INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Polynômes

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Fonctions polynômes)

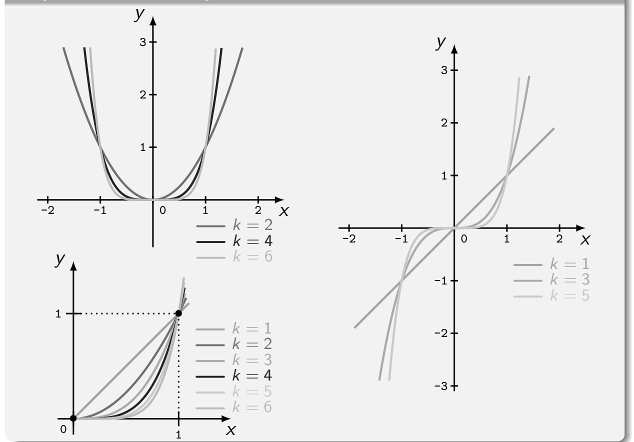
*On appelle **fonction polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute application P de la forme* $\begin{array}{rcl}\mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\end{array}$ *où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

- *Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** de P.*
- *Lorsque $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** de P et noté $\deg(P)$.*
- *Si $n = 0$, P est une fonction constante.*
  *Si en plus $a_0 = 0$, on dit que P est **la fonction polynôme nul**.*
  Par convention, le degré de la fonction polynôme nul est $-\infty$.

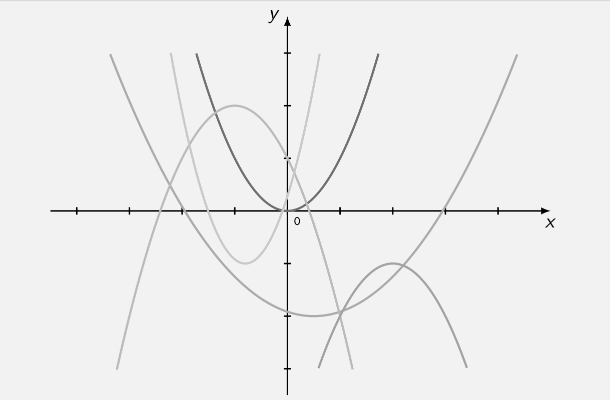
Notations :

- *L'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$.*
- *On utilise, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation X^k pour désigner la fonction $x \mapsto x^k$ (par convention X^0 est la fonction $x \mapsto 1$).*
  Cela permet de noter $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ une fonction polynôme quelconque de degré n.

Graphes des fonctions puissances X^k

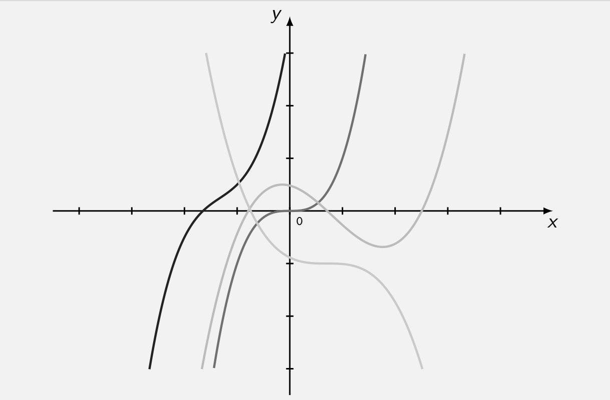


Exemple 1.2 (Second degré/Paraboles)



Quelques tracés de courbes polynomiales de degré 2

Exemple 1.3 (Troisième degré/Paraboles cubiques)



Quelques tracés de courbes polynomiales de degré 3

Théorème 1.4 (Égalité)

*Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients**. Cf. Corollaire 3.3.*

Définition 1.5 (Opérations)

*Soit P et Q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P + Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon*
$\forall x \in \mathbb{K}$, $(P+Q)(x) = P(x)+Q(x)$, $(P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x)$, $(Q\circ P)(x) = Q(P(x))$.

Proposition 1.6 (Opérations et degré (facultatif))

Soit P et Q deux fonctions polynômes. Alors $P + Q$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et

1. $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   de plus, lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
2. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$;
3. $\deg(Q \circ P) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

1. Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
   On a
   $$P + Q = (a + 2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$$
   et
   $$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$$
   (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$ lorsque $a \neq 0$). Plus précisément :
   - si $a \neq -2$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   - si $a = -2$, alors $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. Soit $P = X^2 + a$ et $Q = X^3 + b$, les deux nombres a, b étant fixés.
   On a
   $$P \circ Q = X^6 + 2bX^3 + (a + b^2) \quad \text{et} \quad Q \circ P = X^6 + 3aX^4 + 3a^2X^2 + (a^3 + b)$$
   et
   $$\deg(P \circ Q) = \deg(Q \circ P) = \deg(P)\deg(Q).$$

Dans $\mathbb{Z}$, on dispose d'une procédure fondamentale de l'arithmétique : la ***division euclidienne***. Le résultat correspondant stipule que pour tous entiers a et b, $b \neq 0$, **il existe un unique** couple d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
Les entiers q et r sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de a par b.
Par exemple, la division euclidienne de 679 par 21 fournit $679 = 21 \times 32 + 7$.

