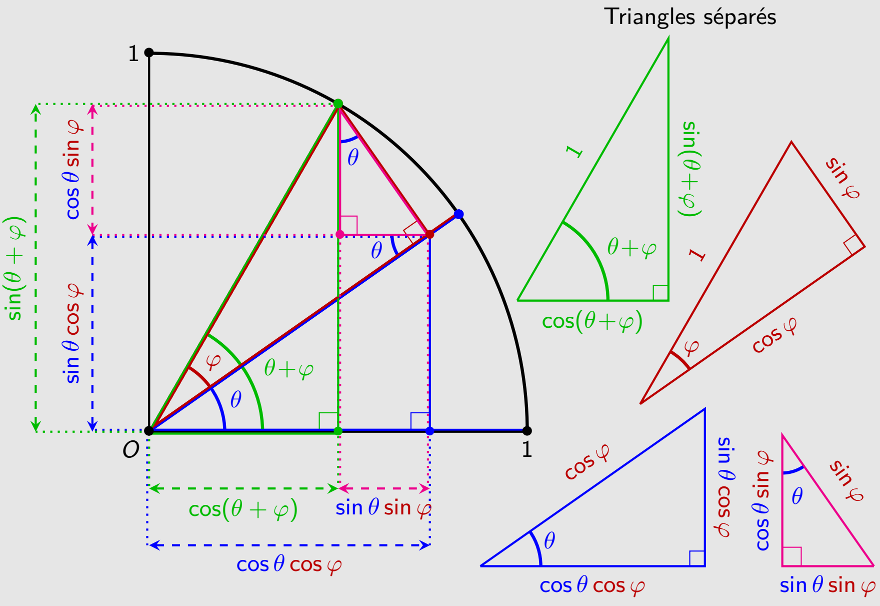
Exemple B.5

Partant de $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ avec $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on tire :

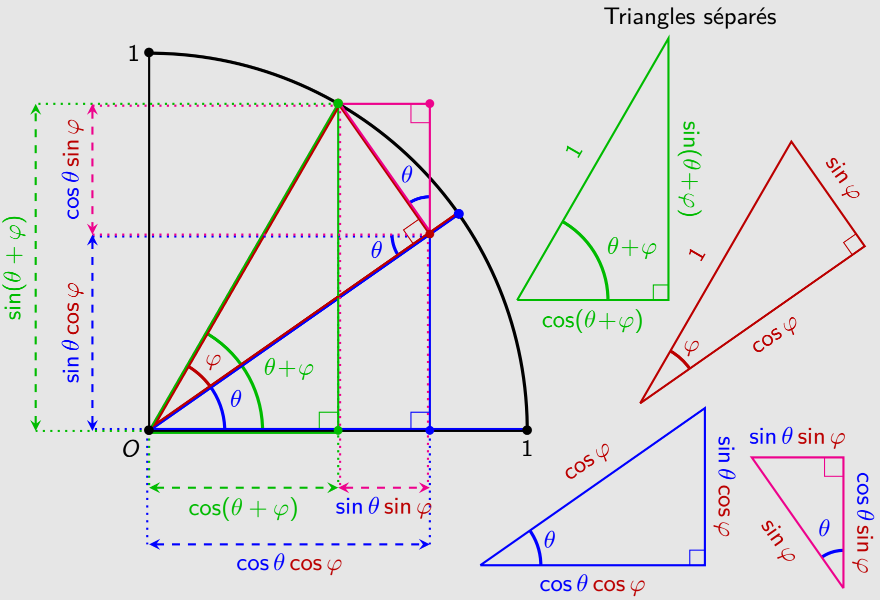
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

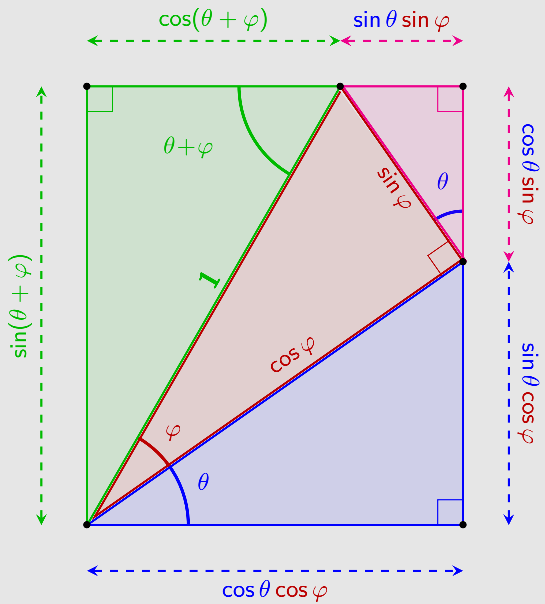
Explication : $\cos(\theta + \varphi)$ et $\sin(\theta + \varphi)$



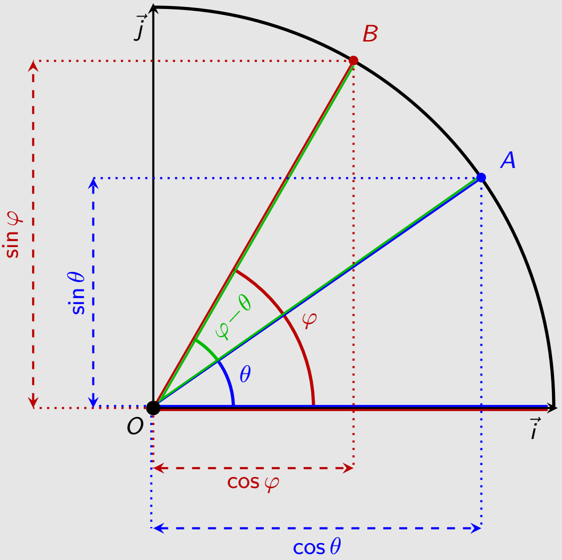
Explication : $\cos(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi)$ (variante)



