INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

# Polynômes

***Aimé Lachal***

**Cours de mathématiques**
**1$^{\text{er}}$ cycle, 1$^{\text{re}}$ année**

# Sommaire

# Sommaire

**Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.**

## Définition 1.1 (Fonctions polynômes)

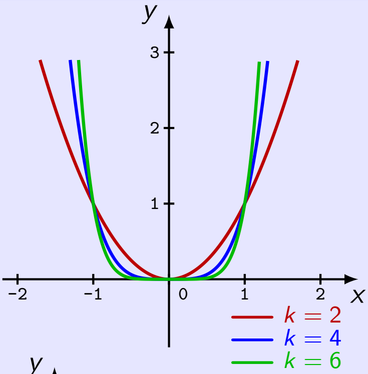
*On appelle **fonction polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute application $P$ de la forme* $\begin{array}{rcl} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$ *où les $a_k$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

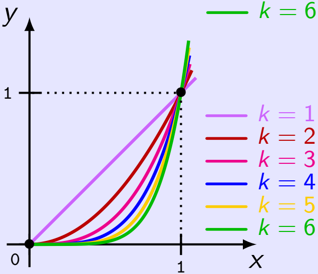
- *Les nombres $a_k$ sont appelés les **coefficients** de $P$.*
- *Lorsque $a_n \neq 0$, l'entier $n$ est appelé le **degré** de $P$ et noté* $\deg(P)$.
- *Si $n = 0$, $P$ est une fonction constante.*
  *Si en plus $a_0 = 0$, on dit que $P$ est **la fonction polynôme nul**.*
  *Par convention, le degré de la fonction polynôme nul est $-\infty$.*

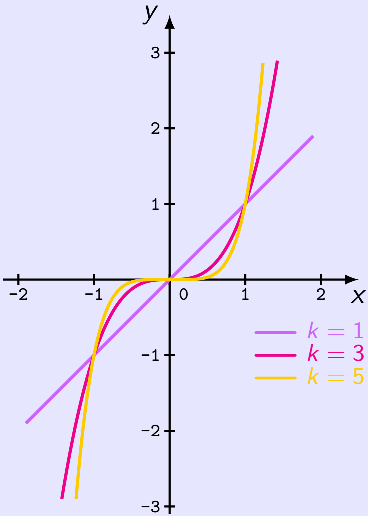
***Notations :***

- *L'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$.*
- *On utilise, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation $X^k$ pour désigner la fonction $x \mapsto x^k$ (par convention $X^0$ est la fonction $x \mapsto 1$).*
  *Cela permet de noter $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ une fonction polynôme quelconque de degré $n$.*

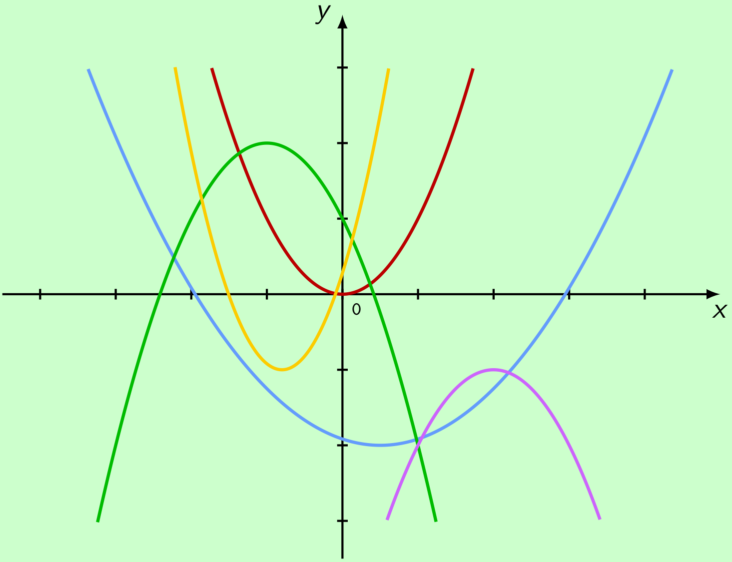
## Graphes des fonctions puissances $X^k$



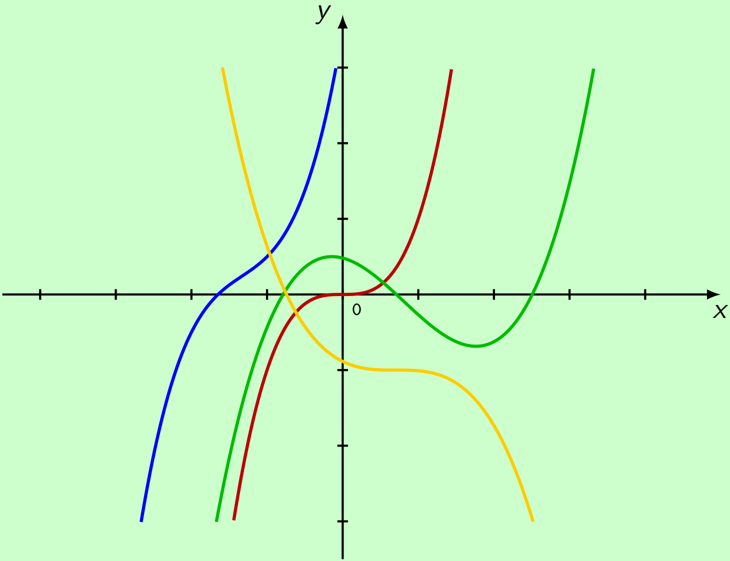



## Exemple 1.2 (Second degré/Paraboles)




Quelques tracés de courbes polynomiales de degré 2

## Exemple 1.3 (Troisième degré/Paraboles cubiques)




Quelques tracés de courbes polynomiales de degré 3

### Théorème 1.4 (Égalité)

*Deux fonctions polynômes sont **égales** ssi elles ont le **même degré** et les **mêmes coefficients.** Cf. Corollaire 3.3.*