$\mathbb{K}[X]^*$ désigne $\mathbb{K}[X]$ privé du polynôme nul. Dans la suite, on utilisera pour simplifier le terme **polynôme** pour désigner une fonction polynôme.

La procédure précédente peut s'étendre par analogie au cas des polynômes.

Théorème-définition 2.1 (Division euclidienne)

Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ et tout $B \in \mathbb{K}[X]^*$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

*Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de A par B.*

Définition 2.2 (Divisibilité)

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]^*$.
*On dit que **A est divisible par B** (ou que **B divise A**) lorsque le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme **nul**.*
Autrement dit, A est divisible par B ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X + 1 \\ \cline{2-2} -(6X^2 + 3X) & 3X + 2 \\ \cline{1-1} 4X + 9 & \\ -(4X + 2) & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

Remarque : On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

- En effet, le théorème 2.1 assure l'existence et l'unicité a priori de deux polynômes Q et R, R étant de degré < 1, tels que $A = BQ + R$.
- R est en fait un polynôme constant : $R = r$ avec $r \in \mathbb{K}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{K}$, $A(x) = B(x)Q(x) + r$.
- En particulier pour $x = -\frac{1}{2}$, on a $B(-\frac{1}{2}) = 0$ donc $r = A(-\frac{1}{2}) = 7$. Ainsi R=7.

De manière générale, si $B = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ (B est donc de degré 1), alors A se décompose selon $A = BQ + r$ avec $r = A(\alpha)$:

$$A = (X - \alpha)Q + A(\alpha).$$

Définition 2.3 (Racine)

*Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.*

Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
*α est une **racine** de P ssi P est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.*

Corollaire 2.5 (Racines et divisibilité)

1. *Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts.*** *$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des **racines** de P ssi P est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.*
2. *Tout polynôme (non nul) de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **au plus** n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.*

Exemple 2.6 (Racines et divisibilité)

Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P. Donc P est divisible par $X - 1$.
- La division euclidienne de P par $X - 1$ fournit $P{=}(X - 1)Q$ avec $Q{=}X^2 - X - 2$ qui admet pour racines -1 et 2. Ainsi P admet au moins 3 racines.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$.

Proposition 2.7 (Cas réel : comportement en l'infini)

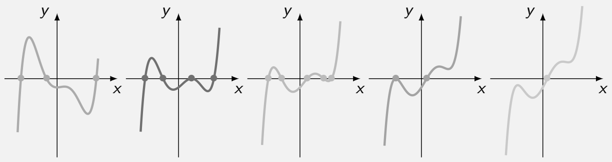
*Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Alors en $+\infty$ et $-\infty$, P a la même limite que celle de son terme **de plus haut degré** $a_n X^n$.*

Corollaire 2.8 (Racine d'un polynôme réel de degré impair)

*Si P est de degré **impair**, alors P admet **au moins une racine réelle**.*

Exemple 2.9 (Une famille de polynômes de degré 5)

Soit, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P = 10X^5 - 4X^4 - 14X^3 + 5X^2 + aX - 1$.



P_0 : 3 racines $P_{2,73\ldots}$: 4 racines P_4 : 5 racines $P_{5,57\ldots}$: 2 racines P_7 : 1 racine

Définition 3.1 (Dérivées successives)

*Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le **polynôme dérivé** P' d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$*

*et, par un procédé récurrent, ses **dérivées successives** $P^{(k)}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.*

Par exemple : $P^{(2)} {=} P'' {=} \sum_{k=2}^{n} k(k{-}1)a_k X^{k-2}$, $P^{(3)} {=} P''' {=} \sum_{k=3}^{n} k(k{-}1)(k{-}2)a_k X^{k-3}$.

On prolonge formellement cette définition au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Par convention, on pose $P^{(0)} = P$.

