

Polynômes

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

1 Définitions

- Notations
- Quelques graphes
- Opérations

2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

- Définitions
- Algorithme
- Racines d'un polynôme

3 Formule de Taylor

- Dérivées successives
- Énoncé
- Exemple

4 Racines multiples

- Généralités
- Cas réel

5 Factorisation

- Factorisation sur $\mathbb{C}$
- Somme et produit des racines
- Factorisation sur $\mathbb{R}$

- 1 Définitions
 - Notations
 - Quelques graphes
 - Opérations
- 2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 3 Formule de Taylor
- 4 Racines multiples
- 5 Factorisation

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Fonctions polynômes)

On appelle **fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$** toute application P de la forme $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

- Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** de P .
- Lorsque $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** de P et noté $\deg(P)$.
- Si $n = 0$, P est une fonction constante.

Si en plus $a_0 = 0$, on dit que P est la **fonction polynôme nul**.

Par convention, le degré de la fonction polynôme nul est $-\infty$.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Fonctions polynômes)

On appelle **fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$** toute application P de la forme $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

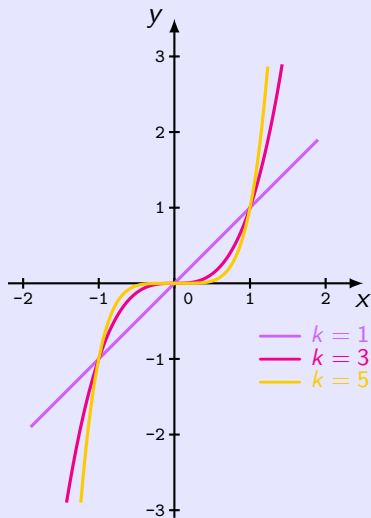
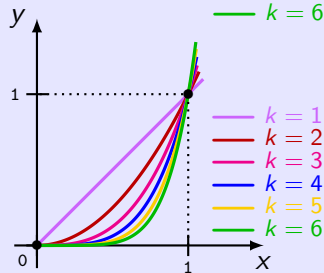
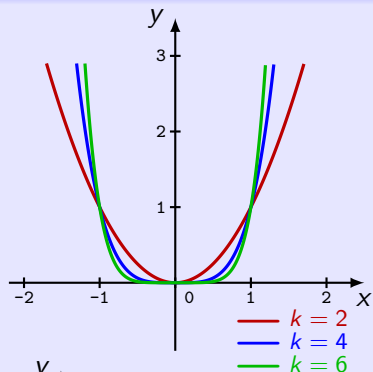
$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

- Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** de P .
- Lorsque $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** de P et noté $\deg(P)$.
- Si $n = 0$, P est une fonction constante.
Si en plus $a_0 = 0$, on dit que P est la **fonction polynôme nul**.
Par convention, le degré de la fonction polynôme nul est $-\infty$.

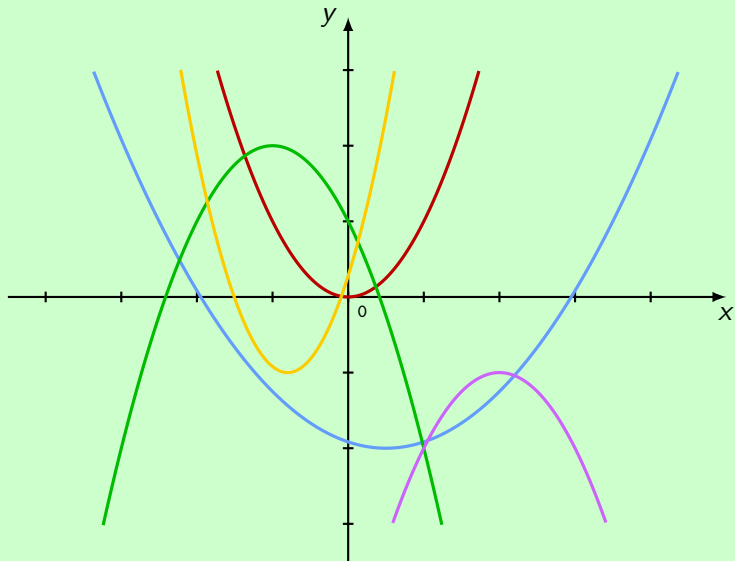
Notations :

- L'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$.
- On utilise, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation X^k pour désigner la fonction $x \mapsto x^k$ (par convention X^0 est la fonction $x \mapsto 1$).

Cela permet de noter $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ une fonction polynôme quelconque de degré n .

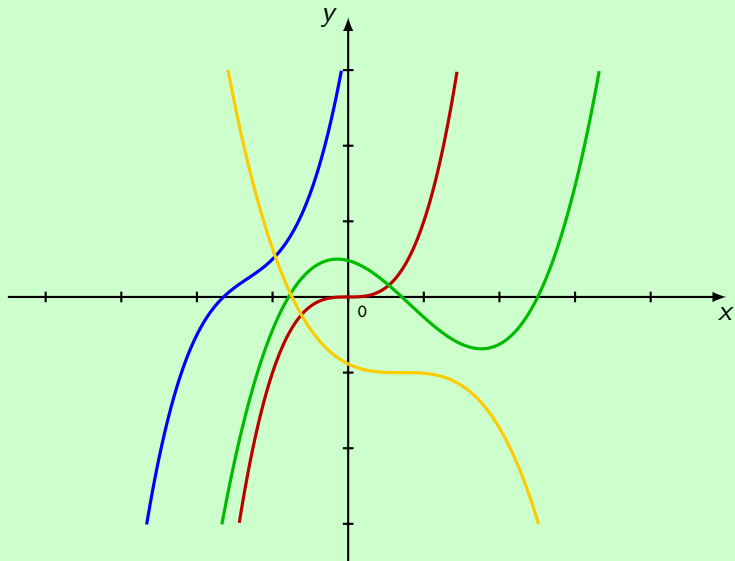
Graphes des fonctions puissances X^k 

Exemple 1.2 (Second degré/Paraboles)



Quelques tracés de courbes polynomiales de degré 2

Exemple 1.3 (Troisième degré/Paraboles cubiques)



Quelques tracés de courbes polynomiales de degré 3

Théorème 1.4 (Égalité)

*Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**. Cf. Corollaire [3.3](#).*

Théorème 1.4 (Égalité)

Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**. Cf. Corollaire 3.3.

Définition 1.5 (Opérations)

Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P + Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P+Q)(x) = P(x)+Q(x), (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x), (Q \circ P)(x) = Q(P(x)).$$

Théorème 1.4 (Égalité)

Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**. Cf. Corollaire 3.3.

Définition 1.5 (Opérations)

Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P + Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P+Q)(x) = P(x)+Q(x), (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x), (Q \circ P)(x) = Q(P(x)).$$

Proposition 1.6 (Opérations et degré (facultatif))

Soit P et Q deux fonctions polynômes. Alors $P + Q$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et

- ① $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$;
de plus, lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;

Théorème 1.4 (Égalité)

Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**. Cf. Corollaire 3.3.

Définition 1.5 (Opérations)

Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P + Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P+Q)(x) = P(x)+Q(x), (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x), (Q \circ P)(x) = Q(P(x)).$$

Proposition 1.6 (Opérations et degré (facultatif))

Soit P et Q deux fonctions polynômes. Alors $P + Q$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et

- ① $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$;
de plus, lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- ② $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$;

Théorème 1.4 (Égalité)

Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**. Cf. Corollaire 3.3.

Définition 1.5 (Opérations)

Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P + Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon

$$\forall x \in \mathbb{K}, (P+Q)(x) = P(x)+Q(x), (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x), (Q \circ P)(x) = Q(P(x)).$$

Proposition 1.6 (Opérations et degré (facultatif))

Soit P et Q deux fonctions polynômes. Alors $P + Q$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et

- ① $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$;
de plus, lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- ② $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$;
- ③ $\deg(Q \circ P) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

① Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.

Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

- ① Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a

$$P + Q = (a + 2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$$

Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

- ① Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a

$$P + Q = (a + 2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$$

et

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

(en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$ lorsque $a \neq 0$).

Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

- ① Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a

$$P + Q = (a + 2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$$

et

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

(en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$ lorsque $a \neq 0$). Plus précisément :

- si $a \neq -2$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- si $a = -2$, alors $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

- ① Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a

$$P + Q = (a + 2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$$

et

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

(en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$ lorsque $a \neq 0$). Plus précisément :

- si $a \neq -2$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- si $a = -2$, alors $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

- ② Soit $P = X^2 + a$ et $Q = X^3 + b$, les deux nombres a, b étant fixés.

Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

- ① Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a

$$P + Q = (a + 2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$$

et

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

(en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$ lorsque $a \neq 0$). Plus précisément :

- si $a \neq -2$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- si $a = -2$, alors $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

- ② Soit $P = X^2 + a$ et $Q = X^3 + b$, les deux nombres a, b étant fixés.
On a

$$P \circ Q = X^6 + 2bX^3 + (a + b^2) \quad \text{et} \quad Q \circ P = X^6 + 3aX^4 + 3a^2X^2 + (a^3 + b)$$

Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

- ① Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
On a

$$P + Q = (a + 2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$$

et

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

(en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$ lorsque $a \neq 0$). Plus précisément :

- si $a \neq -2$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- si $a = -2$, alors $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

- ② Soit $P = X^2 + a$ et $Q = X^3 + b$, les deux nombres a, b étant fixés.
On a

$$P \circ Q = X^6 + 2bX^3 + (a + b^2) \quad \text{et} \quad Q \circ P = X^6 + 3aX^4 + 3a^2X^2 + (a^3 + b)$$

et

$$\deg(P \circ Q) = \deg(Q \circ P) = \deg(P)\deg(Q).$$

- 1 Définitions
- 2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
 - Définitions
 - Algorithme
 - Racines d'un polynôme
- 3 Formule de Taylor
- 4 Racines multiples
- 5 Factorisation

Dans $\mathbb{Z}$, on dispose d'une procédure fondamentale de l'arithmétique : la **division euclidienne**. Le résultat correspondant stipule que pour tous entiers a et b , $b \neq 0$, **il existe un unique** couple d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Les entiers q et r sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de a par b .

Par exemple, la division euclidienne de 679 par 21 fournit $679 = 21 \times 32 + 7$.

Dans $\mathbb{Z}$, on dispose d'une procédure fondamentale de l'arithmétique : la **division euclidienne**. Le résultat correspondant stipule que pour tous entiers a et b , $b \neq 0$, **il existe un unique** couple d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Les entiers q et r sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de a par b .

Par exemple, la division euclidienne de 679 par 21 fournit $679 = 21 \times 32 + 7$.

$\mathbb{K}[X]^*$ désigne $\mathbb{K}[X]$ privé du polynôme nul. Dans la suite, on utilisera pour simplifier le terme **polynôme** pour désigner une fonction polynôme.

La procédure précédente peut s'étendre par analogie au cas des polynômes.

Dans $\mathbb{Z}$, on dispose d'une procédure fondamentale de l'arithmétique : la **division euclidienne**. Le résultat correspondant stipule que pour tous entiers a et b , $b \neq 0$, **il existe un unique** couple d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Les entiers q et r sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de a par b .

Par exemple, la division euclidienne de 679 par 21 fournit $679 = 21 \times 32 + 7$.

$\mathbb{K}[X]^*$ désigne $\mathbb{K}[X]$ privé du polynôme nul. Dans la suite, on utilisera pour simplifier le terme **polynôme** pour désigner une fonction polynôme.

La procédure précédente peut s'étendre par analogie au cas des polynômes.

Théorème-définition 2.1 (Division euclidienne)

Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ et tout $B \in \mathbb{K}[X]^$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.*

*Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de A par B .*

Dans $\mathbb{Z}$, on dispose d'une procédure fondamentale de l'arithmétique : la **division euclidienne**. Le résultat correspondant stipule que pour tous entiers a et b , $b \neq 0$, **il existe un unique** couple d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Les entiers q et r sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de a par b .