### Définition 1.5 (Opérations)

*Soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit la **somme** $P+Q$, le **produit** $P \times Q$ et la **composée** $Q \circ P$ selon*

$\forall x \in \mathbb{K}, \ (P+Q)(x) = P(x)+Q(x), \ (P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x), \ (Q\circ P)(x) = Q(P(x)).$

### Proposition 1.6 (Opérations et degré (facultatif))

*Soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynômes. Alors $P+Q$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ sont des fonctions polynômes et*

1. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ ;
   *de plus, lorsque* $\deg(P) \neq \deg(Q)$, *alors* $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ ;
2. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ ;
3. $\deg(Q \circ P) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

## Exemple 1.7 (Illustration des opérations)

1. Soit $P = aX^5 + 3X^4 - X^2 + 4X + 1$ et $Q = 2X^5 - 3X^4 + 5X^3 + 2X - 1$.
   On a
   $$P + Q = (a + 2)X^5 + 5X^3 - X^2 + 6X$$
   et
   $$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$$
   (en fait, ici : $\deg(P) = \deg(Q)$ lorsque $a \neq 0$). Plus précisément :
   - si $a \neq -2$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ ;
   - si $a = -2$, alors $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

2. Soit $P = X^2 + a$ et $Q = X^3 + b$, les deux nombres $a, b$ étant fixés.
   On a
   $$P \circ Q = X^6 + 2bX^3 + (a + b^2) \quad \text{et} \quad Q \circ P = X^6 + 3aX^4 + 3a^2X^2 + (a^3 + b)$$
   et
   $$\deg(P \circ Q) = \deg(Q \circ P) = \deg(P)\deg(Q).$$

# Sommaire

Dans $\mathbb{Z}$, on dispose d'une procédure fondamentale de l'arithmétique : la ***division euclidienne***. Le résultat correspondant stipule que pour tous entiers $a$ et $b$, $b \neq 0$, **il existe un unique** couple d'entiers $(q, r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
Les entiers $q$ et $r$ sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de $a$ par $b$.
Par exemple, la division euclidienne de 679 par 21 fournit $679 = 21 \times 32 + 7$.

$\mathbb{K}[X]^*$ désigne $\mathbb{K}[X]$ privé du polynôme nul. Dans la suite, on utilisera pour simplifier le terme **polynôme** pour désigner une fonction polynôme.

La procédure précédente peut s'étendre par analogie au cas des polynômes.

### Théorème-définition 2.1 (Division euclidienne)

*Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ et tout $B \in \mathbb{K}[X]^*$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.*

*Les polynômes $Q$ et $R$ sont respectivement appelés le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne** de $A$ par $B$.*

### Définition 2.2 (Divisibilité)

*Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]^*$.*
*On dit que **$A$ est divisible par $B$** (ou que **$B$ divise $A$**) lorsque le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ est le polynôme **nul**.*
*Autrement dit, $A$ est divisible par $B$ ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.*

## Algorithme de division (sur un exemple)

Soit $A = 6X^2 + 7X + 9$ et $B = 2X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 7X + 9 & 2X+1 \\ \cline{2-2} -(6X^2 + 3X) & 3X+2 \\ \cline{1-1} 4X + 9 & \\ -(4X+2) & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

On obtient ainsi la décomposition $A = BQ + R$ avec $Q = 3X + 2$ et $R = 7$.

***Remarque :*** On aurait pu déterminer le reste sans effectuer la division explicite.

- En effet, le théorème 2.1 assure l'existence et l'unicité a priori de deux polynômes $Q$ et $R$, $R$ étant de degré $< 1$, tels que $A = BQ + R$.
- $R$ est en fait un polynôme constant : $R = r$ avec $r \in \mathbb{K}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{K},\ A(x) = B(x)Q(x) + r$.
- En particulier pour $x = -\frac{1}{2}$, on a $B(-\frac{1}{2}) = 0$ donc $r = A(-\frac{1}{2}) = 7$. Ainsi $R=7$.

De manière générale, si $B = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ ($B$ est donc de degré 1), alors $A$ se décompose selon $A = BQ + r$ avec $r = A(\alpha)$ :

$$A = (X - \alpha)Q + A(\alpha).$$

### Définition 2.3 (Racine)

*Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha$ est une **racine** de $P$ lorsque $P(\alpha) = 0$.*

### Proposition 2.4 (Racines et divisibilité)

*Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.*

*$\alpha$ est une **racine** de $P$ ssi $P$ est **divisible** par le polynôme $X - \alpha$.*

### Corollaire 2.5 (Racines et divisibilité)

1. *Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts.***
   *$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des **racines** de $P$ ssi $P$ est **divisible** par $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p)$.*
2. *Tout polynôme (non nul) de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **au plus** $n$ racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Ainsi, le **seul** polynôme admettant **strictement plus** de racines que son degré est le polynôme **nul**.*

### Exemple 2.6 (Racines et divisibilité)

Soit $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de $P$. Donc $P$ est divisible par $X - 1$.
- La division euclidienne de $P$ par $X - 1$ fournit $P = (X - 1)Q$ avec $Q = X^2 - X - 2$ qui admet pour racines $-1$ et 2. Ainsi $P$ admet au moins 3 racines.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$.

## Proposition 2.7 (Cas réel : comportement en l'infini)

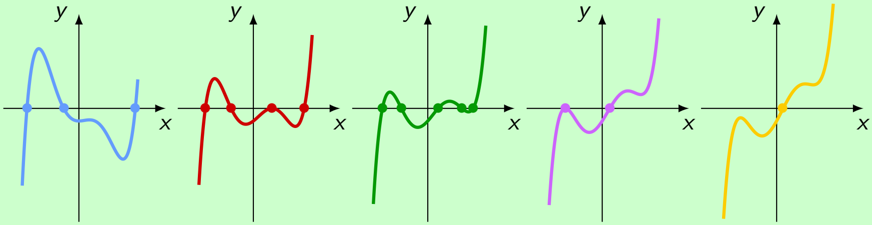
*Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ *avec* $a_n \neq 0$*. Alors en* $+\infty$ *et* $-\infty$*,* $P$ *a la même limite que celle de son terme* ***de plus haut degré*** $a_n X^n$*.*

## Corollaire 2.8 (Racine d'un polynôme réel de degré impair)

*Si* $P$ *est de degré* ***impair****, alors* $P$ *admet* ***au moins une racine réelle****.*

## Exemple 2.9 (Une famille de polynômes de degré 5)

Soit, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P = 10X^5 - 4X^4 - 14X^3 + 5X^2 + aX - 1$.




