INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Espaces vectoriels

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

Sommaire

Présentation

Les **structures algébriques** concernent des ensembles pour lesquels on dispose de certaines opérations. Elles apparaissent naturellement et progressivement dans la construction des nombres usuels : entiers, rationnels, réels, complexes... avec les **opérations** d'addition et de multiplication.

Ces structures ont pour vocation d'**unifier** des propriétés typiques (telles que la **commutativité**, l'**associativité**, la **distributivité**...) et d'ériger des règles de calcul qui s'avèrent communes à de nombreux exemples de natures *a priori* différentes.

La structure d'**espace vectoriel** est née avec l'étude géométrique des vecteurs du plan ou de l'espace dans lequel on vit. Malgré l'aspect **géométrique** de cette origine, les propriétés des espaces vectoriels sont de nature **algébrique** et s'appliquent dans divers contextes éloignés, en apparence, de la géométrie (espaces de fonctions, de polynômes...)

Présentation

Par exemple, pour les trois ensembles

1. $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan ;
2. $\mathbb{R}_1[X]$ des binômes de degré au plus 1 : $\alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3. $\mathcal{F}_{\text{trigo}}$ des fonctions trigonométriques de la forme $x \longmapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

on peut définir des opérations tout à fait similaires pour lesquels des règles de calcul sont rigoureusement les mêmes. Ces opérations sont respectivement les suivantes :

1. $\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} + \vec{v} \\ (\alpha, \vec{u}) & \longmapsto & \alpha \cdot \vec{u} \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (P, Q) & \longmapsto & P + Q \\ (\alpha, P) & \longmapsto & \alpha \cdot P \end{array}$
3. $\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{\text{trigo}} \times \mathcal{F}_{\text{trigo}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\text{trigo}} \\ (f, g) & \longmapsto & f + g \\ (\alpha, f) & \longmapsto & \alpha \cdot f \end{array}$

1. Pour le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, si l'on dispose d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on peut écrire n'importe quel vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sous la forme $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. l'ensemble $\mathbb{R}_1[X]$ est constitué de binômes de la forme $\alpha X + \beta\mathbb{1}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}$ étant le polynôme constant égal à 1 ;
3. l'ensemble $\mathcal{F}_{\text{trigo}}$ est constitué de fonctions de la forme $\alpha \cos + \beta \sin$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

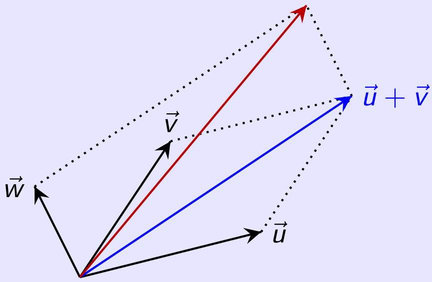
Présentation

Malgré la différence de nature de tous ces objets, dans les trois cas, les couples $(\vec{i}, \vec{j})$, $(X, \mathbb{1})$ et $(\cos, \sin)$ jouent le même rôle vis-à-vis des opérations $+$ et $\cdot$, à savoir que l'on peut écrire dans chaque situation un objet de l'ensemble uniquement à l'aide du couple correspondant et de facteurs d'échelle α, β ; on parle de ***combinaisons linéaires*** (*e.g.* $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$) et de ***bases*** (*e.g.* $(\vec{i}, \vec{j})$).

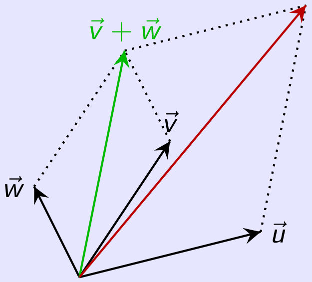
Les ensembles $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\mathbb{R}_1[X]$, $\mathcal{F}_{\text{trigo}}$ sont ainsi rapprochés les uns les autres selon un même jeu de **« calcul vectoriel »** et seront qualifiés d'***espaces vectoriels isomorphes***.