Par exemple, la division euclidienne de 679 par 21 fournit $679 = 21 \times 32 + 7$.

$\mathbb{K}[X]^*$ désigne $\mathbb{K}[X]$ privé du polynôme nul. Dans la suite, on utilisera pour simplifier le terme **polynôme** pour désigner une fonction polynôme.

La procédure précédente peut s'étendre par analogie au cas des polynômes.

Théorème-définition 2.1 (Division euclidienne)

Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ et tout $B \in \mathbb{K}[X]^$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.*

*Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de A par B .*

Définition 2.2 (Divisibilité)

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]^*$.

On dit que **A est divisible par B** (ou que **B divise A**) lorsque le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme **nul**.

Autrement dit, A est divisible par B ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \end{array}$$

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ & \underline{3X} \end{array}$$

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X \end{array}$$

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X \\ \hline 4X + 9 & \end{array}$$

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\ \hline 4X + 9 & \end{array}$$

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\ \hline 4X + 9 & \\ -(4X + 2) & \\ \hline \end{array}$$

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\ \hline 4X + 9 & \\ -(4X + 2) & \\ \hline 7 & \end{array}$$

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\ \hline 4X + 9 & \\ -(4X + 2) & \\ \hline 7 & \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\ \hline 4X + 9 & \\ -(4X + 2) & \\ \hline 7 & \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

Remarque : On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\ \hline 4X + 9 & \\ -(4X + 2) & \\ \hline 7 & \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

Remarque : On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

- En effet, le théorème 2.1 assure l'existence et l'unicité a priori de deux polynômes Q et R , R étant de degré < 1 , tels que $A = BQ + R$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\ \hline 4X + 9 & \\ -(4X + 2) & \\ \hline 7 & \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

Remarque : On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

- En effet, le théorème 2.1 assure l'existence et l'unicité a priori de deux polynômes Q et R , R étant de degré < 1 , tels que $A = BQ + R$.
- R est en fait un polynôme constant : $R = r$ avec $r \in \mathbb{K}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{K}, A(x) = B(x)Q(x) + r$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\
 -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\
 \hline
 4X + 9 & \\
 -(4X + 2) & \\
 \hline
 7 &
 \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

Remarque : On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

- En effet, le théorème 2.1 assure l'existence et l'unicité a priori de deux polynômes Q et R , R étant de degré < 1 , tels que $A = BQ + R$.
- R est en fait un polynôme constant : $R = r$ avec $r \in \mathbb{K}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{K}, A(x) = B(x)Q(x) + r$.
- En particulier pour $x = -\frac{1}{2}$, on a $B(-\frac{1}{2}) = 0$ donc $r = A(-\frac{1}{2}) = 7$. Ainsi $R = 7$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\
 -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\
 \hline
 4X + 9 & \\
 -(4X + 2) & \\
 \hline
 7 &
 \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

Remarque : On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

- En effet, le théorème 2.1 assure l'existence et l'unicité a priori de deux polynômes Q et R , R étant de degré < 1 , tels que $A = BQ + R$.
- R est en fait un polynôme constant : $R = r$ avec $r \in \mathbb{K}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{K}, A(x) = B(x)Q(x) + r$.
- En particulier pour $x = -\frac{1}{2}$, on a $B(-\frac{1}{2}) = 0$ donc $r = A(-\frac{1}{2}) = 7$. Ainsi $R = 7$.

De manière générale, si $B = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ (B est donc de degré 1), alors A se décompose selon $A = BQ + r$ avec $r = A(\alpha)$:

$$A = (X - \alpha)Q + A(\alpha).$$

Définition 2.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Définition 2.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.

Définition 2.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.

Corollaire 2.5 (Racines et divisibilité)

① Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**.

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.

Définition 2.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.

Corollaire 2.5 (Racines et divisibilité)

- ① Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**.
 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.
- ② Tout polynôme (non nul) de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **au plus** n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.

Définition 2.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.

Corollaire 2.5 (Racines et divisibilité)

① Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**.

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.

② Tout polynôme (non nul) de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **au plus** n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.

Exemple 2.6 (Racines et divisibilité)

Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Définition 2.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.

Corollaire 2.5 (Racines et divisibilité)

① Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**.

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.

② Tout polynôme (non nul) de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **au plus** n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.

Exemple 2.6 (Racines et divisibilité)

Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P . Donc P est divisible par $X - 1$.

Définition 2.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.

Corollaire 2.5 (Racines et divisibilité)

① Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**.

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.

② Tout polynôme (non nul) de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **au plus** n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.

Exemple 2.6 (Racines et divisibilité)

Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P . Donc P est divisible par $X - 1$.
- La division euclidienne de P par $X - 1$ fournit $P = (X - 1)Q$ avec $Q = X^2 - X - 2$ qui admet pour racines -1 et 2 . Ainsi P admet au moins 3 racines.

Définition 2.3 (Racine)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.

Corollaire 2.5 (Racines et divisibilité)

① Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**.

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.

② Tout polynôme (non nul) de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **au plus** n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.

Exemple 2.6 (Racines et divisibilité)

Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P . Donc P est divisible par $X - 1$.
- La division euclidienne de P par $X - 1$ fournit $P = (X - 1)Q$ avec $Q = X^2 - X - 2$ qui admet pour racines -1 et 2 . Ainsi P admet au moins 3 racines.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$.

Proposition 2.7 (Cas réel : comportement en l'infini)

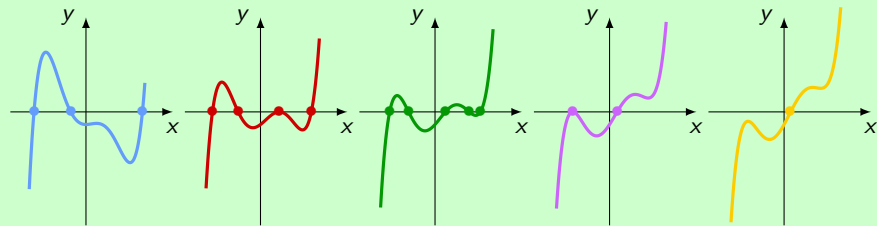
Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Alors en $+\infty$ et $-\infty$, P a la même limite que celle de son terme **de plus haut degré** $a_n X^n$.

Corollaire 2.8 (Racine d'un polynôme réel de degré impair)

Si P est de degré **impair**, alors P admet **au moins une racine réelle**.

Exemple 2.9 (Une famille de polynômes de degré 5)

Soit, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P = 10X^5 - 4X^4 - 14X^3 + 5X^2 + aX - 1$.



P_0 : 3 racines $P_{2,73,\dots}$: 4 racines P_4 : 5 racines $P_{5,57,\dots}$: 2 racines P_7 : 1 racine

- 1 Définitions
- 2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 3 Formule de Taylor
 - Dérivées successives
 - Énoncé
 - Exemple
- 4 Racines multiples
- 5 Factorisation

Définition 3.1 (Dérivées successives)

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le

polynôme dérivé P' d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$

et, par un procédé récurrent, ses **dérivées successives** $P^{(k)}$ pour tout entier $k \geq 2$.

Définition 3.1 (Dérivées successives)

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le

polynôme dérivé P' d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$

et, par un procédé récurrent, ses **dérivées successives** $P^{(k)}$ pour tout entier $k \geq 2$.

Par exemple : $P^{(2)} = P'' = \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k X^{k-2}$, $P^{(3)} = P''' = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)a_k X^{k-3}$.

Définition 3.1 (Dérivées successives)

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le

polynôme dérivé P' d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$

et, par un procédé récurrent, ses **dérivées successives** $P^{(k)}$ pour tout entier $k \geq 2$.

Par exemple : $P^{(2)} = P'' = \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k X^{k-2}$, $P^{(3)} = P''' = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)a_k X^{k-3}$.

On prolonge formellement cette définition au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Par convention, on pose $P^{(0)} = P$.

Définition 3.1 (Dérivées successives)

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le

polynôme dérivé P' d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$

et, par un procédé récurrent, ses **dérivées successives** $P^{(k)}$ pour tout entier $k \geq 2$.

Par exemple : $P^{(2)} = P'' = \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k X^{k-2}$, $P^{(3)} = P''' = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)a_k X^{k-3}$.

On prolonge formellement cette définition au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Par convention, on pose $P^{(0)} = P$.

Proposition 3.2 (Formule de Maclaurin)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(0) = k! a_k$. Ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Définition 3.1 (Dérivées successives)

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le

polynôme dérivé P' d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$

et, par un procédé récurrent, ses **dérivées successives** $P^{(k)}$ pour tout entier $k \geq 2$.

Par exemple : $P^{(2)} = P'' = \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k X^{k-2}$, $P^{(3)} = P''' = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)a_k X^{k-3}$.

On prolonge formellement cette définition au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Par convention, on pose $P^{(0)} = P$.

Proposition 3.2 (Formule de Maclaurin)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(0) = k! a_k$. Ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Corollaire 3.3

Une fonction polynôme est la fonction **nulle** ssi **tous** ses coefficients sont **nuls**.

Théorème 3.4 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ ($n \in \mathbb{N}$). On a la formule de **Taylor** :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

Théorème 3.4 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ ($n \in \mathbb{N}$). On a la formule de **Taylor** :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

En particulier, pour $\deg(P) \leq 3$, la formule de **Taylor** s'écrit :

- si $\deg(P) = 1$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha)$;
- si $\deg(P) = 2$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2$;
- si $\deg(P) = 3$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2 + \frac{P'''(\alpha)}{6}(X - \alpha)^3$.

Théorème 3.4 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ ($n \in \mathbb{N}$). On a la formule de **Taylor** :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

En particulier, pour $\deg(P) \leq 3$, la formule de **Taylor** s'écrit :

- si $\deg(P) = 1$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha)$;
- si $\deg(P) = 2$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2$;
- si $\deg(P) = 3$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2 + \frac{P'''(\alpha)}{6}(X - \alpha)^3$.

Remarque 3.5 (Formule de Taylor et formule du binôme)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $(X^n)^{(k)}(\alpha) = \frac{n!}{(n-k)!} \alpha^{n-k}$ et la formule de **Taylor** donne $X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (X - \alpha)^k$.

On retrouve la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X - \alpha) + \alpha$).