$P_0$ : 3 racines $P_{2,73\ldots}$ : 4 racines $P_4$ : 5 racines $P_{5,57\ldots}$ : 2 racines $P_7$ : 1 racine

# Sommaire

### Définition 3.1 (Dérivées successives)

*Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dérivation des fonctions polynômes permet de définir le* ***polynôme dérivé*** *$P'$ d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$*
*et, par un procédé récurrent, ses* ***dérivées successives*** *$P^{(k)}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.*

*Par exemple : $P^{(2)} = P'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$, $P^{(3)} = P''' = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) a_k X^{k-3}$.*

*On prolonge formellement cette définition au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
*Par convention, on pose $P^{(0)} = P$.*

### Proposition 3.2 (Formule de Maclaurin)

*Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P^{(k)}(0) = k! a_k$. Ainsi :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

### Corollaire 3.3

*Une fonction polynôme est la fonction* ***nulle*** *ssi* ***tous*** *ses coefficients sont* ***nuls.***

### Théorème 3.4 (Formule de Taylor pour les polynômes)

*Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $\deg(P) = n$ *(*$n \in \mathbb{N}$*). On a la formule de* ***Taylor*** *:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

*En particulier, pour* $\deg(P) \leqslant 3$*, la formule de* ***Taylor*** *s'écrit :*

- *si* $\deg(P) = 1$ *:* $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha)$ *;*
- *si* $\deg(P) = 2$ *:* $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \dfrac{P''(\alpha)}{2}(X-\alpha)^2$ *;*
- *si* $\deg(P) = 3$ *:* $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \dfrac{P''(\alpha)}{2}(X-\alpha)^2 + \dfrac{P'''(\alpha)}{6}(X-\alpha)^3.$

### Remarque 3.5 (Formule de Taylor et formule du binôme)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $(X^n)^{(k)}(\alpha) = \dfrac{n!}{(n-k)!}\alpha^{n-k}$ et la formule de **Taylor** donne $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}(X-\alpha)^k$.

On retrouve la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X-\alpha) + \alpha$).

## Exemple 3.6

Soit $P = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$.

- Les **dérivées successives** en $-1$ valent :
$$P(-1) = 4 \qquad P'(-1) = 3 \qquad P''(-1) = 4 \qquad P'''(-1) = 6$$
- La formule de **Taylor** fournit alors
$$P = 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.$$

***Complément : un algorithme (facultatif)***

Effectuons plusieurs divisions euclidiennes successives de $P$ par $X+1$ :

$$
\begin{array}{rllll}
X^3 + 5X^2 + 10X + 10 & \big|\,\underline{X+1} & & & \\
4 & \big|\,X^2 + 4X + 6 & \big|\,\underline{X+1} & & \\
 & 3 & \big|\,X+3 & \big|\,\underline{X+1} & \\
 & & 2 & \big|\,1 &
\end{array}
$$

Ce processus conduit à la décomposition de $P$ suivante :

$$
\begin{aligned}
X^3 + 5X^2 + 10X + 10 &= (X^2 + 4X + 6)(X+1) + 4 \\
&= \big((X+3)(X+1) + 3\big)(X+1) + 4 \\
&= (X+3)(X+1)^2 + 3(X+1) + 4 \\
&= \Big(1(X+1) + 2\Big)(X+1)^2 + 3(X+1) + 4 \\
&= 1(X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4.
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi un **développement arithmétique en base** $X+1$.

## Démonstration de la formule de Taylor

1. On démontre d'abord la formule pour le polynôme $P_n = X^n$ :
   a. Calculons d'abord les dérivées successives de $P_n$. De proche en proche :
      - $P_n' = nX^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!}X^{n-1}$
      - $P_n'' = n(n-1)X^{n-2} = \dfrac{n!}{(n-2)!}X^{n-2}$
      - $P_n''' = n(n-1)(n-2)X^{n-3} = \dfrac{n!}{(n-3)!}X^{n-3}$
      - Plus généralement : $P_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
      - En particulier pour $k = n$ : $P_n^{(n)} = n!$, puis pour $k > n$, $P_n^{(k)} = 0$.

   b. D'autre part, la formule du **binôme de Newton** (avec $X = (X-\alpha)+\alpha$) fournit
   $$P_n = X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}(X-\alpha)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{n!}{(n-k)!}\alpha^{n-k}\right)(X-\alpha)^k$$
   On remarque d'après les calculs préliminaires que la formule ci-dessus peut se réécrire selon
   $$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

   On obtient ainsi la formule de **Taylor** pour $P_n = X^n$.

2. On peut ensuite étendre simplement cette formule par « linéarité » à tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_n P_n$.

# Sommaire

### Définition 4.1 (Racines et multiplicité)

*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que $\alpha$ est une **racine d'ordre de multiplicité $\mu$** de $P$ lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^{\mu} Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.*
*Si $\mu = 1$ (resp. $\mu = 2$, $\mu = 3$), $\alpha$ est dite **racine simple** (resp. **double**, **triple**) de $P$.*
*Lorsque $\mu \geqslant 2$ c'est une **racine multiple**.*

### Proposition 4.2 (Racines et divisibilité)

1. *Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des racines **distinctes** de $P$ d'ordres de multiplicité respectifs $\mu_1, \ldots, \mu_p$ alors $P$ est divisible par le produit $(X-\alpha_1)^{\mu_1} \cdots (X-\alpha_p)^{\mu_p}$.*
2. *Tout polynôme de degré $n$ admet **au plus** $n$ racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.*

La formule de Taylor permet de donner une caractérisation de multiplicité.