Présentation : « observation vectorielle »

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$

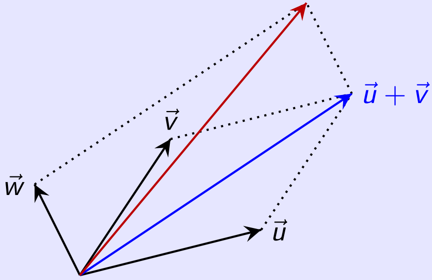


$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$

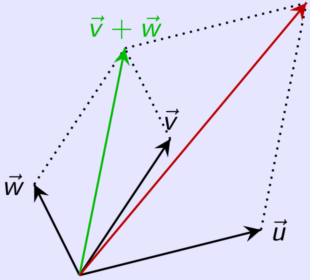


Présentation : « observation vectorielle »

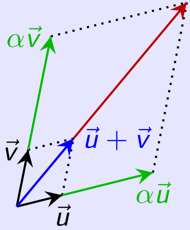
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$



$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$

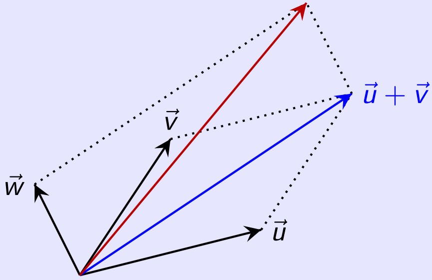


$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$$

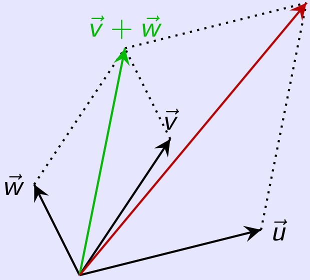


Présentation : « observation vectorielle »

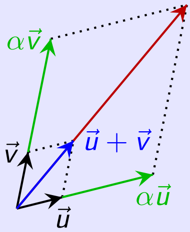
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$



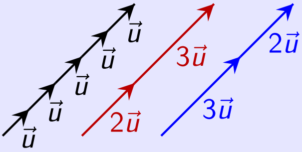
$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$



$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$$

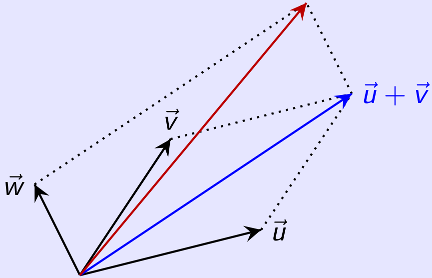


$$5\vec{u}=2\vec{u}+3\vec{u}=3\vec{u}+2\vec{u}$$

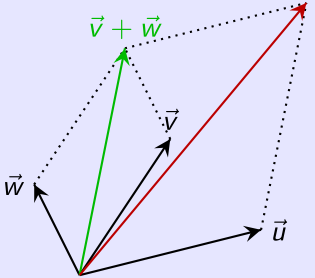


Présentation : « observation vectorielle »

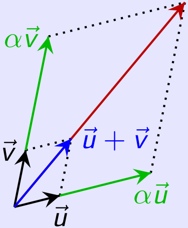
$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$



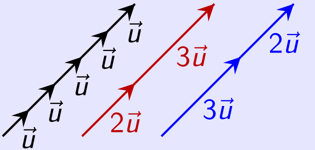
$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$



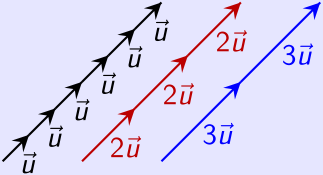
$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$