Explication : $\cos(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta+\varphi)$ (résumé)



Explication : $\cos(\varphi-\theta)$ et $\sin(\varphi-\theta)$



$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \overrightarrow{OB} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

Produit scalaire

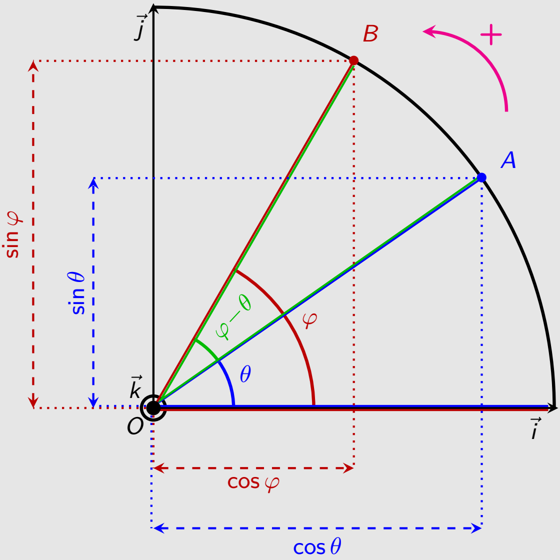
1. *Calcul analytique :*

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$$

2. *Calcul géométrique :*

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \cos(\varphi-\theta)$$

Explication : $\cos(\varphi - \theta)$ et $\sin(\varphi - \theta)$



$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \overrightarrow{OB} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

Produit vectoriel

1. *Calcul analytique :*

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi)\,\vec{k}$$

2. *Calcul géométrique :*

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\vec{k} = \sin(\varphi - \theta)\vec{k}$$

Définition B.6 (Exponentielle complexe)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Proposition B.7 (Formulaire via les complexes)

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \times e^{i\varphi}$$

En particulier, pour tout nombre réel θ et tout nombre entier n, on a (formule de de Moivre) :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad \text{ou encore} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

En effet :

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ &= \cos\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) + i\sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= e^{i\theta} \times e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Exemple B.8

La formule de de Moivre donne :

- pour $n = 3$: $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$;
- pour $n = 4$: $\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ et $\sin(4\theta) = 4\sin\theta(2\cos^3\theta - \cos\theta)$.

Formulaire 2 (Produit de sinus/cosinus (facultatif))

$$\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\big[\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)\big]$$
$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}\big[\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)\big]$$
$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\big[\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)\big]$$
$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

En effet : en ajoutant ou soustrayant $\cos(\theta+\varphi)$ et $\cos(\theta-\varphi)$,

$$\begin{array}{rl} \cos(\theta+\varphi) & = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \cos(\theta-\varphi) & = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi \\ \hline \cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi) & = 2\cos\theta\cos\varphi \\ \cos(\theta+\varphi)-\cos(\theta-\varphi) & = -2\sin\theta\sin\varphi \end{array}$$

Formulaire 3 (Somme de sinus/cosinus (facultatif))

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$
$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$
$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$
$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

En effet : on part de $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$.
Pour $\alpha = \dfrac{\theta+\varphi}{2}$ et $\beta = \dfrac{\theta-\varphi}{2}$, on a $\alpha+\beta=\theta$ et $\alpha-\beta=\varphi$,
et l'on trouve $\cos\theta+\cos\varphi = 2\cos\left(\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)$.

Formulaire 4 (Tangente (facultatif))

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$$
$$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan(\theta+\varphi) = \frac{\tan\theta+\tan\varphi}{1-\tan\theta\tan\varphi}$$
$$\tan(\theta-\varphi) = \frac{\tan\theta-\tan\varphi}{1+\tan\theta\tan\varphi}$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

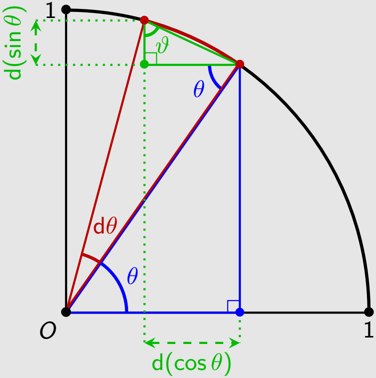
En effet :

$$\tan(\theta+\varphi) = \frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)} = \frac{\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi}$$
$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{\tan\theta+\tan\varphi}{1-\tan\theta\tan\varphi}$$

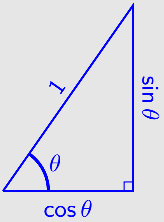
Proposition B.9 (Dérivation)

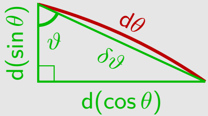
$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) \qquad \sin'(\theta) = \cos(\theta)$$

Explication heuristique



Triangles séparés





$$\cos\vartheta = \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\delta\vartheta} \text{ avec } \vartheta \approx \theta, \delta\vartheta \approx \mathrm{d}\theta$$

Formellement : $\sin'(\theta) = \dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta$

En fait : $\vartheta = \theta + \frac{\mathrm{d}\theta}{2}$ *et* $\delta\vartheta = 2\sin(\frac{\mathrm{d}\theta}{2})$...