### Théorème 4.3 (Un critère de multiplicité)

*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.*

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ d'}\textbf{ordre de multiplicité } \boldsymbol{\mu} \textbf{ ssi } \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et} \\ P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

### Exemple 4.4

Soit $P = 2X^3 - 5X^2 + 4X - 1$.

- On remarque que $P(1) = 0$, i.e. 1 est racine de $P$.
- $P' = 6X^2 - 10X + 4$. On a $P'(1) = 0$, i.e. 1 est une racine **au moins double** de $P$.
- $P'' = 12X - 10$. On a $P''(1) = 2 \neq 0$, donc 1 est une racine **double** de $P$.
  Ainsi $P$ est divisible par $(X-1)^2$.
- La division euclidienne de $P$ par $(X-1)^2$ fournit $P = (X-1)^2 Q$ avec $Q = 2X - 1$ qui admet pour racine $1/2$. Ainsi $P$ admet au moins **2 racines distinctes** dont une **double**, soit au moins **3** racines **comptées avec leur ordre de multiplicité**.
- Étant de degré 3, il n'en admet pas d'autres. On a $P = (X-1)^2(2X-1)$.

### Exemple 4.5 (2nd degré : discriminant (facultatif))

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Posons $P = aX^2 + bX + c$.

***Supposons que $P$ admette une racine double $\alpha$ dans $\mathbb{C}$.***

Alors c'est aussi une racine de $P' = 2aX + b$ : $P'(\alpha) = 0$. Nécessairement $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

On a $P(\alpha) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ que l'on reporte dans l'équation $P(\alpha) = 0$ :

on obtient la **condition « discriminante »** $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$.

Sous cette condition, $-\dfrac{b}{2a}$ est effectivement une **racine double** et $P = a\left(X - \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

## Démonstration du critère de multiplicité

1. Supposons que $P$ admette $\alpha$ pour **racine d'ordre de multiplicité $\boldsymbol{\mu}$**.
Il existe alors un polynôme $Q$ tel que $P = (X-\alpha)^\mu Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
Calculons les dérivées successives de $P$. De proche en proche :

   - $P' = \mu(X-\alpha)^{\mu-1}Q + (X-\alpha)^\mu Q'$
   - $P'' = \mu(\mu-1)(X-\alpha)^{\mu-2}Q + 2\mu(X-\alpha)^{\mu-1}Q' + (X-\alpha)^\mu Q''$
   - $P''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)(X-\alpha)^{\mu-3}Q + 3\mu(\mu-1)(X-\alpha)^{\mu-2}Q' + 3\mu(X-\alpha)^{\mu-1}Q'' + (X-\alpha)^\mu Q'''$
   - Plus généralement, pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, \mu\}$ :
   $$P^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-k+i+1)(X-\alpha)^{\mu-k+i}Q^{(i)}$$
   - En particulier pour $k = \mu$ :
   $$\begin{aligned} P^{(\mu)} &= \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu}{i} \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(i+1)(X-\alpha)^i Q^{(i)} \\ &= \mu! Q + \sum_{i=1}^{\mu} \binom{\mu}{i} \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(i+1)(X-\alpha)^i Q^{(i)} \end{aligned}$$

On constate au vu de ces calculs que $\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) = \mu! Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

## Démonstration du critère de multiplicité

❷ Réciproquement, supposons que $\begin{cases} P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(\mu-1)}(\alpha)=0 \\ \text{et } P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

D'après la formule de Taylor, eqn notant $n$ le degré de $P$ ($n \geqslant \mu$) :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=\mu}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \\ &= \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!}(X-\alpha)^\mu + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!}(X-\alpha)^{\mu+1} + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n \\ &= (X-\alpha)^\mu \left[ \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} + \frac{P^{(\mu+1)}(\alpha)}{(\mu+1)!}(X-\alpha) + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^{n-\mu} \right] \end{aligned}$$

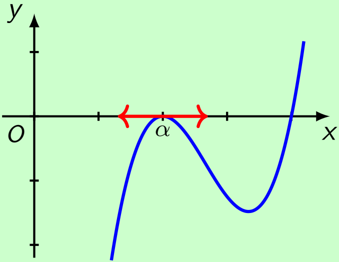
On voit alors que $P$ est de la forme $P=(X-\alpha)^\mu Q$ avec $Q(\alpha)=\dfrac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} \neq 0$.

Ainsi $\alpha$ est une **racine d'ordre de multiplicité $\boldsymbol{\mu}$** de $P$.

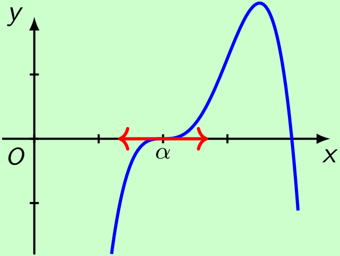
## Exemple 4.6 (Cas réel : racines doubles et triples)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de $P$.

1. **$\alpha$ est une racine double** de $P$ **ssi**
$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P = (X-\alpha)^2 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0,$$
ou encore **ssi**
$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0.$$
Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe $(Ox)$ comme **tangente horizontale** en $\alpha$ et sa **concavité** au voisinage de $\alpha$ est renseignée par le signe de $P''(\alpha)$.




2. **$\alpha$ est une racine triple** de $P$ **ssi**
$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P = (X-\alpha)^3 Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0$$
ou encore **ssi**
$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0 \text{ et } P'''(\alpha) \neq 0.$$
Dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_P$ admet l'axe $(Ox)$ comme **tangente horizontale** en $\alpha$ et **change de concavité** au voisinage de $\alpha$. On dit que le point de coordonnées $(\alpha, 0)$ est un point d'**inflexion**.