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X + 1$:

$$X^3 + 5X^2 + 10X + 10$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 & X+1 \\ 4 & X^2 + 4X + 6 \end{array}$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \mid X+1 \\ 4 \mid X^2 + 4X + 6 \mid X+1 \\ 3 \mid X+3 \end{array}$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r}
 X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \quad | \quad X+1 \\
 \underline{4} \quad | \quad X^2 + 4X + 6 \quad | \quad X+1 \\
 \quad \quad \underline{3} \quad | \quad X + 3 \quad | \quad X+1 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{2} \quad | \quad 1
 \end{array}$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r}
 X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \quad | \quad X+1 \\
 \underline{4} \quad | \quad X^2 + 4X + 6 \quad | \quad X+1 \\
 \quad \quad \underline{3} \quad | \quad X + 3 \quad | \quad X+1 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{2} \quad | \quad 1
 \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$X^3 + 5X^2 + 10X + 10$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r}
 X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \quad | \quad X+1 \\
 \underline{4} \quad | \quad X^2 + 4X + 6 \quad | \quad X+1 \\
 \quad \quad \underline{3} \quad | \quad X + 3 \quad | \quad X+1 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{2} \quad | \quad 1
 \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$X^3 + 5X^2 + 10X + 10 = (X^2 + 4X + 6)(X+1) + 4$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \mid X+1 \\ 4 \mid X^2 + 4X + 6 \mid X+1 \\ 3 \mid X + 3 \mid X+1 \\ 2 \mid 1 \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$\begin{aligned} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 &= (X^2 + 4X + 6)(X+1) + 4 \\ &= ((X+3)(X+1) + 3)(X+1) + 4 \end{aligned}$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \mid X+1 \\ 4 \mid X^2 + 4X + 6 \mid X+1 \\ 3 \mid X+3 \mid X+1 \\ 2 \mid 1 \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$\begin{aligned} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 &= (X^2 + 4X + 6)(X+1) + 4 \\ &= ((X+3)(X+1) + 3)(X+1) + 4 \\ &= (X+3)(X+1)^2 + 3(X+1) + 4 \end{aligned}$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \mid X+1 \\ 4 \mid X^2 + 4X + 6 \mid X+1 \\ 3 \mid X+3 \mid X+1 \\ 2 \mid 1 \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$\begin{aligned} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 &= (X^2 + 4X + 6)(X+1) + 4 \\ &= ((X+3)(X+1) + 3)(X+1) + 4 \\ &= (X+3)(X+1)^2 + 3(X+1) + 4 \\ &= (1(X+1) + 2)(X+1)^2 + 3(X+1) + 4 \end{aligned}$$

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :

$$P(-1) = 4 \quad P'(-1) = 3 \quad P''(-1) = 4 \quad P'''(-1) = 6$$

- La formule de **Taylor** fournit alors

$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X+1$:

$$\begin{array}{r} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 \mid X+1 \\ 4 \mid X^2 + 4X + 6 \mid X+1 \\ 3 \mid X+3 \mid X+1 \\ 2 \mid 1 \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$\begin{aligned} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 &= (X^2 + 4X + 6)(X+1) + 4 \\ &= ((X+3)(X+1) + 3)(X+1) + 4 \\ &= (X+3)(X+1)^2 + 3(X+1) + 4 \\ &= (1(X+1) + 2)(X+1)^2 + 3(X+1) + 4 \\ &= 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un **développement arithmétique en base $X+1$** .

Démonstration de la formule de Taylor

- ① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:

Démonstration de la formule de Taylor

- ① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:
 - a Calculons d'abord les dérivées successives de P_n . De proche en proche :
 - $P'_n = nX^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}$

Démonstration de la formule de Taylor

- ① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:
- a Calculons d'abord les dérivées successives de P_n . De proche en proche :

- $P'_n = nX^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}$
- $P''_n = n(n-1)X^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} X^{n-2}$

Démonstration de la formule de Taylor

- ① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:
- a Calculons d'abord les dérivées successives de P_n . De proche en proche :

- $P'_n = nX^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}$
- $P''_n = n(n-1)X^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} X^{n-2}$
- $P'''_n = n(n-1)(n-2)X^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!} X^{n-3}$

Démonstration de la formule de Taylor

- ① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:
- a Calculons d'abord les dérivées successives de P_n . De proche en proche :
- $P'_n = nX^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}$
 - $P''_n = n(n-1)X^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} X^{n-2}$
 - $P'''_n = n(n-1)(n-2)X^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!} X^{n-3}$
 - Plus généralement : $P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Démonstration de la formule de Taylor

- ① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:
- a Calculons d'abord les dérivées successives de P_n . De proche en proche :
- $P'_n = nX^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}$
 - $P''_n = n(n-1)X^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} X^{n-2}$
 - $P'''_n = n(n-1)(n-2)X^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!} X^{n-3}$
 - Plus généralement : $P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
 - En particulier pour $k = n$: $P_n^{(n)} = n!$, puis pour $k > n$, $P_n^{(k)} = 0$.

Démonstration de la formule de Taylor

① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:

Ⓐ Calculons d'abord les dérivées successives de P_n . De proche en proche :

- $P'_n = nX^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}$
- $P''_n = n(n-1)X^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} X^{n-2}$
- $P'''_n = n(n-1)(n-2)X^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!} X^{n-3}$
- Plus généralement : $P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- En particulier pour $k = n$: $P_n^{(n)} = n!$, puis pour $k > n$, $P_n^{(k)} = 0$.

Ⓑ D'autre part, la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X - \alpha) + \alpha$) fournit

$$P_n = X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (X - \alpha)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{n!}{(n-k)!} \alpha^{n-k} \right) (X - \alpha)^k$$

Démonstration de la formule de Taylor

① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:

Ⓐ Calculons d'abord les dérivées successives de P_n . De proche en proche :

- $P'_n = nX^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}$
- $P''_n = n(n-1)X^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} X^{n-2}$
- $P'''_n = n(n-1)(n-2)X^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!} X^{n-3}$
- Plus généralement : $P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- En particulier pour $k = n$: $P_n^{(n)} = n!$, puis pour $k > n$, $P_n^{(k)} = 0$.

Ⓑ D'autre part, la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X - \alpha) + \alpha$) fournit

$$P_n = X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (X - \alpha)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{n!}{(n-k)!} \alpha^{n-k} \right) (X - \alpha)^k$$

On remarque d'après les calculs préliminaires que la formule ci-dessus peut se réécrire selon

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

On obtient ainsi la formule de **Taylor** pour $P_n = X^n$.

Démonstration de la formule de Taylor

① On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:

a Calculons d'abord les dérivées successives de P_n . De proche en proche :

- $P'_n = nX^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} X^{n-1}$
- $P''_n = n(n-1)X^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} X^{n-2}$
- $P'''_n = n(n-1)(n-2)X^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!} X^{n-3}$
- Plus généralement : $P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- En particulier pour $k = n$: $P_n^{(n)} = n!$, puis pour $k > n$, $P_n^{(k)} = 0$.

b D'autre part, la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X - \alpha) + \alpha$) fournit

$$P_n = X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (X - \alpha)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{n!}{(n-k)!} \alpha^{n-k} \right) (X - \alpha)^k$$

On remarque d'après les calculs préliminaires que la formule ci-dessus peut se réécrire selon

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

On obtient ainsi la formule de **Taylor** pour $P_n = X^n$.

② On peut ensuite étendre simplement cette formule par « linéarité » à tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k P_n$.

- 1 Définitions
- 2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 3 Formule de Taylor
- 4 Racines multiples
 - Généralités
 - Cas réel
- 5 Factorisation

Définition 4.1 (Racines et multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Définition 4.1 (Racines et multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Si $\mu = 1$ (resp. $\mu = 2$, $\mu = 3$), α est dite **racine simple** (resp. **double**, **triple**) de P .
Lorsque $\mu \geq 2$ c'est une **racine multiple**.

Définition 4.1 (Racines et multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Si $\mu = 1$ (resp. $\mu = 2$, $\mu = 3$), α est dite **racine simple** (resp. **double**, **triple**) de P .
Lorsque $\mu \geq 2$ c'est une **racine multiple**.

Proposition 4.2 (Racines et divisibilité)

- ❶ Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines **distinctes** de P d'ordres de multiplicité respectifs $\mu_1, \dots, \mu_p$ alors P est divisible par le produit $(X - \alpha_1)^{\mu_1} \cdots (X - \alpha_p)^{\mu_p}$.

Définition 4.1 (Racines et multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Si $\mu = 1$ (resp. $\mu = 2$, $\mu = 3$), α est dite **racine simple** (resp. **double**, **triple**) de P . Lorsque $\mu \geq 2$ c'est une **racine multiple**.

Proposition 4.2 (Racines et divisibilité)

- 1 Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines **distinctes** de P d'ordres de multiplicité respectifs $\mu_1, \dots, \mu_p$ alors P est divisible par le produit $(X - \alpha_1)^{\mu_1} \cdots (X - \alpha_p)^{\mu_p}$.
- 2 Tout polynôme de degré n admet **au plus n racines** dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.

Définition 4.1 (Racines et multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Si $\mu = 1$ (resp. $\mu = 2$, $\mu = 3$), α est dite **racine simple** (resp. **double**, **triple**) de P . Lorsque $\mu \geq 2$ c'est une **racine multiple**.

Proposition 4.2 (Racines et divisibilité)

- ① Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines **distinctes** de P d'ordres de multiplicité respectifs $\mu_1, \dots, \mu_p$ alors P est divisible par le produit $(X - \alpha_1)^{\mu_1} \cdots (X - \alpha_p)^{\mu_p}$.
- ② Tout polynôme de degré n admet **au plus n racines** dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.

La formule de Taylor permet de donner une caractérisation de multiplicité.

Théorème 4.3 (Un critère de multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

α est racine de P d'ordre de multiplicité μ ssi $\left\{ \begin{array}{l} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et} \\ P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.$

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P .
Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P .
Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.
- La division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ fournit $P = (X - 1)^2 Q$ avec $Q = 2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$.

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P .
Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.
- La division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ fournit $P = (X - 1)^2 Q$ avec $Q = 2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$. Ainsi P admet au moins **2 racines distinctes** dont une **double**, soit au moins **3 racines comptées avec leur ordre de multiplicité**.

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P .
Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.
- La division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ fournit $P = (X - 1)^2 Q$ avec $Q = 2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$. Ainsi P admet au moins **2 racines distinctes** dont une **double**, soit au moins **3 racines comptées avec leur ordre de multiplicité**.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)^2(2X - 1)$.

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P .
Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.
- La division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ fournit $P = (X - 1)^2 Q$ avec $Q = 2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$. Ainsi P admet au moins **2 racines distinctes** dont une **double**, soit au moins **3 racines comptées avec leur ordre de multiplicité**.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)^2(2X - 1)$.

Exemple 4.5 (2nd degré : discriminant (facultatif))

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Posons $P = aX^2 + bX + c$.

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P .
Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.
- La division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ fournit $P = (X - 1)^2 Q$ avec $Q = 2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$. Ainsi P admet au moins **2 racines distinctes** dont une **double**, soit au moins **3 racines comptées avec leur ordre de multiplicité**.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)^2(2X - 1)$.

Exemple 4.5 (2nd degré : discriminant (facultatif))

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Posons $P = aX^2 + bX + c$.

Supposons que P admette une racine double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 2aX + b$: $P'(\alpha) = 0$. Nécessairement $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P .
Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.
- La division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ fournit $P = (X - 1)^2 Q$ avec $Q = 2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$. Ainsi P admet au moins **2 racines distinctes** dont une **double**, soit au moins **3 racines comptées avec leur ordre de multiplicité**.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)^2(2X - 1)$.

Exemple 4.5 (2nd degré : discriminant (facultatif))

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Posons $P = aX^2 + bX + c$.

Supposons que P admette une racine double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 2aX + b$: $P'(\alpha) = 0$. Nécessairement $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

On a $P(\alpha) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ que l'on reporte dans l'équation $P(\alpha) = 0$:

on obtient la **condition « discriminante »** $b^2 - 4ac = 0$.

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P .
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P .
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P .
Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.
- La division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ fournit $P = (X - 1)^2 Q$ avec $Q = 2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$. Ainsi P admet au moins **2 racines distinctes** dont une **double**, soit au moins **3 racines comptées avec leur ordre de multiplicité**.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)^2(2X - 1)$.

Exemple 4.5 (2nd degré : discriminant (facultatif))

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Posons $P = aX^2 + bX + c$.

Supposons que P admette une racine double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 2aX + b$: $P'(\alpha) = 0$. Nécessairement $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

On a $P(\alpha) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ que l'on reporte dans l'équation $P(\alpha) = 0$:

on obtient la **condition « discriminante »** $b^2 - 4ac = 0$.

Sous cette condition, $-\frac{b}{2a}$ est effectivement une **racine double** et $P = a\left(X - \frac{b}{2a}\right)^2$.