Proposition 3.2 (Formule de Maclaurin)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P^{(k)}(0) = k! a_k$. Ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Corollaire 3.3

*Une fonction polynôme est la fonction **nulle** ssi **tous** ses coefficients sont **nuls.***

Théorème 3.4 (Formule de Taylor pour les polynômes)

*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ ($n \in \mathbb{N}$). On a la formule de **Taylor** :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k.$$

*En particulier, pour $\deg(P) \leqslant 3$, la formule de **Taylor** s'écrit :*

- *si $\deg(P) = 1$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha)$;*
- *si $\deg(P) = 2$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \dfrac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2$;*
- *si $\deg(P) = 3$: $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \dfrac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2 + \dfrac{P'''(\alpha)}{6}(X - \alpha)^3$.*

Remarque 3.5 (Formule de Taylor et formule du binôme)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $(X^n)^{(k)}(\alpha) = \dfrac{n!}{(n-k)!}\alpha^{n-k}$ et la formule de **Taylor** donne $X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}(X - \alpha)^k$.

On retrouve la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X - \alpha) + \alpha$).

Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en -1 valent :
  $P(-1) = 4 \qquad P'(-1) = 3 \qquad P''(-1) = 4 \qquad P'''(-1) = 6$
- La formule de **Taylor** fournit alors
  $$P = 1(X + 1)^3 + 2(X + 1)^2 + 3(X + 1) + 4.$$

Complément : un algorithme (facultatif)
Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de P par $X + 1$:

$$\begin{array}{rrrl} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 & \multicolumn{3}{|l}{X + 1} \\ \cline{2-4} 4 & \multicolumn{1}{|r}{X^2 + 4X + 6} & \multicolumn{2}{|l}{X + 1} \\ \cline{3-4} & 3 & \multicolumn{1}{|r}{X + 3} & \multicolumn{1}{|l}{X + 1} \\ \cline{4-4} & & 2 & \multicolumn{1}{|l}{1} \end{array}$$

Ce processus conduit à la décomposition de P suivante :

$$\begin{aligned} X^3 + 5X^2 + 10X + 10 &= (X^2 + 4X + 6)(X + 1) + 4 \\ &= \big((X + 3)(X + 1) + 3\big)(X + 1) + 4 \\ &= (X + 3)(X + 1)^2 + 3(X + 1) + 4 \\ &= \Big(1(X + 1) + 2\Big)(X + 1)^2 + 3(X + 1) + 4 \\ &= 1(X + 1)^3 + 2(X + 1)^2 + 3(X + 1) + 4. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un **développement arithmétique en base $X + 1$.**

Démonstration de la formule de Taylor

1. On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$:
   a. Calculons d'abord les dérivées successives de P_n. De proche en proche :
      - $P_n' = nX^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!}X^{n-1}$
      - $P_n'' = n(n-1)X^{n-2} = \dfrac{n!}{(n-2)!}X^{n-2}$
      - $P_n''' = n(n-1)(n-2)X^{n-3} = \dfrac{n!}{(n-3)!}X^{n-3}$
      - Plus généralement : $P_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
      - En particulier pour $k = n$: $P_n^{(n)} = n!$, puis pour $k > n$, $P_n^{(k)} = 0$.
   b. D'autre part, la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X - \alpha) + \alpha$) fournit
      $$P_n = X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}(X - \alpha)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{n!}{(n-k)!}\alpha^{n-k}\right)(X - \alpha)^k$$
      On remarque d'après les calculs préliminaires que la formule ci-dessus peut se réécrire selon
      $$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$$

   On obtient ainsi la formule de **Taylor** pour $P_n = X^n$.
2. On peut ensuite étendre simplement cette formule par « linéarité » à tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_n P_n$.

Définition 4.1 (Racines et multiplicité)

*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^{\mu} Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.*
*Si $\mu = 1$ (resp. $\mu = 2$, $\mu = 3$), α est dite **racine simple** (resp. **double**, **triple**) de P.*
*Lorsque $\mu \geqslant 2$ c'est une **racine multiple**.*

Proposition 4.2 (Racines et divisibilité)

1. *Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des racines **distinctes** de P d'ordres de multiplicité respectifs $\mu_1, \ldots, \mu_p$ alors P est divisible par le produit $(X - \alpha_1)^{\mu_1} \cdots (X - \alpha_p)^{\mu_p}$.*
2. *Tout polynôme de degré n admet **au plus** n racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.*

La formule de Taylor permet de donner une caractérisation de multiplicité.

Théorème 4.3 (Un critère de multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

*α est racine de P d'**ordre de multiplicité μ ssi*** $\begin{cases} P(\alpha) {=} P'(\alpha) {=} \cdots {=} P^{(\mu-1)}(\alpha) {=} 0 \\ \text{et} \\ P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de P.
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de P.
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de P. Ainsi P est divisible par $(X - 1)^2$.
- La division euclidienne de P par $(X - 1)^2$ fournit $P{=}(X - 1)^2 Q$ avec $Q{=}2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$. Ainsi P admet au moins **2 racines distinctes** dont une **double**, soit au moins **3** racines **comptées avec leur ordre de multiplicité**.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)^2(2X - 1)$.