$5\vec{u}=2\vec{u}+3\vec{u}=3\vec{u}+2\vec{u}$



$6\vec{u}=3(2\vec{u})=2(3\vec{u})$



Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ *(loi $+_E$ **associative**)*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une ***loi interne*** $+_E$ *(i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une* ***loi externe*** $\cdot_E$ *(i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ *(loi $+_E$* ***associative****)*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$ *(loi $+_E$* ***commutative****)*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ *(loi $+_E$ **associative**)*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$ *(loi $+_E$ **commutative**)*
3. $\exists \vec{0}_E \in E, \forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{0}_E = \vec{0}_E +_E \vec{u} = \vec{u}$ *(existence d'un **élément neutre** pour la loi $+_E$ appelé **vecteur nul**)*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ *(loi $+_E$ **associative**)*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$ *(loi $+_E$ **commutative**)*
3. $\exists \vec{0}_E \in E, \forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{0}_E = \vec{0}_E +_E \vec{u} = \vec{u}$ *(existence d'un **élément neutre** pour la loi $+_E$ appelé **vecteur nul**)*
4. $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u} = \vec{0}_E$ *(existence d'un **symétrique**, noté $-_E \vec{u}$, pour tout élément $\vec{u}$ de E)*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ *(loi $+_E$ **associative**)*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$ *(loi $+_E$ **commutative**)*
3. $\exists \vec{0}_E \in E, \forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{0}_E = \vec{0}_E +_E \vec{u} = \vec{u}$ *(existence d'un **élément neutre** pour la loi $+_E$ appelé **vecteur nul**)*
4. $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u} = \vec{0}_E$ *(existence d'un **symétrique**, noté $-_E\vec{u}$, pour tout élément $\vec{u}$ de E)*
5. $\forall \vec{u} \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \vec{u} = \vec{u}$

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ *(loi $+_E$ **associative**)*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$ *(loi $+_E$ **commutative**)*
3. $\exists \vec{0}_E \in E, \forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{0}_E = \vec{0}_E +_E \vec{u} = \vec{u}$ *(existence d'un **élément neutre** pour la loi $+_E$ appelé **vecteur nul**)*
4. $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u} = \vec{0}_E$ *(existence d'un **symétrique**, noté $-_E \vec{u}$, pour tout élément $\vec{u}$ de E)*
5. $\forall \vec{u} \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \vec{u} = \vec{u}$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E,\ \alpha \cdot_E (\beta \cdot_E \vec{u}) = (\alpha\beta) \cdot_E \vec{u}$

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ *(loi $+_E$ **associative**)*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$ *(loi $+_E$ **commutative**)*
3. $\exists \vec{0}_E \in E, \forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{0}_E = \vec{0}_E +_E \vec{u} = \vec{u}$ *(existence d'un **élément neutre** pour la loi $+_E$ appelé **vecteur nul**)*
4. $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u} = \vec{0}_E$ *(existence d'un **symétrique**, noté $-_E \vec{u}$, pour tout élément $\vec{u}$ de E)*
5. $\forall \vec{u} \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \vec{u} = \vec{u}$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E,\ \alpha \cdot_E (\beta \cdot_E \vec{u}) = (\alpha\beta) \cdot_E \vec{u}$
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E,\ (\alpha + \beta) \cdot_E \vec{u} = (\alpha \cdot_E \vec{u}) +_E (\beta \cdot_E \vec{u})$ *(on écrit $\alpha \cdot_E \vec{u} +_E \beta \cdot_E \vec{u}$)*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ *(loi $+_E$ **associative**)*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$ *(loi $+_E$ **commutative**)*
3. $\exists \vec{0}_E \in E, \forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{0}_E = \vec{0}_E +_E \vec{u} = \vec{u}$ *(existence d'un **élément neutre** pour la loi $+_E$ appelé **vecteur nul**)*
4. $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E,\ \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u} = \vec{0}_E$ *(existence d'un **symétrique**, noté $-_E \vec{u}$, pour tout élément $\vec{u}$ de E)*
5. $\forall \vec{u} \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \vec{u} = \vec{u}$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E,\ \alpha \cdot_E (\beta \cdot_E \vec{u}) = (\alpha\beta) \cdot_E \vec{u}$
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E,\ (\alpha + \beta) \cdot_E \vec{u} = (\alpha \cdot_E \vec{u}) +_E (\beta \cdot_E \vec{u})$ *(on écrit $\alpha \cdot_E \vec{u} +_E \beta \cdot_E \vec{u}$)*
8. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \alpha \cdot_E (\vec{u} +_E \vec{v}) = (\alpha \cdot_E \vec{u}) +_E (\alpha \cdot_E \vec{v})$ *(on écrit $\alpha \cdot_E \vec{u} +_E \alpha \cdot_E \vec{v}$)*

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et $\cdot_E$ sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^2$ » au lieu de $(\mathbb{K}^2, +, \cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et $\cdot$ (voire rien).

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et $\cdot_E$ sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^2$ » au lieu de $(\mathbb{K}^2, +, \cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et $\cdot$ (voire rien).