Démonstration du critère de multiplicité

- ① Supposons que P admette α pour **racine d'ordre de multiplicité μ** .
Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Démonstration du critère de multiplicité

- ① Supposons que P admette α pour **racine d'ordre de multiplicité μ** .
Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
Calculons les dérivées successives de P . De proche en proche :
- $P' = \mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q + (X - \alpha)^\mu Q'$

Démonstration du critère de multiplicité

- ① Supposons que P admette α pour **racine d'ordre de multiplicité μ** .
Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
Calculons les dérivées successives de P . De proche en proche :

- $P' = \mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q + (X - \alpha)^\mu Q'$
- $P'' = \mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q + 2\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q' + (X - \alpha)^\mu Q''$

Démonstration du critère de multiplicité

- ① Supposons que P admette α pour **racine d'ordre de multiplicité μ** .
Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
Calculons les dérivées successives de P . De proche en proche :

- $P' = \mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q + (X - \alpha)^\mu Q'$
- $P'' = \mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q + 2\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q' + (X - \alpha)^\mu Q''$
- $P''' = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)(X - \alpha)^{\mu-3}Q + 3\mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q' + 3\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q'' + (X - \alpha)^\mu Q'''$

Démonstration du critère de multiplicité

- ① Supposons que P admette α pour **racine d'ordre de multiplicité μ** .
 Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
 Calculons les dérivées successives de P . De proche en proche :

- $P' = \mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q + (X - \alpha)^\mu Q'$
- $P'' = \mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q + 2\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q' + (X - \alpha)^\mu Q''$
- $P''' = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)(X - \alpha)^{\mu-3}Q + 3\mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q' + 3\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q'' + (X - \alpha)^\mu Q'''$
- Plus généralement, pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, \mu\}$:

$$P^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \dots (\mu - k + i + 1)(X - \alpha)^{\mu-k+i} Q^{(i)}$$

Démonstration du critère de multiplicité

- ① Supposons que P admette α pour **racine d'ordre de multiplicité μ** .
 Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
 Calculons les dérivées successives de P . De proche en proche :

- $P' = \mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q + (X - \alpha)^\mu Q'$
- $P'' = \mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q + 2\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q' + (X - \alpha)^\mu Q''$
- $P''' = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)(X - \alpha)^{\mu-3}Q + 3\mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q' + 3\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q'' + (X - \alpha)^\mu Q'''$
- Plus généralement, pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, \mu\}$:

$$P^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \dots (\mu - k + i + 1)(X - \alpha)^{\mu-k+i} Q^{(i)}$$

- En particulier pour $k = \mu$:

$$\begin{aligned} P^{(\mu)} &= \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu}{i} \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \dots (i + 1)(X - \alpha)^i Q^{(i)} \\ &= \mu! Q + \sum_{i=1}^{\mu} \binom{\mu}{i} \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \dots (i + 1)(X - \alpha)^i Q^{(i)} \end{aligned}$$

Démonstration du critère de multiplicité

- ① Supposons que P admette α pour **racine d'ordre de multiplicité μ** .
 Il existe alors un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
 Calculons les dérivées successives de P . De proche en proche :

- $P' = \mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q + (X - \alpha)^\mu Q'$
- $P'' = \mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q + 2\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q' + (X - \alpha)^\mu Q''$
- $P''' = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)(X - \alpha)^{\mu-3}Q + 3\mu(\mu - 1)(X - \alpha)^{\mu-2}Q' + 3\mu(X - \alpha)^{\mu-1}Q'' + (X - \alpha)^\mu Q'''$
- Plus généralement, pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, \mu\}$:

$$P^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \dots (\mu - k + i + 1)(X - \alpha)^{\mu-k+i} Q^{(i)}$$

- En particulier pour $k = \mu$:

$$\begin{aligned} P^{(\mu)} &= \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu}{i} \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \dots (i + 1)(X - \alpha)^i Q^{(i)} \\ &= \mu! Q + \sum_{i=1}^{\mu} \binom{\mu}{i} \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \dots (i + 1)(X - \alpha)^i Q^{(i)} \end{aligned}$$

On constate au vu de ces calculs que $\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) = \mu! Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Démonstration du critère de multiplicité

- ② Réciproquement, supposons que
$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration du critère de multiplicité

- ② Réciproquement, supposons que $\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

D'après la formule de Taylor, en notant n le degré de P ($n \geq \mu$) :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=\mu}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

Démonstration du critère de multiplicité

- ② Réciproquement, supposons que $\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

D'après la formule de Taylor, en notant n le degré de P ($n \geq \mu$) :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=\mu}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \\ &= \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} (X - \alpha)^\mu + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!} (X - \alpha)^{\mu+1} + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^n \end{aligned}$$

Démonstration du critère de multiplicité

- ② Réciproquement, supposons que $\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

D'après la formule de Taylor, eqn notant n le degré de P ($n \geq \mu$) :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=\mu}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \\ &= \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} (X - \alpha)^\mu + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!} (X - \alpha)^{\mu+1} + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^n \\ &= (X - \alpha)^\mu \left[\frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!} (X - \alpha) + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^{n-\mu} \right] \end{aligned}$$

Démonstration du critère de multiplicité

- ② Réciproquement, supposons que $\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

D'après la formule de Taylor, eqn notant n le degré de P ($n \geq \mu$) :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=\mu}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \\ &= \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} (X - \alpha)^\mu + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!} (X - \alpha)^{\mu+1} + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^n \\ &= (X - \alpha)^\mu \left[\frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!} (X - \alpha) + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^{n-\mu} \right] \end{aligned}$$

On voit alors que P est de la forme $P = (X - \alpha)^\mu Q$ avec $Q(\alpha) = \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} \neq 0$.

Démonstration du critère de multiplicité

- ② Réciproquement, supposons que $\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

D'après la formule de Taylor, eqn notant n le degré de P ($n \geq \mu$) :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = \sum_{k=\mu}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \\ &= \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} (X - \alpha)^\mu + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!} (X - \alpha)^{\mu+1} + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^n \\ &= (X - \alpha)^\mu \left[\frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!} (X - \alpha) + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^{n-\mu} \right] \end{aligned}$$

On voit alors que P est de la forme $P = (X - \alpha)^\mu Q$ avec $Q(\alpha) = \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} \neq 0$.

Ainsi α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P .

Exemple 4.6 (Cas réel : racines doubles et triples)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de P .

Exemple 4.6 (Cas réel : racines doubles et triples)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de P .

① **α est une racine double de P ssi**

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)^2 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0,$$

ou encore ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 4.6 (Cas réel : racines doubles et triples)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de P .

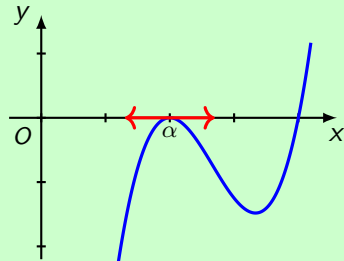
① α est une racine double de P ssi

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)^2 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0,$$

ou encore ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0.$$

Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe (Ox) comme **tangente horizontale** en α et sa **concavité** au voisinage de α est renseignée par le signe de $P''(\alpha)$.



Exemple 4.6 (Cas réel : racines doubles et triples)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de P .

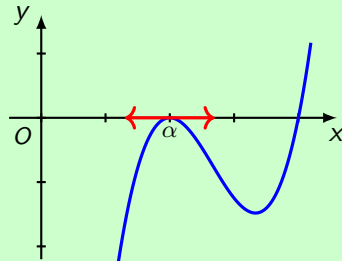
① α est une racine double de P ssi

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)^2 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0,$$

ou encore ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0.$$

Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe (Ox) comme **tangente horizontale** en α et sa **concavité** au voisinage de α est renseignée par le signe de $P''(\alpha)$.



② α est une racine triple de P ssi

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)^3 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0$$

ou encore ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0 \text{ et } P'''(\alpha) \neq 0.$$

Exemple 4.6 (Cas réel : racines doubles et triples)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de P .

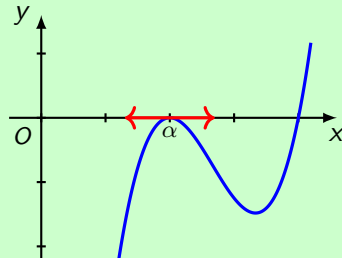
① α est une **racine double** de P ssi

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)^2 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0,$$

ou encore ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0.$$

Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe (Ox) comme **tangente horizontale** en α et sa **concavité** au voisinage de α est renseignée par le signe de $P''(\alpha)$.



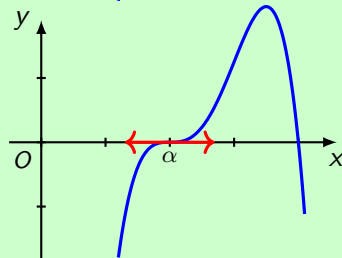
② α est une **racine triple** de P ssi

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)^3 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0$$

ou encore ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0 \text{ et } P'''(\alpha) \neq 0.$$

Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe (Ox) comme **tangente horizontale** en α et **change de concavité** au voisinage de α . On dit que le point de coordonnées $(\alpha, 0)$ est un point d'**inflexion**.



Exemple 4.6 (Cas réel : racines doubles et triples)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de P .

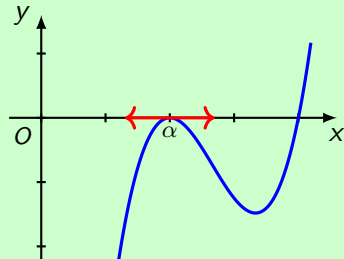
① α est une **racine double** de P ssi

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)^2 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0,$$

ou encore ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0.$$

Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe (Ox) comme **tangente horizontale** en α et sa **concavité** au voisinage de α est renseignée par le signe de $P''(\alpha)$.



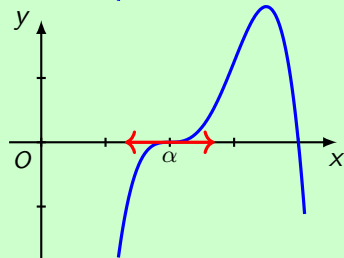
② α est une **racine triple** de P ssi

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)^3 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0$$

ou encore ssi

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0 \text{ et } P'''(\alpha) \neq 0.$$

Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe (Ox) comme **tangente horizontale** en α et **change de concavité** au voisinage de α . On dit que le point de coordonnées $(\alpha, 0)$ est un point d'**inflexion**.



Le cas d'une racine d'ordre de multiplicité quelconque conduit à une analyse similaire, la discussion portant sur la **parité** de l'ordre.

Exemple 4.7 (Cas réel : position relative courbe/tangente)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}_P$ de P admet une **tangente** $\mathcal{T}$ en α d'équation $y = P'(\alpha)(x - \alpha) + P(\alpha)$. La formule de Taylor permet d'étudier la **position locale** de la courbe par rapport à sa tangente.

Exemple 4.7 (Cas réel : position relative courbe/tangente)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}_P$ de P admet une **tangente** $\mathcal{T}$ en α d'équation $y = P'(\alpha)(x - \alpha) + P(\alpha)$. La formule de Taylor permet d'étudier la **position locale** de la courbe par rapport à sa tangente.

❶ Si $P''(\alpha) \neq 0$, alors

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + (X - \alpha)^2 Q$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha) = \frac{1}{2} P''(\alpha)$.

Exemple 4.7 (Cas réel : position relative courbe/tangente)

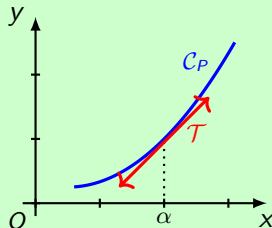
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}_P$ de P admet une **tangente** $\mathcal{T}$ en α d'équation $y = P'(\alpha)(x - \alpha) + P(\alpha)$. La formule de Taylor permet d'étudier la **position locale** de la courbe par rapport à sa tangente.

❶ Si $P''(\alpha) \neq 0$, alors

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + (X - \alpha)^2 Q$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha) = \frac{1}{2} P''(\alpha)$.

Lorsque $P''(\alpha) > 0$ (resp. $P''(\alpha) < 0$),
 $\mathcal{C}_P$ se situe **localement au-dessus**
(resp. **au-dessous**) de $\mathcal{T}$.