Exemple 4.5 (2^{nd} degré : discriminant (facultatif))

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Posons $P = aX^2 + bX + c$.

Supposons que P admette une racine double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' {=} 2aX + b$: $P'(\alpha) {=} 0$. Nécessairement $\alpha {=} -\dfrac{b}{2a}$.

On a $P(\alpha) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ que l'on reporte dans l'équation $P(\alpha) = 0$:

on obtient la **condition « discriminante » $b^2 - 4ac = 0$.**

Sous cette condition, $-\dfrac{b}{2a}$ est effectivement une **racine double** et $P {=} a\left(X {-} \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

Démonstration du critère de multiplicité

❶ Supposons que P admette α pour **racine d'ordre de multiplicité μ**.
Il existe alors un polynôme Q tel que $P=(X-\alpha)^{\mu}Q$ et $Q(\alpha)\neq 0$.
Calculons les dérivées successives de P. De proche en proche :

- $P' = \mu(X-\alpha)^{\mu-1}Q + (X-\alpha)^{\mu}Q'$
- $P'' = \mu(\mu-1)(X-\alpha)^{\mu-2}Q + 2\mu(X-\alpha)^{\mu-1}Q' + (X-\alpha)^{\mu}Q''$
- $P''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)(X-\alpha)^{\mu-3}Q + 3\mu(\mu-1)(X-\alpha)^{\mu-2}Q' + 3\mu(X-\alpha)^{\mu-1}Q'' + (X-\alpha)^{\mu}Q'''$
- Plus généralement, pour $k\in\{0,1,2,\dots,\mu\}$:
$$P^{(k)} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-k+i+1)(X-\alpha)^{\mu-k+i}Q^{(i)}$$
- En particulier pour $k=\mu$:
$$P^{(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu}\binom{\mu}{i}\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(i+1)(X-\alpha)^{i}Q^{(i)} = \mu!Q + \sum_{i=1}^{\mu}\binom{\mu}{i}\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(i+1)(X-\alpha)^{i}Q^{(i)}$$

On constate au vu de ces calculs que $\begin{cases}P(\alpha)=P'(\alpha)=\dots=P^{(\mu-1)}(\alpha)=0\\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha)=\mu!Q(\alpha)\neq 0\end{cases}$

Démonstration du critère de multiplicité

❷ Réciproquement, supposons que $\begin{cases}P(\alpha)=P'(\alpha)=\dots=P^{(\mu-1)}(\alpha)=0\\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha)\neq 0\end{cases}$

D'après la formule de Taylor, eqn notant n le degré de P ($n\geqslant\mu$) :

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=\mu}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k\\ &= \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!}(X-\alpha)^{\mu} + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!}(X-\alpha)^{\mu+1} + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n\\ &= (X-\alpha)^{\mu}\left[\frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!}(X-\alpha) + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^{n-\mu}\right]\end{aligned}$$

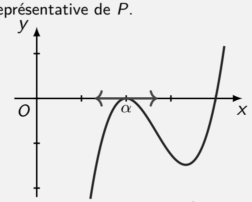
On voit alors que P est de la forme $P=(X-\alpha)^{\mu}Q$ avec $Q(\alpha)=\dfrac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!}\neq 0$.
Ainsi α est une **racine d'ordre de multiplicité μ** de P.

Exemple 4.6 (Cas réel : racines doubles et triples)

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de P.

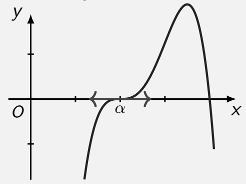
❶ **α est une racine double** de P **ssi**
$\exists Q\in\mathbb{R}[X],\ P=(X-\alpha)^2Q$ et $Q(\alpha)\neq 0$,
ou encore **ssi**
$P(\alpha)=P'(\alpha)=0$ et $P''(\alpha)\neq 0$.

Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe (Ox) comme **tangente horizontale** en α et sa **concavité** au voisinage de α est renseignée par le signe de $P''(\alpha)$.



❷ **α est une racine triple** de P **ssi**
$\exists Q\in\mathbb{R}[X],\ P=(X-\alpha)^3Q$ et $Q(\alpha)\neq 0$
ou encore **ssi**
$P(\alpha)=P'(\alpha)=P''(\alpha)=0$ et $P'''(\alpha)\neq 0$.

Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe (Ox) comme **tangente horizontale** en α et **change de concavité** au voisinage de α.
On dit que le point de coordonnées $(\alpha,0)$ est un point d'**inflexion**.