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et $\cdot_E$ sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^2$ » au lieu de $(\mathbb{K}^2, +, \cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et $\cdot$ (voire rien).

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

1. $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{u} \in E$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \cdot \vec{u}$

   En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \vec{u} \in E$, $\underbrace{\vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n\,\vec{u}$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et $\cdot_E$ sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^2$ » au lieu de $(\mathbb{K}^2, +, \cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et $\cdot$ (voire rien).

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

1. $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \ \forall \vec{u} \in E, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \cdot \vec{u}$

   En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \vec{u} \in E, \ \underbrace{\vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n\,\vec{u}$

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \vec{u}_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et $\cdot_E$ sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^2$ » au lieu de $(\mathbb{K}^2, +, \cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et $\cdot$ (voire rien).

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

1. $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{u} \in E$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \cdot \vec{u}$

   En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \vec{u} \in E$, $\underbrace{\vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n\,\vec{u}$

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \vec{u}_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \vec{u} \in E$, $0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et $\cdot_E$ sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^2$ » au lieu de $(\mathbb{K}^2, +, \cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et $\cdot$ (voire rien).

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

1. $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u} \in E,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \cdot \vec{u}$

   En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \vec{u} \in E,\ \underbrace{\vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n\,\vec{u}$
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \vec{u}_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \vec{u} \in E,\ 0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$
4. $\forall \vec{u} \in E,\ (-1_{\mathbb{K}}) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et $\cdot_E$ sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^2$ » au lieu de $(\mathbb{K}^2, +, \cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et $\cdot$ (voire rien).

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

1. $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \ \forall \vec{u} \in E, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \cdot \vec{u}$

   En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \vec{u} \in E, \ \underbrace{\vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n\,\vec{u}$

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot \vec{u}_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \vec{u} \in E, \ 0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \alpha \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$

4. $\forall \vec{u} \in E, \ (-1_{\mathbb{K}}) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

5. $\forall \vec{u} \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $\vec{u} = \vec{0}_E$

Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)

1. Définissons sur l'ensemble $\mathbb{K}^n$ les deux opérations $+$ et $\cdot$ par
$\forall\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big)\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$,

$$\begin{cases}(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\\ \alpha\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\end{cases}$$

Alors $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
L'**élément neutre** est $\vec{0}_{\mathbb{K}^n}=(0,\dots,0)$ et le **symétrique** de $(x_1,\dots,x_n)$ est $-_{\mathbb{K}^n}(x_1,\dots,x_n)=(-x_1,\dots,-x_n)$. On les notera simplement $\mathbf{0}$ et $-(x_1,\dots,x_n)$.

Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)

1. Définissons sur l'ensemble $\mathbb{K}^n$ les deux opérations $+$ et $\cdot$ par
   $\forall\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$, $\forall\alpha \in \mathbb{K}$,
   $$\begin{cases} (x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \\ \alpha\cdot(x_1,\dots,x_n) = (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n) \end{cases}$$
   Alors $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
   L'**élément neutre** est $\vec{0}_{\mathbb{K}^n} = (0,\dots,0)$ et le **symétrique** de $(x_1,\dots,x_n)$ est $-_{\mathbb{K}^n}(x_1,\dots,x_n) = (-x_1,\dots,-x_n)$. On les notera simplement $\mathbf{0}$ et $-(x_1,\dots,x_n)$.
2. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)

1. Définissons sur l'ensemble $\mathbb{K}^n$ les deux opérations $+$ et $\cdot$ par
   $\forall\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big)\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$,
   $$\begin{cases}(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\ \alpha\cdot(x_1,\ldots,x_n)=(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)\end{cases}$$
   Alors $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
   L'**élément neutre** est $\vec{0}_{\mathbb{K}^n}=(0,\ldots,0)$ et le **symétrique** de $(x_1,\ldots,x_n)$ est $-_{\mathbb{K}^n}(x_1,\ldots,x_n)=(-x_1,\ldots,-x_n)$. On les notera simplement $\mathbf{0}$ et $-(x_1,\ldots,x_n)$.
2. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
3. Définissons sur l'ensemble $\mathcal{A}(E,\mathbb{K})$ des applications définies sur un ensemble E à valeurs dans $\mathbb{K}$ les opérations $+$ et $\cdot$ par
   $\forall(f,g)\in\mathcal{A}(E,\mathbb{K})^2$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$,
   $$\forall x\in E,\quad\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\ (\alpha\cdot f)(x)=\alpha f(x)\end{cases}$$
   Alors $(\mathcal{A}(E,\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