Exemple 4.7 (Cas réel : position relative courbe/tangente)

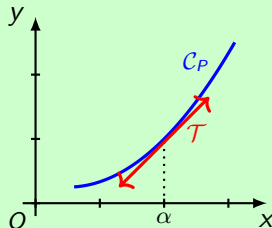
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}_P$ de P admet une **tangente** $\mathcal{T}$ en α d'équation $y = P'(\alpha)(x - \alpha) + P(\alpha)$. La formule de Taylor permet d'étudier la **position locale** de la courbe par rapport à sa tangente.

❶ Si $P''(\alpha) \neq 0$, alors

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + (X - \alpha)^2 Q$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha) = \frac{1}{2} P''(\alpha)$.

Lorsque $P''(\alpha) > 0$ (resp. $P''(\alpha) < 0$),
 $\mathcal{C}_P$ se situe **localement au-dessus**
 (resp. **au-dessous**) de $\mathcal{T}$.



❷ Si $P''(\alpha) = 0$ et $P'''(\alpha) \neq 0$, alors

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + (X - \alpha)^3 Q$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha) = \frac{1}{6} P'''(\alpha)$.

Exemple 4.7 (Cas réel : position relative courbe/tangente)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}_P$ de P admet une **tangente** $\mathcal{T}$ en α d'équation $y = P'(\alpha)(x - \alpha) + P(\alpha)$. La formule de Taylor permet d'étudier la **position locale** de la courbe par rapport à sa tangente.

❶ Si $P''(\alpha) \neq 0$, alors

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + (X - \alpha)^2 Q$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha) = \frac{1}{2} P''(\alpha)$.

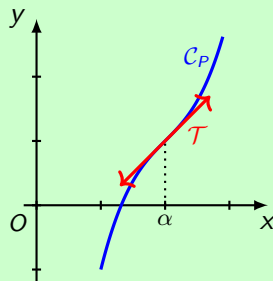
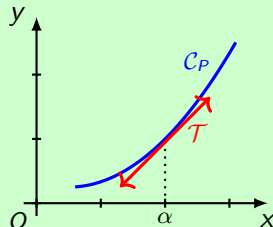
Lorsque $P''(\alpha) > 0$ (resp. $P''(\alpha) < 0$),
 $\mathcal{C}_P$ se situe **localement au-dessus**
 (resp. **au-dessous**) de $\mathcal{T}$.

❷ Si $P''(\alpha) = 0$ et $P'''(\alpha) \neq 0$, alors

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + (X - \alpha)^3 Q$$

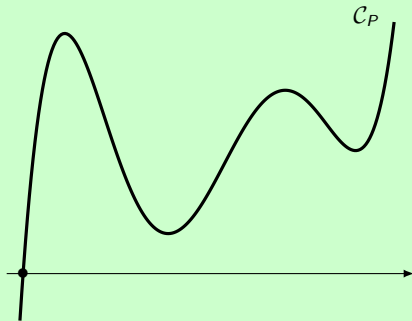
où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha) = \frac{1}{6} P'''(\alpha)$.

Dans ce cas, $\mathcal{C}_P$ se situe **localement de part et d'autre** de $\mathcal{T}$. La courbe traverse sa tangente en α et **change de concavité** au voisinage de α . Elle présente au point de coordonnées $(\alpha, P(\alpha))$ un point d'**inflexion**.



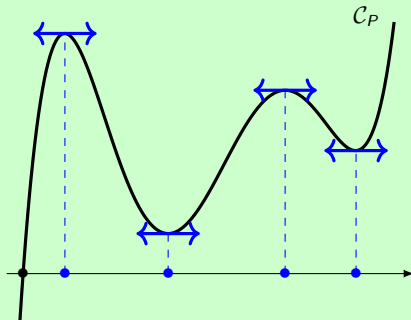
Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous.
Que peut-on dire du degré de P ?



Exemple 4.8 (Courbe et degré)

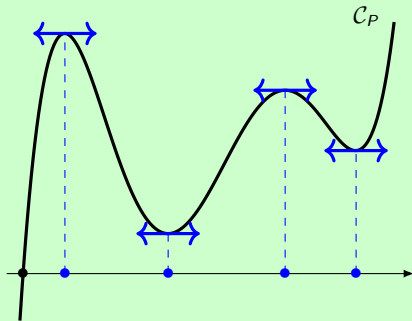
Soit P le polynôme représenté ci-dessous.
Que peut-on dire du degré de P ?



On observe 4 tangentes horizontales

Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous.
Que peut-on dire du degré de P ?



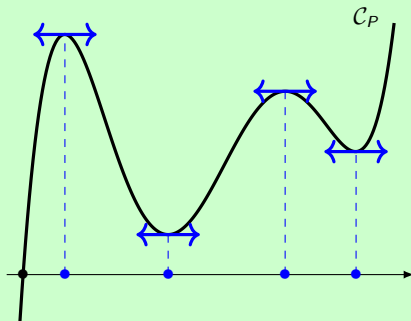
On observe 4 tangentes horizontales

$\Rightarrow P'$ a 4 racines réelles

$\Rightarrow \deg P' \geq 4$

Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous.
Que peut-on dire du degré de P ?



On observe 4 tangentes horizontales

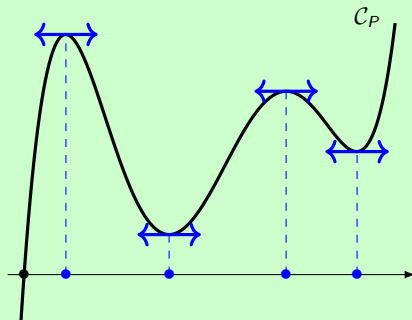
$\Rightarrow P'$ a 4 racines réelles

$\Rightarrow \deg P' \geq 4$

$\Rightarrow \deg P \geq 5$

Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de P ?



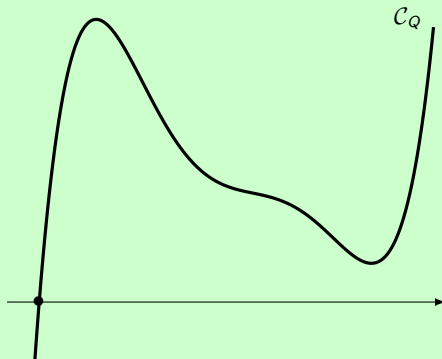
On observe 4 tangentes horizontales

$\Rightarrow P'$ a 4 racines réelles

$\Rightarrow \deg P' \geq 4$

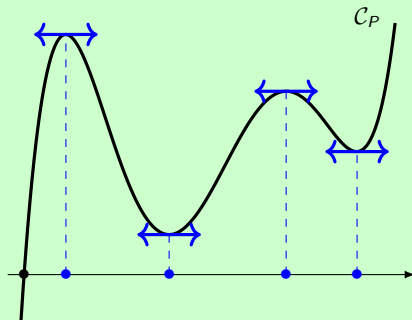
$\Rightarrow \deg P \geq 5$

Soit Q le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de Q ?



Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de P ?



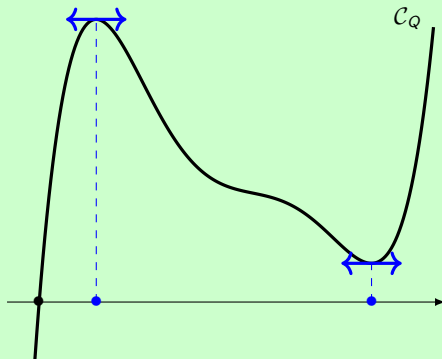
On observe 4 tangentes horizontales

$\Rightarrow P'$ a 4 racines réelles

$\Rightarrow \deg P' \geq 4$

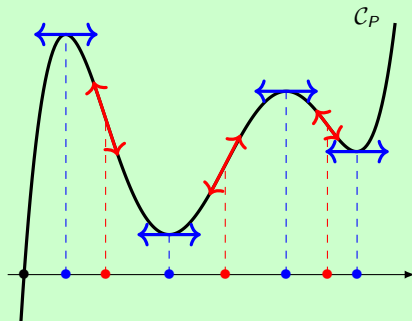
$\Rightarrow \deg P \geq 5$

Soit Q le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de Q ?



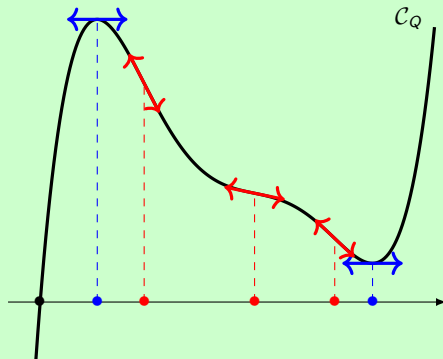
Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de P ?



On observe 4 tangentes horizontales
 $\Rightarrow P'$ a 4 racines réelles
 $\Rightarrow \deg P' \geq 4$
 $\Rightarrow \deg P \geq 5$

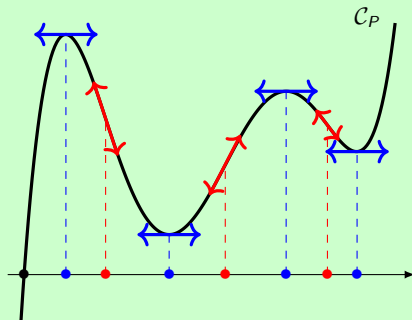
Soit Q le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de Q ?



On observe 3 points d'inflexion

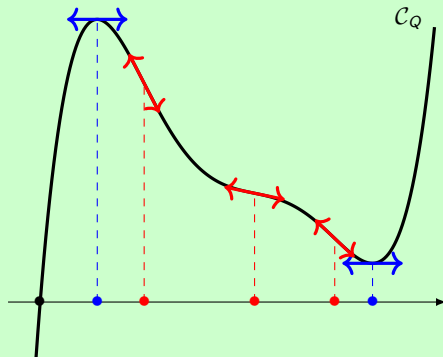
Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de P ?



On observe 4 tangentes horizontales
 $\Rightarrow P'$ a 4 racines réelles
 $\Rightarrow \deg P' \geq 4$
 $\Rightarrow \deg P \geq 5$

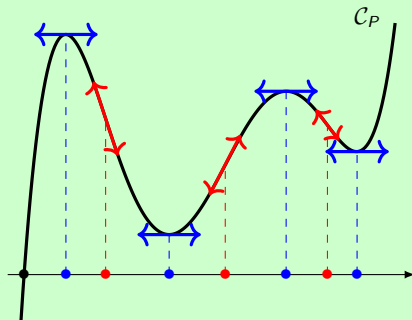
Soit Q le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de Q ?



On observe 3 points d'inflexion
 $\Rightarrow Q''$ a 3 racines réelles
 $\Rightarrow \deg Q'' \geq 3$

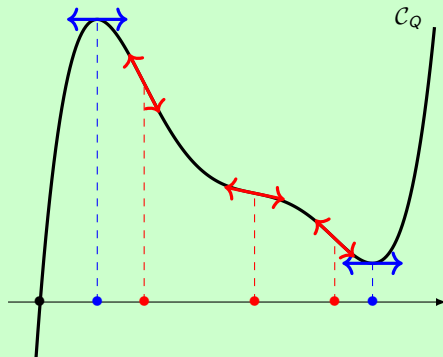
Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de P ?



On observe 4 tangentes horizontales
 $\Rightarrow P'$ a 4 racines réelles
 $\Rightarrow \deg P' \geq 4$
 $\Rightarrow \deg P \geq 5$

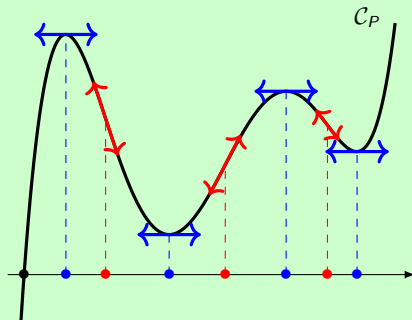
Soit Q le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de Q ?