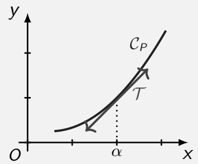
Le cas d'une racine d'ordre de multiplicité quelconque conduit à une analyse similaire, la discussion portant sur la **parité** de l'ordre.

Exemple 4.7 (Cas réel : position relative courbe/tangente)

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}_P$ de P admet une **tangente** $\mathcal{T}$ en α d'équation $y=P'(\alpha)(x-\alpha)+P(\alpha)$. La formule de Taylor permet d'étudier la **position locale** de la courbe par rapport à sa tangente.

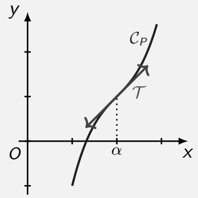
❶ **Si $P''(\alpha)\neq 0$**, alors
$P=P(\alpha)+P'(\alpha)(X-\alpha)+(X-\alpha)^2Q$
où $Q\in\mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha)=\frac{1}{2}P''(\alpha)$.

Lorsque $P''(\alpha)>0$ (resp. $P''(\alpha)<0$), $\mathcal{C}_P$ se situe **localement au-dessus** (resp. **au-dessous**) de $\mathcal{T}$.



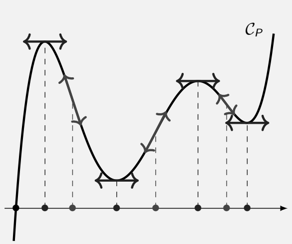
❷ **Si $P''(\alpha)=0$ et $P'''(\alpha)\neq 0$**, alors
$P=P(\alpha)+P'(\alpha)(X-\alpha)+(X-\alpha)^3Q$
où $Q\in\mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha)=\frac{1}{6}P'''(\alpha)$.

Dans ce cas, $\mathcal{C}_P$ se situe **localement de part et d'autre** de $\mathcal{T}$. La courbe traverse sa tangente en α et **change de concavité** au voisinage de α. Elle présente au point de coordonnées $(\alpha,P(\alpha))$ un point d'**inflexion**.



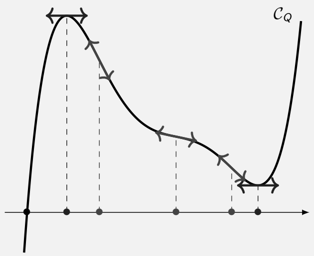
Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit P le polynôme représenté ci-dessous.
Que peut-on dire du degré de P ?



On observe **4** tangentes horizontales
$\Longrightarrow P'$ a **4** racines réelles
$\Longrightarrow$ deg $P'\geqslant$ **4**
$\Longrightarrow$ **deg $P\geqslant 5$**

Soit Q le polynôme représenté ci-dessous.
Que peut-on dire du degré de Q ?



On observe **3 points d'inflexion**
$\Longrightarrow Q''$ a **3** racines réelles
$\Longrightarrow$ deg $Q''\geqslant 3$
$\Longrightarrow$ deg $Q'\geqslant$ **4**
$\Longrightarrow$ **deg $Q\geqslant 5$**

Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'algèbre : d'Alembert-Gauss)

*Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet **au moins** une racine dans $\mathbb{C}$.*

Corollaire 5.2

*Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet **exactement** n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Théorème 5.3 (Factorisation sur ℂ)

*Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ ses racines **complexes** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p$ et A le coefficient de son monôme de plus haut degré.*
*Le polynôme P se **factorise** sur $\mathbb{C}$ selon*
$$P=A(X-\alpha_1)^{\mu_1}(X-\alpha_2)^{\mu_2}\dots(X-\alpha_p)^{\mu_p}=A\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{\mu_k}.$$

Remarque 5.4 (Somme des multiplicités)

La somme des multiplicités des racines sur $\mathbb{C}$ d'un polynôme coïncide avec son degré :
$$\sum_{k=1}^{p}\mu_k=\deg(P).$$

Corollaire 5.5 (Somme et produit des racines)

*Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ et $a_n\neq 0$. Notons $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ses n racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la **somme** et le **produit** des racines de P s'expriment en fonction de ses coefficients selon*
$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\quad\text{et}\quad\prod_{k=0}^{n}\alpha_k=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Exemple 5.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $deg(P)=2$: $P=aX^2+bX+c=a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$
$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a}\quad\text{et}\quad\alpha_1\alpha_2=\frac{c}{a}.$$
- Cas $deg(P)=3$: $P=aX^3+bX^2+cX+d=a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{b}{a}\quad\text{et}\quad\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{d}{a}.$$
Complément (facultatif) : $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{c}{a}$.
- Cas $deg(P)=4$: $P=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e=a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_4)$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-\frac{b}{a}\quad\text{et}\quad\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\frac{e}{a}.$$
Complément (facultatif) : $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=\frac{c}{a}$
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4=-\frac{d}{a}$