Le cas d'une racine d'ordre de multiplicité quelconque conduit à une analyse similaire, la discussion portant sur la **parité** de l'ordre.

## Exemple 4.7 (Cas réel : position relative courbe/tangente)

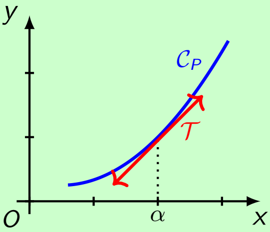
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}_P$ de $P$ admet une **tangente** $\mathcal{T}$ en $\alpha$ d'équation $y = P'(\alpha)(x - \alpha) + P(\alpha)$. La formule de Taylor permet d'étudier la **position locale** de la courbe par rapport à sa tangente.

1. **Si $P''(\alpha) \neq 0$**, alors

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + (X - \alpha)^2 Q$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha) = \frac{1}{2} P''(\alpha)$.

Lorsque $P''(\alpha) > 0$ (resp. $P''(\alpha) < 0$), $\mathcal{C}_P$ se situe **localement au-dessus** (resp. **au-dessous**) de $\mathcal{T}$.

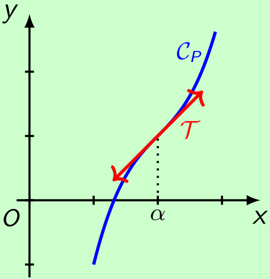



2. **Si $P''(\alpha) = 0$ et $P'''(\alpha) \neq 0$**, alors

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + (X - \alpha)^3 Q$$

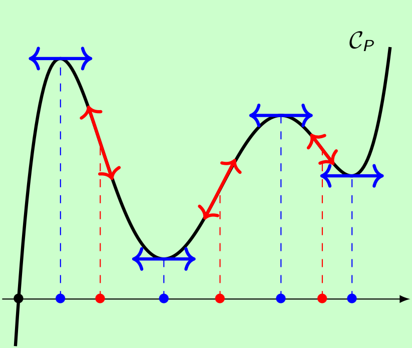
où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\alpha) = \frac{1}{6} P'''(\alpha)$.

Dans ce cas, $\mathcal{C}_P$ se situe **localement de part et d'autre** de $\mathcal{T}$. La courbe traverse sa tangente en $\alpha$ et **change de concavité** au voisinage de $\alpha$. Elle présente au point de coordonnées $(\alpha, P(\alpha))$ un point d'**inflexion**.



## Exemple 4.8 (Courbe et degré)

Soit $P$ le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de $P$ ?



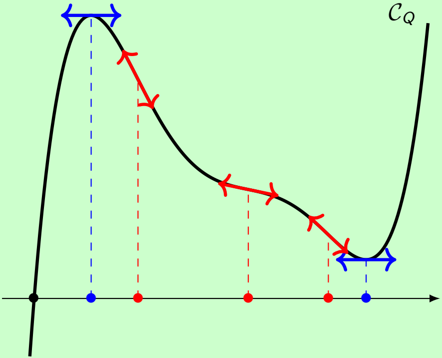

On observe **4** tangentes horizontales

$\Longrightarrow$ $P'$ a **4** racines réelles

$\Longrightarrow$ $\deg P' \geqslant$ **4**

$\Longrightarrow$ $\deg P \geqslant$ **5**

Soit $Q$ le polynôme représenté ci-dessous. Que peut-on dire du degré de $Q$ ?




On observe **3 points d'inflexion**

$\Longrightarrow$ $Q''$ a **3** racines réelles

$\Longrightarrow$ $\deg Q'' \geqslant$ **3**

$\Longrightarrow$ $\deg Q' \geqslant$ **4**

$\Longrightarrow$ $\deg Q \geqslant$ **5**

**Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'algèbre : d'Alembert-Gauss)**

*Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ admet **au moins** une racine dans $\mathbb{C}$.*

**Corollaire 5.2**

*Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n$ admet **exactement** $n$ racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur ordre de multiplicité.*

**Théorème 5.3 (Factorisation sur $\mathbb{C}$)**

*Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ses racines **complexes** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ et $A$ le coefficient de son monôme de plus haut degré. Le polynôme $P$ se **factorise** sur $\mathbb{C}$ selon*

$$P = A\,(X-\alpha_1)^{\mu_1}(X-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(X-\alpha_p)^{\mu_p} = A\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{\mu_k}.$$

**Remarque 5.4 (Somme des multiplicités)**

La somme des multiplicités des racines sur $\mathbb{C}$ d'un polynôme coïncide avec son degré :

$$\sum_{k=1}^{p}\mu_k = \deg(P).$$

## Corollaire 5.5 (Somme et produit des racines)

*Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *avec* $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ *et* $a_n \neq 0$. *Notons* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *ses* $n$ *racines complexes (éventuellement répétées selon leur ordre de multiplicité). Alors la* ***somme*** *et le* ***produit*** *des racines de* $P$ *s'expriment en fonction de ses coefficients selon*

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \textit{et} \quad \prod_{k=0}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

## Exemple 5.6 (Cas des degrés 2, 3 et 4)

- Cas $deg(P) = 2$ : $P = aX^2 + bX + c = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}.$$
- Cas $deg(P) = 3$ : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$
**Complément (facultatif) :** $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}$.
- Cas $deg(P) = 4$ : $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{e}{a}.$$
**Complément (facultatif) :** $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{c}{a}$
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{d}{a}$

## Proposition 5.7 (Polynôme à coefficients réels et conjugaison)

*Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\zeta$ est une racine **complexe non réelle** de multiplicité $\nu$ de $P$, alors $\bar{\zeta}$ est également une racine de multiplicité $\nu$ de $P$. Dans ce cas, $P$ est divisible par $(X-\zeta)^\nu(X-\bar{\zeta})^\nu = (X^2+aX+b)^\nu$ où $a = -2\Re\mathrm{e}(\zeta) \in \mathbb{R}$ et $b = |\zeta|^2 \in \mathbb{R}$.*