On observe 3 points d'inflexion
 $\Rightarrow Q''$ a 3 racines réelles
 $\Rightarrow \deg Q'' \geq 3$
 $\Rightarrow \deg Q' \geq 4$

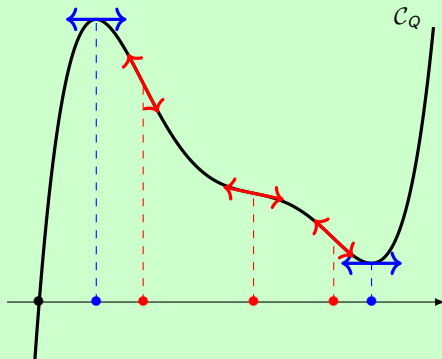
Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de P ?



On observe 4 tangentes horizontales
 $\Rightarrow P'$ a 4 racines réelles
 $\Rightarrow \deg P' \geq 4$
 $\Rightarrow \deg P \geq 5$

Soit Q le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de Q ?



On observe 3 points d'inflexion
 $\Rightarrow Q''$ a 3 racines réelles
 $\Rightarrow \deg Q'' \geq 3$
 $\Rightarrow \deg Q' \geq 4$
 $\Rightarrow \deg Q \geq 5$

- 1 Définitions
- 2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- 3 Formule de Taylor
- 4 Racines multiples
- 5 Factorisation
 - Factorisation sur $\mathbb{C}$
 - Somme et produit des racines
 - Factorisation sur $\mathbb{R}$

Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'algèbre : d'Alembert-Gauss)

*Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet **au moins** une racine dans $\mathbb{C}$.*

Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'algèbre : d'Alembert-Gauss)

*Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet **au moins** une racine dans $\mathbb{C}$.*

Corollaire 5.2

*Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet **exactement** n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'algèbre : d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet **au moins** une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 5.2

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet **exactement** n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.

Théorème 5.3 (Factorisation sur $\mathbb{C}$)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines **complexes** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ et A le coefficient de son monôme de plus haut degré. Le polynôme P se **factorise** sur $\mathbb{C}$ selon

$$P = A(X - \alpha_1)^{\mu_1}(X - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (X - \alpha_p)^{\mu_p} = A \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{\mu_k}.$$

Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'algèbre : d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet **au moins** une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 5.2

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet **exactement** n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.

Théorème 5.3 (Factorisation sur $\mathbb{C}$)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines **complexes** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ et A le coefficient de son monôme de plus haut degré. Le polynôme P se **factorise** sur $\mathbb{C}$ selon

$$P = A(X - \alpha_1)^{\mu_1}(X - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (X - \alpha_p)^{\mu_p} = A \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{\mu_k}.$$

Remarque 5.4 (Somme des multiplicités)

La somme des multiplicités des racines sur $\mathbb{C}$ d'un polynôme coïncide avec son degré :

$$\sum_{k=1}^p \mu_k = \deg(P).$$

Corollaire 5.5 (Somme et produit des racines)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** et le **produit** des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Corollaire 5.5 (Somme et produit des racines)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** et le **produit** des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 5.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $\deg(P) = 2$: $P = aX^2 + bX + c = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

Corollaire 5.5 (Somme et produit des racines)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** et le **produit** des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 5.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $\deg(P) = 2$: $P = aX^2 + bX + c = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

- Cas $\deg(P) = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$

Corollaire 5.5 (Somme et produit des racines)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** et le **produit** des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 5.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $\deg(P) = 2$: $P = aX^2 + bX + c = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$
 - Cas $\deg(P) = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$
- Complément (facultatif) :** $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = \frac{c}{a}.$

Corollaire 5.5 (Somme et produit des racines)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** et le **produit** des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 5.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $\deg(P) = 2$: $P = aX^2 + bX + c = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

- Cas $\deg(P) = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$

Complément (facultatif) : $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = \frac{c}{a}$.

- Cas $\deg(P) = 4$: $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = \frac{e}{a}.$$

Corollaire 5.5 (Somme et produit des racines)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** et le **produit** des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 5.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $\deg(P) = 2$: $P = aX^2 + bX + c = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

- Cas $\deg(P) = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$

Complément (facultatif) : $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = \frac{c}{a}.$

- Cas $\deg(P) = 4$: $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = \frac{e}{a}.$$

Complément (facultatif) : $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4 = \frac{c}{a}$
 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = -\frac{d}{a}$

Proposition 5.7 (Polynôme à coefficients réels et conjugaison)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si ζ est une racine **complexe non réelle** de multiplicité ν de P , alors $\bar{\zeta}$ est également une racine de multiplicité ν de P .

Proposition 5.7 (Polynôme à coefficients réels et conjugaison)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si ζ est une racine **complexe non réelle** de multiplicité ν de P , alors $\bar{\zeta}$ est également une racine de multiplicité ν de P . Dans ce cas, P est divisible par $(X - \zeta)^\nu (X - \bar{\zeta})^\nu = (X^2 + aX + b)^\nu$ où $a = -2\Re(\zeta) \in \mathbb{R}$ et $b = |\zeta|^2 \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.7 (Polynôme à coefficients réels et conjugaison)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si ζ est une racine **complexe non réelle** de multiplicité ν de P , alors $\bar{\zeta}$ est également une racine de multiplicité ν de P . Dans ce cas, P est divisible par $(X - \zeta)^\nu (X - \bar{\zeta})^\nu = (X^2 + aX + b)^\nu$ où $a = -2\Re(\zeta) \in \mathbb{R}$ et $b = |\zeta|^2 \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.8 (Factorisation sur $\mathbb{R}$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note :

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines **réelles** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$;
- $\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \dots, \zeta_q, \bar{\zeta}_q$ ses racines **complexes non réelles deux à deux conjuguées** distinctes de multiplicités respectives $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$;
- A le coefficient de son monôme de plus haut degré.

Proposition 5.7 (Polynôme à coefficients réels et conjugaison)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si ζ est une racine **complexe non réelle** de multiplicité ν de P , alors $\bar{\zeta}$ est également une racine de multiplicité ν de P . Dans ce cas, P est divisible par $(X - \zeta)^\nu (X - \bar{\zeta})^\nu = (X^2 + aX + b)^\nu$ où $a = -2\Re(\zeta) \in \mathbb{R}$ et $b = |\zeta|^2 \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.8 (Factorisation sur $\mathbb{R}$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note :

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines **réelles** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$;
- $\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \dots, \zeta_q, \bar{\zeta}_q$ ses racines **complexes non réelles deux à deux conjuguées** distinctes de multiplicités respectives $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$;
- A le coefficient de son monôme de plus haut degré.

Le polynôme P se **factorise** sur $\mathbb{R}$ selon

$$\begin{aligned} P &= A (X - \alpha_1)^{\mu_1} (X - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (X - \alpha_p)^{\mu_p} \\ &\quad \times (X^2 + a_1X + b_1)^{\nu_1} (X^2 + a_2X + b_2)^{\nu_2} \dots (X^2 + a_qX + b_q)^{\nu_q} \\ &= A \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^q (X^2 + a_kX + b_k)^{\nu_k} \end{aligned}$$

où $a_k = -2\Re(\zeta_k)$ et $b_k = |\zeta_k|^2$.

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$.

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4 e^{i(4\theta)} = 4 e^{i\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$,

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4 e^{i(4\theta)} = 4 e^{i\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, soit $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \right\}$.

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4 e^{i(4\theta)} = 4 e^{i\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, soit $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \right\}$.

Les **racines de P dans $\mathbb{C}$** sont donc

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i & \zeta_2 &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i \\ \zeta_3 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i = \bar{\zeta}_1 & \zeta_4 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -1 - i = \bar{\zeta}_2\end{aligned}$$

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4 e^{i(4\theta)} = 4 e^{i\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, soit $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \right\}$.

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont donc

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i & \zeta_2 &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i \\ \zeta_3 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i = \bar{\zeta}_1 & \zeta_4 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -1 - i = \bar{\zeta}_2 \end{aligned}$$

Remarque : la somme et le produit des racines valent $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 0$ et $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 = 4$.

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4 e^{i(4\theta)} = 4 e^{i\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, soit $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \right\}$.

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont donc

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i & \zeta_2 &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i \\ \zeta_3 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i = \bar{\zeta}_1 & \zeta_4 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -1 - i = \bar{\zeta}_2 \end{aligned}$$

Remarque : la somme et le produit des racines valent $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 0$ et $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 = 4$.

- D'où la **factorisation sur $\mathbb{C}$** :

$$P = (X - \zeta_1)(X - \zeta_2)(X - \zeta_3)(X - \zeta_4).$$

Exemple 5.9 (Racines quatrième de -4)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité**.

Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples**.

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4 e^{i(4\theta)} = 4 e^{i\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, soit $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \right\}$.

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont donc

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i & \zeta_2 &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i \\ \zeta_3 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i = \bar{\zeta}_1 & \zeta_4 &= \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -1 - i = \bar{\zeta}_2 \end{aligned}$$

Remarque : la somme et le produit des racines valent $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 0$ et $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 = 4$.

- D'où la **factorisation sur $\mathbb{C}$** :

$$P = (X - \zeta_1)(X - \zeta_2)(X - \zeta_3)(X - \zeta_4).$$

- Puis la **factorisation sur $\mathbb{R}$** :

$$P = (X - \zeta_1)(X - \bar{\zeta}_1)(X - \zeta_2)(X - \bar{\zeta}_2) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

Sinus et produit eulérien

Aimé Lachal

[http ://math.univ-lyon1.fr/_alachal/diaporamas/
diaporama_sinus_eulerien.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/_alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf)

Notions à retenir

- Notations générales
- Division euclidienne
- Formule de Taylor
- Racines (multiplicité, caractérisation, factorisation sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$)
- Allure des graphes

Annexes
Autour de la parabole
Compléments

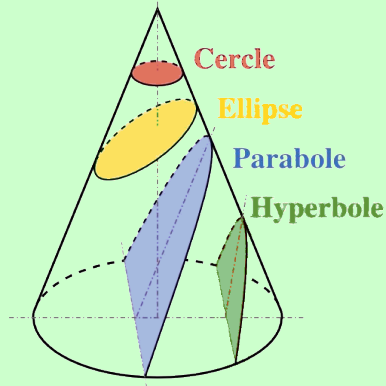
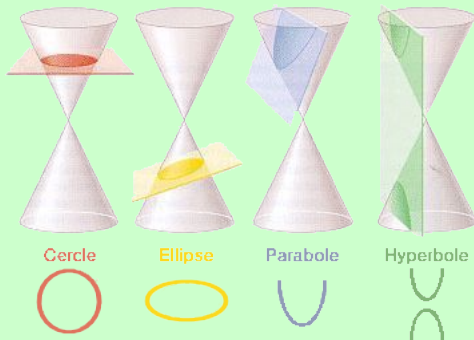
- 6 Annexe A – Autour de la parabole
 - Parabole et géométrie
 - Paraboles dans la nature
 - Visualisation des racines complexes
- 7 Annexe B – Compléments

Exemple A.1 (Parabole et géométrie)

La **parabole** est une courbe appartenant à la famille des **coniques**, sections planes d'une cône 3D de révolution.