Proposition 5.7 (Polynôme à coefficients réels et conjugaison)

*Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Si ζ est une racine **complexe non réelle** de multiplicité ν de P, alors $\bar\zeta$ est également une racine de multiplicité ν de P. Dans ce cas, P est divisible par $(X-\zeta)^{\nu}(X-\bar\zeta)^{\nu}=(X^2+aX+b)^{\nu}$ où $a=-2\Re\mathrm{e}(\zeta)\in\mathbb{R}$ et $b=|\zeta|^2\in\mathbb{R}$.*

Théorème 5.8 (Factorisation sur ℝ)

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. On note :

- *$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ ses racines **réelles** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p$;*
- *$\zeta_1,\bar\zeta_1,\zeta_2,\bar\zeta_2,\dots,\zeta_q,\bar\zeta_q$ ses racines **complexes non réelles deux à deux conjuguées** distinctes de multiplicités respectives $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_q$;*
- *A le coefficient de son monôme de plus haut degré.*

*Le polynôme P se **factorise** sur $\mathbb{R}$ selon*
$$\begin{aligned}P&=A(X-\alpha_1)^{\mu_1}(X-\alpha_2)^{\mu_2}\dots(X-\alpha_p)^{\mu_p}\\&\quad\times(X^2+a_1X+b_1)^{\nu_1}(X^2+a_2X+b_2)^{\nu_2}\dots(X^2+a_qX+b_q)^{\nu_q}\\&=A\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{\mu_k}\prod_{k=1}^{q}(X^2+a_kX+b_k)^{\nu_k}\end{aligned}$$
où $a_k=-2\Re\mathrm{e}(\zeta_k)$ et $b_k=|\zeta_k|^2$.

Exemple 5.9 (Racines quatrième de −4)

Soit $P=X^4+4\in\mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter P comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité.**

  Le polynôme dérivé est donné par $P'=4X^3$. Les racines ζ de P vérifient l'équation $\zeta^4=-4$, donc $P'(\zeta)\neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples.**
- On résout l'équation $\zeta^4=-4$ en cherchant ζ sous forme exponentielle : $\zeta=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho\in\mathbb{R}^{+*}$ et $\theta\in[-\pi,\pi[$. On a $\rho^4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta)}=4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4=4$ et $4\theta\equiv\pi$ [mod 2π], soit $\rho=\sqrt2$ et $\theta\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right\}$.

  Les **racines de P dans $\mathbb{C}$** sont donc
$$\zeta_1=\sqrt2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=1+\mathrm{i}\qquad\zeta_2=\sqrt2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=-1+\mathrm{i}$$
$$\zeta_3=\sqrt2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=1-\mathrm{i}=\bar\zeta_1\qquad\zeta_4=\sqrt2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=-1-\mathrm{i}=\bar\zeta_2$$

  Remarque : la somme et le produit des racines valent $\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4=0$ et $\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4=4$.
- D'où la **factorisation sur $\mathbb{C}$:**
$$P=(X-\zeta_1)(X-\zeta_2)(X-\zeta_3)(X-\zeta_4).$$
- Puis la **factorisation sur $\mathbb{R}$:**
$$P=(X-\zeta_1)(X-\bar\zeta_1)(X-\zeta_2)(X-\bar\zeta_2)=(X^2-2X+2)(X^2+2X+2).$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Sinus et produit eulérien

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/_alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf

Notions à retenir

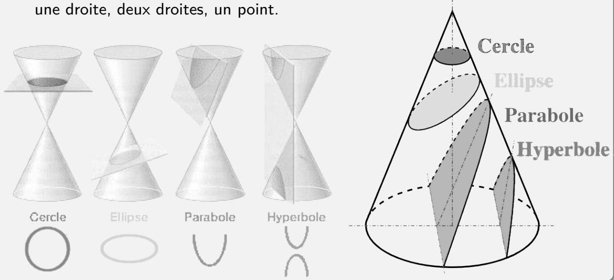
- Notations générales
- Division euclidienne
- Formule de Taylor
- Racines (multiplicité, caractérisation, factorisation sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$)
- Allure des graphes

Annexes
Autour de la parabole
Compléments

Exemple A.1 (Parabole et géométrie)

La **parabole** est une courbe appartenant à la famille des ***coniques***, sections planes d'une cône 3D de révolution.
Les sections obtenues sont de plusieurs types selon l'inclinaison du plan de coupe relativement au cône :