## Théorème 5.8 (Factorisation sur $\mathbb{R}$)

*Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note :*

- *$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses racines **réelles** distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ ;*
- *$\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \dots, \zeta_q, \bar{\zeta}_q$ ses racines **complexes non réelles deux à deux conjuguées** distinctes de multiplicités respectives $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$ ;*
- *$A$ le coefficient de son monôme de plus haut degré.*

*Le polynôme $P$ se **factorise** sur $\mathbb{R}$ selon*

$$\begin{aligned} P &= A\,(X-\alpha_1)^{\mu_1}(X-\alpha_2)^{\mu_2}\dots(X-\alpha_p)^{\mu_p} \\ &\qquad \times (X^2+a_1X+b_1)^{\nu_1}(X^2+a_2X+b_2)^{\nu_2}\dots(X^2+a_qX+b_q)^{\nu_q} \\ &= A\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{\mu_k}\prod_{k=1}^{q}(X^2+a_kX+b_k)^{\nu_k} \end{aligned}$$

*où $a_k = -2\Re\mathrm{e}(\zeta_k)$ et $b_k = |\zeta_k|^2$.*

## Exemple 5.9 (Racines quatrième de $-4$)

Soit $P = X^4 + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

- On commence par traiter $P$ comme un polynôme de degré 4 sur $\mathbb{C}$. Il admet **au plus** 4 racines dans $\mathbb{C}$, et plus précisément **exactement** 4 racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur **multiplicité.**

  Le polynôme dérivé est donné par $P' = 4X^3$. Les racines $\zeta$ de $P$ vérifient l'équation $\zeta^4 = -4$, donc $P'(\zeta) \neq 0$, ce qui signifie qu'elles sont toutes **simples.**

- On résout l'équation $\zeta^4 = -4$ en cherchant $\zeta$ sous forme exponentielle : $\zeta = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. On a $\rho^4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4\theta)} = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ d'où l'on tire $\rho^4 = 4$ et $4\theta \equiv \pi\ [\mathrm{mod}\ 2\pi]$, soit $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

  Les **racines de $P$ dans** $\mathbb{C}$ sont donc

$$\zeta_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 1 + \mathrm{i} \qquad \zeta_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -1 + \mathrm{i}$$

$$\zeta_3 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 1 - \mathrm{i} = \bar{\zeta}_1 \qquad \zeta_4 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -1 - \mathrm{i} = \bar{\zeta}_2$$

  ***Remarque :*** la somme et le produit des racines valent $\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4=0$ et $\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4=4$.

- D'où la **factorisation sur** $\mathbb{C}$ **:**

$$P = (X - \zeta_1)(X - \zeta_2)(X - \zeta_3)(X - \zeta_4).$$

- Puis la **factorisation sur** $\mathbb{R}$ **:**

$$P = (X - \zeta_1)(X - \bar{\zeta}_1)(X - \zeta_2)(X - \bar{\zeta}_2) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

# Sinus et produit eulérien

**Aimé Lachal**

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_sinus_eulerien.pdf

## Notions à retenir

- Notations générales
- Division euclidienne
- Formule de Taylor
- Racines (multiplicité, caractérisation, factorisation sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$)
- Allure des graphes

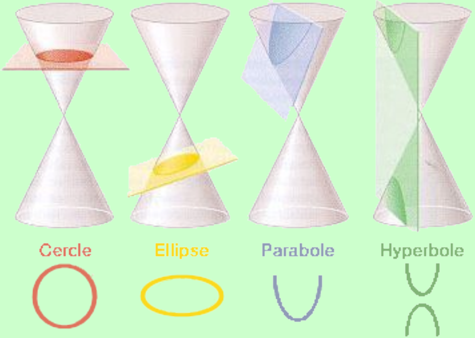
# Annexes
# Autour de la parabole
# Compléments

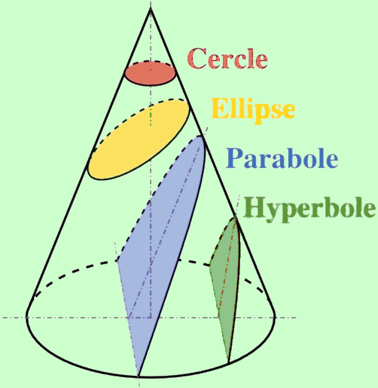
# Sommaire

## Exemple A.1 (Parabole et géométrie)

La **parabole** est une courbe appartenant à la famille des ***coniques***, sections planes d'une cône 3D de révolution.
Les sections obtenues sont de plusieurs types selon l'inclinaison du plan de coupe relativement au cône :

- coniques **non dégénérées** (lorsque le plan ne contient pas le sommet) : ***ellipses*** (incluant les cercles), ***paraboles***, ***hyperboles*** ;
- coniques **dégénérées** (lorsque le plan contient le sommet) : une droite, deux droites, un point.

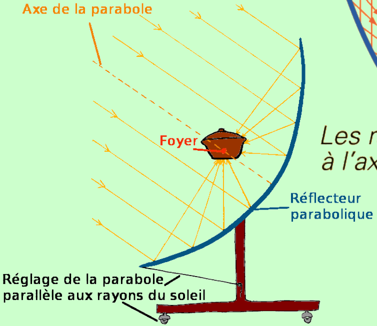


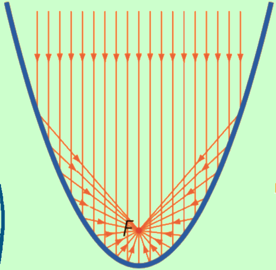
## Exemple A.2 (Paraboles dans la nature)

Une **parabole** peut être caractérisée par son **axe de symétrie** et son **foyer**.