Les sections obtenues sont de plusieurs types selon l'inclinaison du plan de coupe relativement au cône :

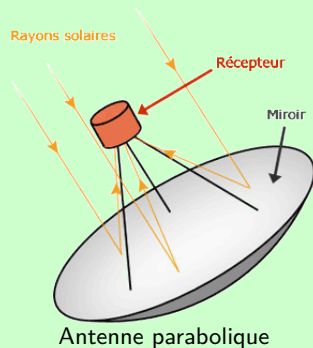
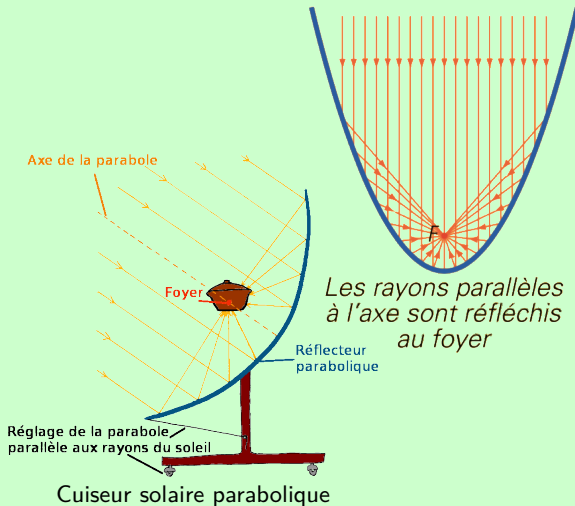
- coniques **non dégénérées** (lorsque le plan ne contient pas le sommet) :
ellipses (incluant les cercles), **paraboles**, **hyperboles** ;
- coniques **dégénérées** (lorsque le plan contient le sommet) :
une droite, deux droites, un point.



Exemple A.2 (Paraboles dans la nature)

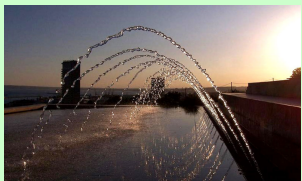
Une **parabole** peut être caractérisée par son **axe de symétrie** et son **foyer**.

Une propriété essentielle est la **convergence** des rayons provenant de l'infini parallèlement à l'axe vers son foyer.

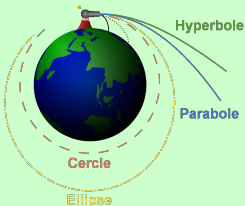


Exemple A.2 (Paraboles dans la nature)

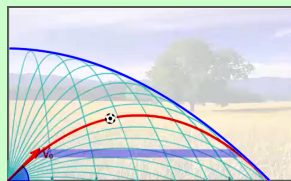
La **parabole** est également une courbe naturellement liée à la **gravité** : trajectoires balistique et satellitaire, ponts suspendus, viaducs...



Jets d'eau



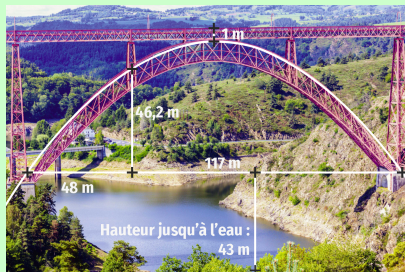
Canon de Newton



Lancer d'un projectile



Hammersmith Bridge (Londres)



Viaduc de Garabit (Cantal)

Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

Considérons le polynôme $P = X^2 + aX + b$
décomposé selon $P = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec
 $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

Considérons le polynôme $P = X^2 + aX + b$
décomposé selon $P = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec
 $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

Les racines de P sont les complexes **conjugués** $\zeta = \alpha + i\beta$ et $\bar{\zeta} = \alpha - i\beta$.

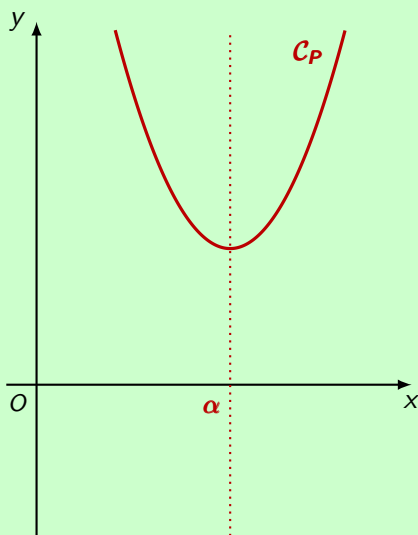
Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

Considérons le polynôme $P = X^2 + aX + b$ décomposé selon $P = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

Les racines de P sont les complexes **conjugués** $\zeta = \alpha + i\beta$ et $\bar{\zeta} = \alpha - i\beta$.

Notons $\mathcal{C}_P$ la parabole représentative de P



Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

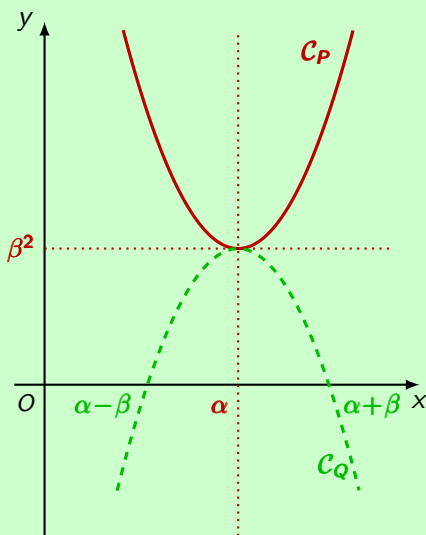
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

Considérons le polynôme $P = X^2 + aX + b$ décomposé selon $P = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

Les racines de P sont les complexes conjugués $\zeta = \alpha + i\beta$ et $\bar{\zeta} = \alpha - i\beta$.

Notons $\mathcal{C}_P$ la parabole représentative de P et traçons sa symétrique par rapport à la droite d'équation $y = \beta^2$.

C'est la parabole $\mathcal{C}_Q$ représentative du polynôme $Q = \beta^2 - (X - \alpha)^2$ qui a pour racines réelles $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.



Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

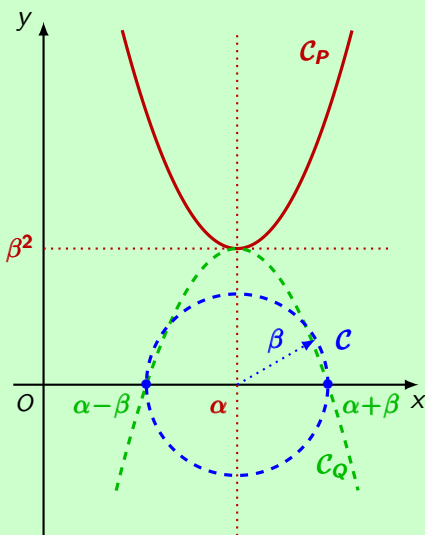
Considérons le polynôme $P = X^2 + aX + b$ décomposé selon $P = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

Les racines de P sont les complexes conjugués $\zeta = \alpha + i\beta$ et $\bar{\zeta} = \alpha - i\beta$.

Notons $\mathcal{C}_P$ la parabole représentative de P et traçons sa symétrique par rapport à la droite d'équation $y = \beta^2$.

C'est la parabole $\mathcal{C}_Q$ représentative du polynôme $Q = \beta^2 - (X - \alpha)^2$ qui a pour racines réelles $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.

Traçons alors le cercle $\mathcal{C}$ centré au point $(\alpha, 0)$ passant par les points d'intersection de la parabole $\mathcal{C}_Q$ et de l'axe (Ox) . Ces points ont pour coordonnées $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$. Le cercle $\mathcal{C}$ a donc pour rayon β .



Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

Considérons le polynôme $P = X^2 + aX + b$ décomposé selon $P = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

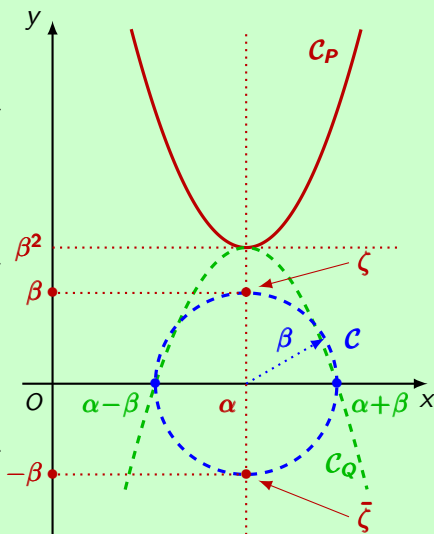
Les racines de P sont les complexes conjugués $\zeta = \alpha + i\beta$ et $\bar{\zeta} = \alpha - i\beta$.

Notons C_P la parabole représentative de P et traçons sa symétrique par rapport à la droite d'équation $y = \beta^2$.

C'est la parabole C_Q représentative du polynôme $Q = \beta^2 - (X - \alpha)^2$ qui a pour racines réelles $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.

Traçons alors le cercle C centré au point $(\alpha, 0)$ passant par les points d'intersection de la parabole C_Q et de l'axe (Ox) . Ces points ont pour coordonnées $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$. Le cercle C a donc pour rayon β .

On construit finalement les racines ζ et $\bar{\zeta}$ comme affixes des points d'intersection de l'axe de la parabole C_P avec le cercle C .



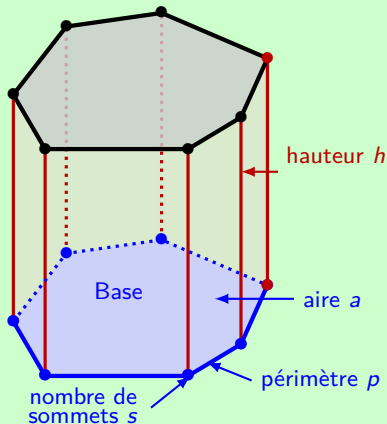
6 Annexe A – Autour de la parabole

7 Annexe B – Compléments

- Prisme et multiplication polynômiale
- 3^e degré : discriminant
- Interpolation de Lagrange

Exemple B.1 (Prisme et multiplication polynômiale)

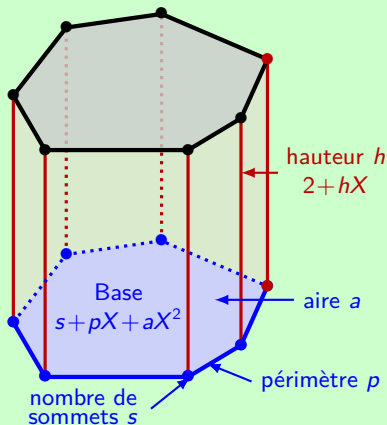
On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p , d'**aire** a , les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.



Exemple B.1 (Prisme et multiplication polynômiale)

On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p , d'**aire** a , les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.



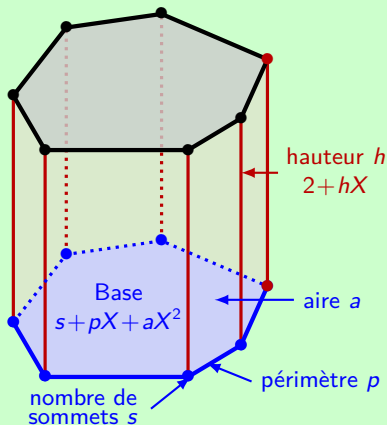
Exemple B.1 (Prisme et multiplication polynômiale)

On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p , d'**aire** a , les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.

On a

$$PQ = 2s + (sh + 2p)X + (ph + 2a)X^2 + ahX^3$$



Exemple B.1 (Prisme et multiplication polynômiale)

On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p , d'**aire** a , les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

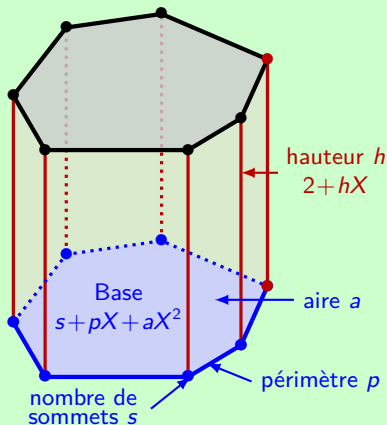
On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.

On a

$$PQ = 2s + (sh + 2p)X + (ph + 2a)X^2 + ahX^3$$

Remarque : les coefficients du polynôme PQ fournissent les informations suivantes pour le prisme :

- nombre de **sommets** : $2s$
- **aire** : $ph + 2a$
- **périmètre** : $sh + 2p$
- **volume** : ah



Exemple B.2 (3^e degré : discriminant (facultatif))

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p, q \neq 0$. Posons $P = X^3 + pX + q$.