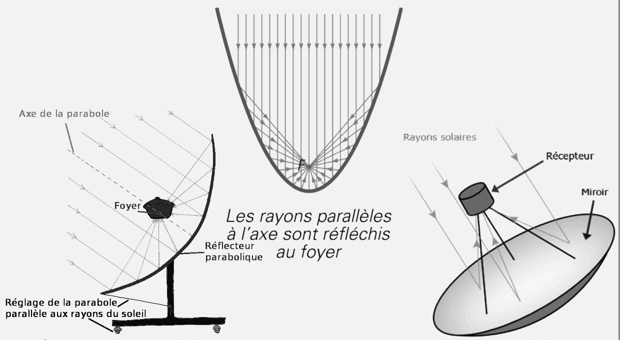
- coniques **non dégénérées** (lorsque le plan ne contient pas le sommet) : ***ellipses*** (incluant les cercles), ***paraboles***, ***hyperboles*** ;
- coniques **dégénérées** (lorsque le plan contient le sommet) : une droite, deux droites, un point.



Exemple A.2 (Paraboles dans la nature)

Une **parabole** peut être caractérisée par son **axe de symétrie** et son **foyer**.

Une propriété essentielle est la **convergence** des rayons provenant de l'infini parallèlement à l'axe vers son foyer.



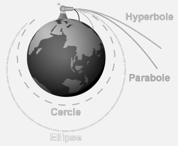
Cuiseur solaire parabolique

Antenne parabolique

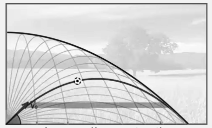
Exemple A.2 (Paraboles dans la nature)

La **parabole** est également une courbe naturellement liée à la **gravité** : trajectoires balistique et satellitaire, ponts suspendus, viaducs...

Jets d'eau

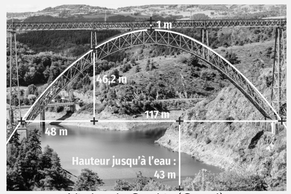


Canon de Newton



Lancer d'un projectile

Hammersmith Bridge (Londres)



Viaduc de Garabit (Cantal)

Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

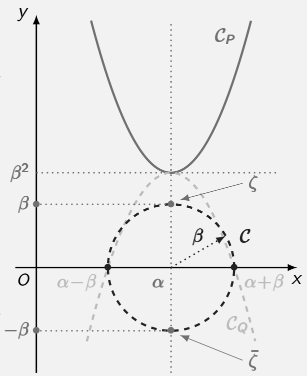
Considérons le polynôme $P = X^2 + aX + b$ décomposé selon $P = (X-\alpha)^2 + \beta^2$ avec $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

Les racines de P sont les complexes **conjugués** $\zeta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\bar{\zeta} = \alpha - \mathrm{i}\beta$.

Notons $\mathcal{C}_P$ la parabole représentative de P et traçons sa symétrique par rapport à la droite d'équation $y = \beta^2$.
C'est la parabole $\mathcal{C}_Q$ représentative du polynôme $Q = \beta^2 - (X-\alpha)^2$ qui a pour racines réelles $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.

Traçons alors le cercle $\mathcal{C}$ centré au point $(\alpha, 0)$ passant par les points d'intersection de la parabole $\mathcal{C}_Q$ et de l'axe (Ox). Ces points ont pour coordonnées $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.
Le cercle $\mathcal{C}$ a donc pour rayon β.

On construit finalement les racines ζ et $\bar{\zeta}$ comme affixes des points d'intersection de l'axe de la parabole $\mathcal{C}_P$ avec le cercle $\mathcal{C}$.

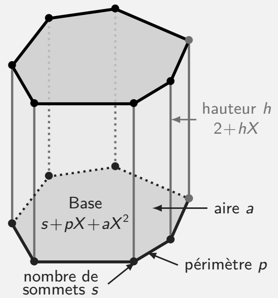


Exemple B.1 (Prisme et multiplication polynômiale)

On considère un **prisme** de **hauteur** h et de base un polygone à s **sommets**, de **périmètre** p, d'**aire** a, les quatre nombres a, h, p, s étant fixés.

On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : h) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.

On a
$PQ = 2s + (sh+2p)X + (ph+2a)X^2 + ahX^3$



Remarque : les coefficients du polynôme PQ fournissent les informations suivantes pour le prisme :

- nombre de **sommets** : $2s$
- **périmètre** : $sh + 2p$
- **aire** : $ph + 2a$
- **volume** : ah

Exemple B.2 (3e degré : discriminant (facultatif))

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p, q \neq 0$. Posons $P = X^3 + pX + q$.

Supposons que P admette une racine au moins double α dans $\mathbb{C}$.

Alors c'est aussi une racine de $P' = 3X^2 + p$: $P'(\alpha) = 0$.

Nécessairement α est une racine carrée de $-\frac{p}{3}$. On voit que $\alpha \neq 0$.