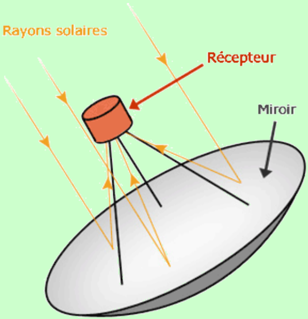
Une propriété essentielle est la **convergence** des rayons provenant de l'infini parallèlement à l'axe vers son foyer.




Cuiseur solaire parabolique



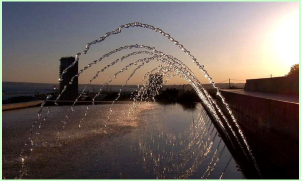

*Les rayons parallèles à l'axe sont réfléchis au foyer*



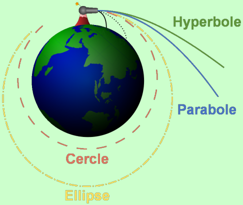

Antenne parabolique

## Exemple A.2 (Paraboles dans la nature)

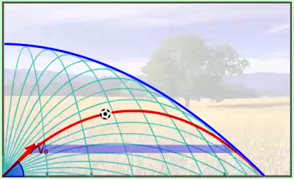
La **parabole** est également une courbe naturellement liée à la **gravité** : trajectoires balistique et satellitaire, ponts suspendus, viaducs…



Jets d'eau

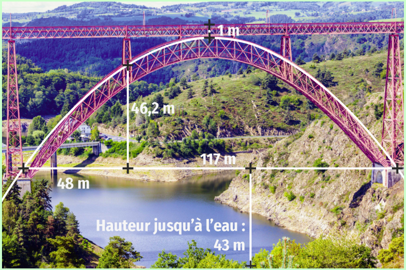



Canon de Newton




Lancer d'un projectile

Hammersmith Bridge (Londres)




Viaduc de Garabit (Cantal)

## Exemple A.3 (Cas du second degré sans racine réelle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$.

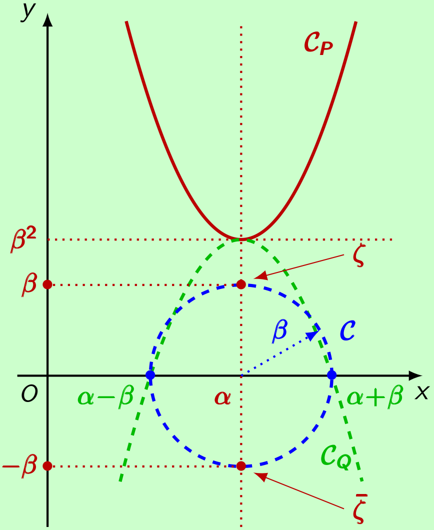
Considérons le polynôme $P = X^2 + aX + b$ décomposé selon $P = (X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

Les racines de $P$ sont les complexes **conjugués** $\zeta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\bar{\zeta} = \alpha - \mathrm{i}\beta$.

Notons $\mathcal{C}_P$ la parabole représentative de $P$ et traçons sa symétrique par rapport à la droite d'équation $y = \beta^2$.
C'est la parabole $\mathcal{C}_Q$ représentative du polynôme $Q = \beta^2 - (X - \alpha)^2$ qui a pour racines réelles $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.

Traçons alors le cercle $\mathcal{C}$ centré au point $(\alpha, 0)$ passant par les points d'intersection de la parabole $\mathcal{C}_Q$ et de l'axe $(Ox)$. Ces points ont pour coordonnées $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.
Le cercle $\mathcal{C}$ a donc pour rayon $\beta$.

On construit finalement les racines $\zeta$ et $\bar{\zeta}$ comme affixes des points d'intersection de l'axe de la parabole $\mathcal{C}_P$ avec le cercle $\mathcal{C}$.



# Sommaire

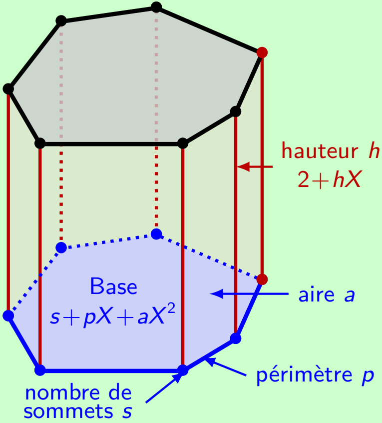
## Exemple B.1 (Prisme et multiplication polynômiale)

On considère un **prisme** de **hauteur** $h$ et de base un polygone à $s$ **sommets,** de **périmètre** $p$, d'**aire** $a$, les quatre nombres $a, h, p, s$ étant fixés.

On associe à l'arête génératrice le polynôme $P = 2 + hX$ (nombre de sommets : 2, périmètre : $h$) et au polygone de base le polynôme $Q = s + pX + aX^2$.

On a

$$PQ = 2s+(sh+2p)X+(ph+2a)X^2+ahX^3$$




***Remarque :*** les coefficients du polynôme $PQ$ fournissent les informations suivantes pour le prisme :

- nombre de **sommets :** $2s$
- **périmètre :** $sh + 2p$
- **aire :** $ph + 2a$
- **volume :** $ah$

### Exemple B.2 (3e degré : discriminant (facultatif))

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ avec $p, q \neq 0$. Posons $P = X^3 + pX + q$.

***Supposons que** $P$ **admette une racine au moins double** $\alpha$ **dans** $\mathbb{C}$**.***

Alors c'est aussi une racine de $P' = 3X^2 + p$ : $P'(\alpha) = 0$.

Nécessairement $\alpha$ est une racine carrée de $-\dfrac{p}{3}$. On voit que $\alpha \neq 0$.

De plus, $P'' = 6X$. Donc $P''(\alpha) \neq 0$ et $\alpha$ n'est pas racine triple.

On a $P(\alpha) = \alpha(\alpha^2 + p) + q = \dfrac{2p}{3}\alpha + q$. On voit sous cette forme que l'équation $P(\alpha) = 0$ admet comme seule racine au moins double $\alpha = -\dfrac{3q}{2p}$.