Exemple B.2 (3^e degré : discriminant (facultatif))

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p, q \neq 0$. Posons $P = X^3 + pX + q$.

Supposons que P admette une racine au moins double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 3X^2 + p$: $P'(\alpha) = 0$.

Nécessairement α est une racine carrée de $-\frac{p}{3}$. On voit que $\alpha \neq 0$.

Exemple B.2 (3^e degré : discriminant (facultatif))

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p, q \neq 0$. Posons $P = X^3 + pX + q$.

Supposons que P admette une racine au moins double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 3X^2 + p$: $P'(\alpha) = 0$.

Nécessairement α est une racine carrée de $-\frac{p}{3}$. On voit que $\alpha \neq 0$.

De plus, $P'' = 6X$. Donc $P''(\alpha) \neq 0$ et α n'est pas racine triple.

Exemple B.2 (3^e degré : discriminant (facultatif))

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p, q \neq 0$. Posons $P = X^3 + pX + q$.

Supposons que P admette une racine au moins double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 3X^2 + p$: $P'(\alpha) = 0$.

Nécessairement α est une racine carrée de $-\frac{p}{3}$. On voit que $\alpha \neq 0$.

De plus, $P'' = 6X$. Donc $P''(\alpha) \neq 0$ et α n'est pas racine triple.

On a $P(\alpha) = \alpha(\alpha^2 + p) + q = \frac{2p}{3}\alpha + q$. On voit sous cette forme que l'équation $P(\alpha) = 0$ admet comme seule racine au moins double $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.

Exemple B.2 (3^e degré : discriminant (facultatif))

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p, q \neq 0$. Posons $P = X^3 + pX + q$.

Supposons que P admette une racine au moins double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 3X^2 + p$: $P'(\alpha) = 0$.

Nécessairement α est une racine carrée de $-\frac{p}{3}$. On voit que $\alpha \neq 0$.

De plus, $P'' = 6X$. Donc $P''(\alpha) \neq 0$ et α n'est pas racine triple.

On a $P(\alpha) = \alpha(\alpha^2 + p) + q = \frac{2p}{3}\alpha + q$. On voit sous cette forme que l'équation $P(\alpha) = 0$ admet comme seule racine au moins double $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.

En reportant dans l'équation $P(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q = 0$:

on obtient la **condition « discriminante »** $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exemple B.2 (3^e degré : discriminant (facultatif))

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p, q \neq 0$. Posons $P = X^3 + pX + q$.

Supposons que P admette une racine au moins double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 3X^2 + p$: $P'(\alpha) = 0$.

Nécessairement α est une racine carrée de $-\frac{p}{3}$. On voit que $\alpha \neq 0$.

De plus, $P'' = 6X$. Donc $P''(\alpha) \neq 0$ et α n'est pas racine triple.

On a $P(\alpha) = \alpha(\alpha^2 + p) + q = \frac{2p}{3}\alpha + q$. On voit sous cette forme que l'équation $P(\alpha) = 0$ admet comme seule racine au moins double $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.

En reportant dans l'équation $P(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q = 0$:

on obtient la **condition « discriminante »** $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Sous cette condition, on vérifie que $-\frac{3q}{2p}$ est effectivement une racine double et

$$P = \left(X + \frac{3q}{2p}\right)^2 \left(X - \frac{3q}{p}\right).$$

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

$$L_1 = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3 = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

$$L_1 = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3 = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Remarquons que L_1, L_2, L_3 sont de degré 2 et vérifient $L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = L_1(x_3) = 0,$
 $L_2(x_2) = 1, L_2(x_1) = L_2(x_3) = 0$ et $L_3(x_3) = 1, L_3(x_1) = L_3(x_2) = 0$.

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

$$L_1 = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3 = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Remarquons que L_1, L_2, L_3 sont de degré 2 et vérifient $L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = L_1(x_3) = 0$, $L_2(x_2) = 1, L_2(x_1) = L_2(x_3) = 0$ et $L_3(x_3) = 1, L_3(x_1) = L_3(x_2) = 0$.

Posons alors $P = y_1 P_1 + y_2 P_2 + y_3 P_3$. On constate aisément que P vérifie les conditions requises : $\deg(P) \leq 2$ et $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

$$L_1 = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3 = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Remarquons que L_1, L_2, L_3 sont de degré 2 et vérifient $L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = L_1(x_3) = 0, L_2(x_2) = 1, L_2(x_1) = L_2(x_3) = 0$ et $L_3(x_3) = 1, L_3(x_1) = L_3(x_2) = 0$.

Posons alors $P = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$. On constate aisément que P vérifie les conditions requises : $\deg(P) \leq 2$ et $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Remarque : en fait, P est le **seul** polynôme vérifiant ces conditions. En effet, s'il existait un autre tel polynôme Q , le polynôme $Q - P$ serait de degré ≤ 2 et admettrait x_1, x_2, x_3 comme racines, ce qui entraîne nécessairement $Q - P = 0$, soit $Q = P$.

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

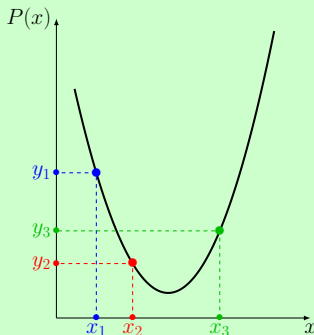
$$L_1 = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \quad L_3 = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Remarquons que L_1, L_2, L_3 sont de degré 2 et vérifient $L_1(x_1) = 1, L_1(x_2) = L_1(x_3) = 0, L_2(x_2) = 1, L_2(x_1) = L_2(x_3) = 0$ et $L_3(x_3) = 1, L_3(x_1) = L_3(x_2) = 0$.

Posons alors $P = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$. On constate aisément que P vérifie les conditions requises : $\deg(P) \leq 2$ et $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Remarque : en fait, P est le **seul** polynôme vérifiant ces conditions. En effet, s'il existait un autre tel polynôme Q , le polynôme $Q - P$ serait de degré ≤ 2 et admettrait x_1, x_2, x_3 comme racines, ce qui entraîne nécessairement $Q - P = 0$, soit $Q = P$.

Interprétation géométrique : par 3 points distincts non alignés, il passe une unique parabole d'axe vertical. On dit que l'on a « interpolé » les trois points par une parabole.



Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Généralisation : étant donnés n réels **distincts** $x_1, \dots, x_n$ et n réels $y_1, \dots, y_n$, on peut construire selon le même procédé un polynôme P tel que $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Généralisation : étant donnés n réels **distincts** $x_1, \dots, x_n$ et n réels $y_1, \dots, y_n$, on peut construire selon le même procédé un polynôme P tel que $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Application : interpolation d'une fonction

Déterminons la fonction polynôme de degré ≤ 4 qui interpole la fonction sinus aux points

$$x_1 = -\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{\pi}{2}, x_5 = \pi.$$

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Généralisation : étant donnés n réels **distincts** $x_1, \dots, x_n$ et n réels $y_1, \dots, y_n$, on peut construire selon le même procédé un polynôme P tel que $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Application : interpolation d'une fonction

Déterminons la fonction polynôme de degré ≤ 4 qui interpole la fonction sinus aux points

$$x_1 = -\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{\pi}{2}, x_5 = \pi.$$

Les polynômes de Lagrange élémentaires associés à ces points s'écrivent

$$L_1 = \frac{2}{3\pi^4} (X + \frac{\pi}{2}) X (X - \frac{\pi}{2}) (X - \pi)$$

$$L_2 = -\frac{8}{3\pi^4} (X + \pi) X (X - \frac{\pi}{2}) (X - \pi)$$

$$L_3 = \frac{4}{\pi^4} (X + \pi) (X + \frac{\pi}{2}) (X - \frac{\pi}{2}) (X - \pi)$$

$$L_4 = -\frac{8}{3\pi^4} (X + \pi) (X + \frac{\pi}{2}) X (X - \pi)$$

$$L_5 = \frac{2}{3\pi^4} (X + \pi) (X + \frac{\pi}{2}) X (X - \frac{\pi}{2})$$

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Généralisation : étant donnés n réels **distincts** $x_1, \dots, x_n$ et n réels $y_1, \dots, y_n$, on peut construire selon le même procédé un polynôme P tel que $P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Application : interpolation d'une fonction

Déterminons la fonction polynôme de degré ≤ 4 qui interpole la fonction sinus aux points

$$x_1 = -\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{\pi}{2}, x_5 = \pi.$$

Les polynômes de Lagrange élémentaires associés à ces points s'écrivent

$$L_1 = \frac{2}{3\pi^4} (X + \frac{\pi}{2}) X (X - \frac{\pi}{2}) (X - \pi)$$

$$L_2 = -\frac{8}{3\pi^4} (X + \pi) X (X - \frac{\pi}{2}) (X - \pi)$$

$$L_3 = \frac{4}{\pi^4} (X + \pi) (X + \frac{\pi}{2}) (X - \frac{\pi}{2}) (X - \pi)$$

$$L_4 = -\frac{8}{3\pi^4} (X + \pi) (X + \frac{\pi}{2}) X (X - \pi)$$

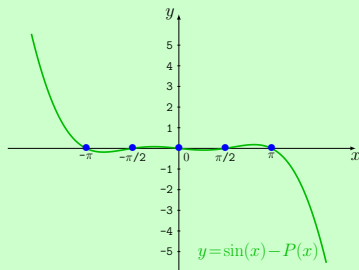
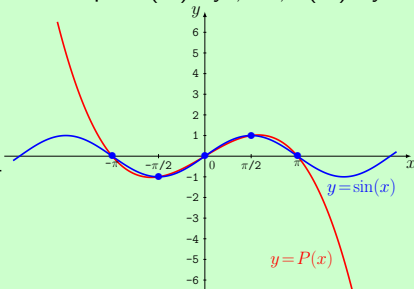
$$L_5 = \frac{2}{3\pi^4} (X + \pi) (X + \frac{\pi}{2}) X (X - \frac{\pi}{2})$$

et le **polynôme d'interpolation** s'obtient selon

$$P = \sum_{k=1}^5 f(x_k) L_k$$

soit

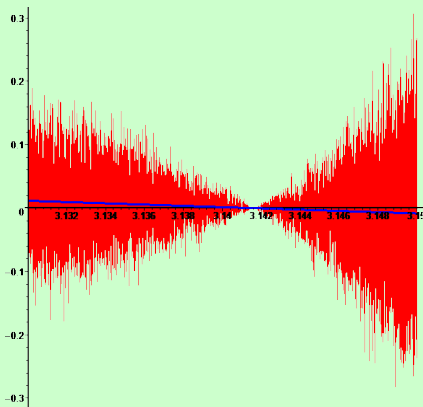
$$P = -\frac{8}{3\pi^3} X^3 + \frac{8}{3\pi} X.$$



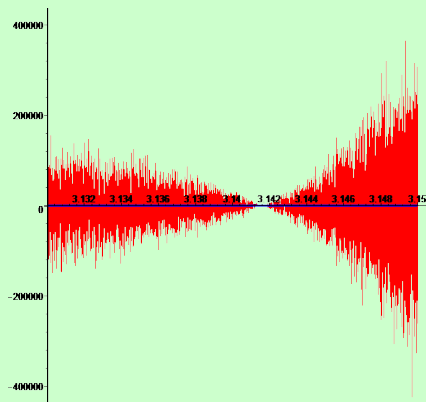
Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Remarque : l'interpolation ne fournit pas nécessairement une bonne **approximation** globale...

Exemple : pour la fonction sinus avec des points équirépartis sur $[-\pi, \pi]$, il y a un « effet de bord » (**phénomène de Runge**)...



$n = 60$ points



$n = 80$ points

Au voisinage de π