De plus, $P'' = 6X$. Donc $P''(\alpha) \neq 0$ et α n'est pas racine triple.

On a $P(\alpha) = \alpha(\alpha^2 + p) + q = \frac{2p}{3}\alpha + q$. On voit sous cette forme que l'équation $P(\alpha) = 0$ admet comme seule racine au moins double $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.

En reportant dans l'équation $P(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q = 0$:
on obtient la **condition « discriminante »** $\mathbf{4p^3 + 27q^2 = 0}$.

Sous cette condition, on vérifie que $-\frac{3q}{2p}$ est effectivement une racine double et

$$P = \left(X + \frac{3q}{2p}\right)^2 \left(X - \frac{3q}{p}\right).$$

Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit x_1, x_2, x_3 des réels **distincts** et y_1, y_2, y_3 des réels. Déterminons les polynômes P de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.
Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

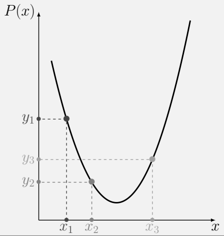
$$L_1 = \frac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X-x_1)(X-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_1)}, \quad L_3 = \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Remarquons que L_1, L_2, L_3 sont de degré 2 et vérifient $L_1(x_1)=1, L_1(x_2)=L_1(x_3)=0$, $L_2(x_2)=1, L_2(x_1)=L_2(x_3)=0$ et $L_3(x_2)=0, L_3(x_1)=L_3(x_3)=1$.

Posons alors $P = y_1P_1 + y_2P_2 + y_3P_3$. On constate aisément que P vérifie les conditions requises : $\deg(P) \leqslant 2$ et $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

Remarque : en fait, P est le **seul** polynôme vérifiant ces conditions. En effet, s'il existait un autre tel polynôme Q, le polynôme $Q - P$ serait de degré $\leqslant 2$ et admettrait x_1, x_2, x_3 comme racines, ce qui entraîne nécessairement $Q - P = 0$, soit $Q = P$.

Interprétation géométrique : par 3 points distincts non alignés, il passe une unique parabole d'axe vertical. On dit que l'on a « interpolé » les trois points par une parabole.



Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Généralisation : étant donnés n réels **distincts** $x_1, \ldots, x_n$ et n réels $y_1, \ldots, y_n$, on peut construire selon le même procédé un polynôme P tel que $P(x_1)=y_1, \ldots, P(x_n)=y_n$.

Application : interpolation d'une fonction
Déterminons la fonction polynôme de degré $\leqslant 4$ qui interpole la fonction sinus aux points $x_1 = -\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{\pi}{2}$, $x_5 = \pi$.
Les polynômes de Lagrange élémentaires associés à ces points s'écrivent

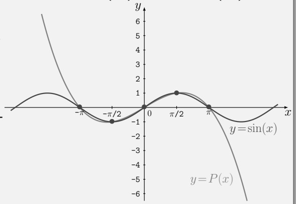
$$\begin{aligned}
L_1 &= \tfrac{2}{3\pi^4}(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)\\
L_2 &= -\tfrac{8}{3\pi^4}(X+\pi)X(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)\\
L_3 &= \tfrac{4}{\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)\\
L_4 &= -\tfrac{8}{3\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\pi)\\
L_5 &= \tfrac{2}{3\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\tfrac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

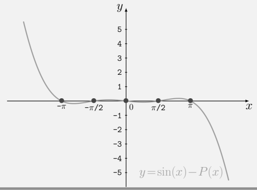
et le **polynôme d'interpolation** s'obtient selon

$$P = \sum_{k=1}^{5} f(x_k)L_k$$

soit

$$P = -\frac{8}{3\pi^3}X^3 + \frac{8}{3\pi}X.$$

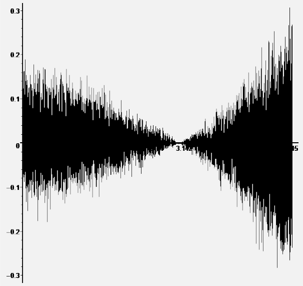




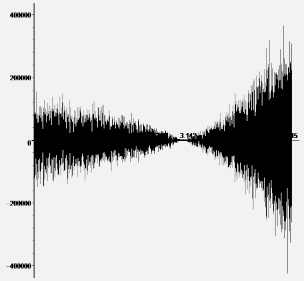
Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Remarque : l'**interpolation** ne fournit pas nécessairement une bonne **approximation** globale...

Exemple : pour la fonction sinus avec des points équirépartis sur $[-\pi, \pi]$, il y a un « effet de bord » **(phénomène de Runge)...**



$n = 60$ points



$n = 80$ points

Au voisinage de π