En reportant dans l'équation $P(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q = 0$ :

on obtient la **condition « discriminante »** $\mathbf{4p^3 + 27q^2 = 0}$.

Sous cette condition, on vérifie que $-\dfrac{3q}{2p}$ est effectivement une racine double et

$$P = \left(X + \frac{3q}{2p}\right)^2 \left(X - \frac{3q}{p}\right).$$

## Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

Soit $x_1, x_2, x_3$ des réels **distincts** et $y_1, y_2, y_3$ des réels. Déterminons les polynômes $P$ de degré au plus 2 tels que $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.
Pour cela on introduit les polynômes « élémentaires »

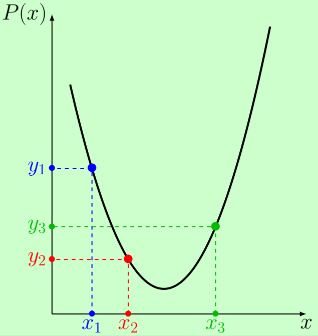
$$L_1 = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad L_2 = \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)}, \quad L_3 = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Remarquons que $L_1, L_2, L_3$ sont de degré 2 et vérifient $L_1(x_1)=1, L_1(x_2)=L_1(x_3)=0$, $L_2(x_2)=1, L_2(x_1)=L_2(x_3)=0$ et $L_3(x_2)=0, L_3(x_1)=L_3(x_3)=1$.

Posons alors $P = y_1P_1 + y_2P_2 + y_3P_3$. On constate aisément que $P$ vérifie les conditions requises : $\deg(P) \leqslant 2$ et $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3$.

***Remarque :*** en fait, $P$ est le **seul** polynôme vérifiant ces conditions. En effet, s'il existait un autre tel polynôme $Q$, le polynôme $Q - P$ serait de degré $\leqslant 2$ et admettrait $x_1, x_2, x_3$ comme racines, ce qui entraîne nécessairement $Q - P = 0$, soit $Q = P$.

***Interprétation géométrique :*** par 3 points distincts non alignés, il passe une unique parabole d'axe vertical. On dit que l'on a « interpolé » les trois points par une parabole.



## Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

***Généralisation :*** étant donnés $n$ réels **distincts** $x_1, \ldots, x_n$ et $n$ réels $y_1, \ldots, y_n$, on peut construire selon le même procédé un polynôme $P$ tel que $P(x_1)=y_1, \ldots, P(x_n)=y_n$.

***Application : interpolation d'une fonction***

Déterminons la fonction polynôme de degré $\leqslant 4$ qui interpole la fonction sinus aux points

$$x_1 = -\pi,\ x_2 = -\frac{\pi}{2},\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{\pi}{2},\ x_5 = \pi.$$

Les polynômes de Lagrange élémentaires associés à ces points s'écrivent

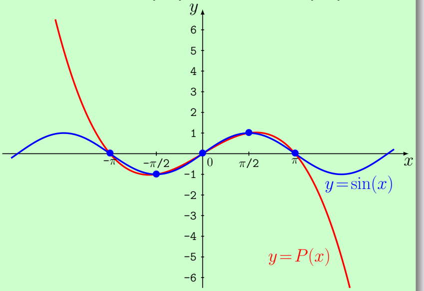
$$\begin{aligned}
L_1 &= \tfrac{2}{3\pi^4}(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)\\
L_2 &= -\tfrac{8}{3\pi^4}(X+\pi)X(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)\\
L_3 &= \tfrac{4}{\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})(X-\tfrac{\pi}{2})(X-\pi)\\
L_4 &= -\tfrac{8}{3\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\pi)\\
L_5 &= \tfrac{2}{3\pi^4}(X+\pi)(X+\tfrac{\pi}{2})X(X-\tfrac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

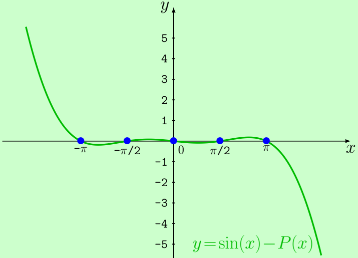
et le **polynôme d'interpolation** s'obtient selon

$$P = \sum_{k=1}^{5} f(x_k)L_k$$

soit

$$P = -\frac{8}{3\pi^3}X^3 + \frac{8}{3\pi}X.$$

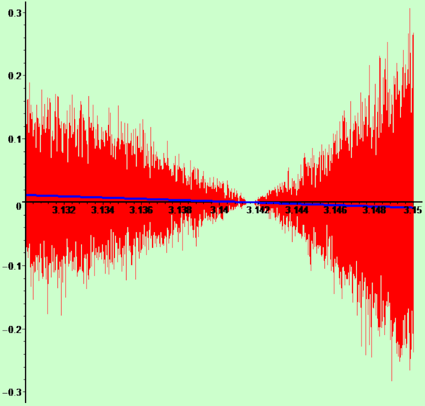


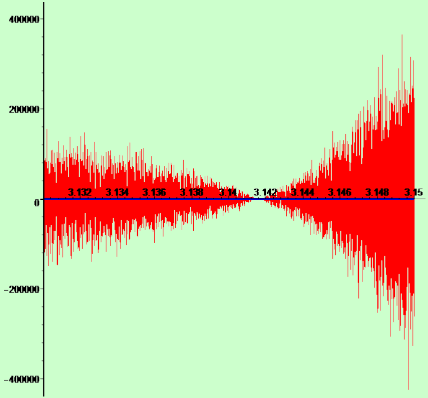
## Exemple B.3 (Polynôme d'interpolation de Lagrange (facultatif))

***Remarque :*** l'**interpolation** ne fournit pas nécessairement une bonne **approximation** globale…

***Exemple :*** pour la fonction sinus avec des points équirépartis sur $[-\pi, \pi]$, il y a un « effet de bord » **(phénomène de Runge)…**




$n = 60$ points




$n = 80$ points

Au voisinage de $\pi$