Sommaire

Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.
On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** *de E (s.e.v. en abrégé) si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.*

Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E (s.e.v. en abrégé) si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.*

En général, on démontre qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-e.v. en établissant que c'est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. connu :

Proposition 2.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.

$$F \text{ est un s.e.v. de } E \iff \begin{cases} F \neq \varnothing \quad (\text{un s.e.v. contient toujours le vecteur } \vec{0}_E) \\ \qquad \text{et} \\ \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in F \\ (F \text{ est } \textbf{stable par combinaison linéaire}) \end{cases}$$

Par la suite, on notera la combinaison linéaire $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ plus simplement $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E (s.e.v. en abrégé) si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.*

En général, on démontre qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-e.v. en établissant que c'est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. connu :

Proposition 2.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.

$$F \text{ est un s.e.v. de } E \iff \begin{cases} F \neq \varnothing \quad (\text{un s.e.v. contient toujours le vecteur } \vec{0}_E) \\ \quad\text{et} \\ \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2,\ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in F \\ (F \text{ est } \textbf{stable par combinaison linéaire}) \end{cases}$$

Par la suite, on notera la combinaison linéaire $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ plus simplement $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Proposition 2.3 (Intersection de deux s.e.v)

*L'**intersection** de deux s.e.v. est encore un s.e.v. C'est **faux** pour la **réunion**.*

Exemple 2.4

1. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$, le sous-ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un s.e.v.

Exemple 2.4

1. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$, le sous-ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un s.e.v.

2. Considérons le **système linéaire homogène** $\mathcal{S}$ de p équations à n inconnues suivant :

$$\mathcal{S} : \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pj}x_j + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

où les a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sont des scalaires donnés de $\mathbb{K}$ et les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des inconnues dans $\mathbb{K}$.
On peut interpréter le système $\mathcal{S}$ comme une conjonction d'équations de la **seule inconnue le n-uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$.
Dans ce contexte, l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est alors l'**intersection** de p s.e.v. de $\mathbb{K}^n$, c'est donc un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 2.4

1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$, le sous-ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ est un s.e.v.
2. Considérons le **système linéaire homogène** $\mathcal{S}$ de p équations à n inconnues suivant :

$$\mathcal{S} : \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pj}x_j + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

   où les a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sont des scalaires donnés de $\mathbb{K}$ et les $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des inconnues dans $\mathbb{K}$.
   On peut interpréter le système $\mathcal{S}$ comme une conjonction d'équations de la **seule inconnue le n-uplet** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$.
   Dans ce contexte, l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est alors l'**intersection** de p s.e.v. de $\mathbb{K}^n$, c'est donc un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.
3. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, les sous-ensembles des fonctions **paires** et des fonctions **impaires**, sont des s.e.v.

Exemple 2.4

1. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$, le sous-ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$ est un s.e.v.

2. Considérons le **système linéaire homogène** $\mathcal{S}$ de p équations à n inconnues suivant :

$$\mathcal{S} : \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pj}x_j + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

où les a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sont des scalaires donnés de $\mathbb{K}$ et les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des inconnues dans $\mathbb{K}$.
On peut interpréter le système $\mathcal{S}$ comme une conjonction d'équations de la **seule inconnue le n-uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$.
Dans ce contexte, l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est alors l'**intersection** de p s.e.v. de $\mathbb{K}^n$, c'est donc un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

3. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, les sous-ensembles des fonctions **paires** et des fonctions **impaires**, sont des s.e.v.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$:
   - le sous-ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(\alpha) = 0\}$ est un s.e.v. ;
   - le sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v.

Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)

Soit $(E,+,\cdot)$ *un e.v. et* A *une partie non vide de* E.
On appelle ***sous-espace vectoriel engendré par A****, noté* $\mathrm{Vect}(A)$*, le plus petit s.e.v. de* E *contenant* A*, c'est-à-dire que si* F *est un s.e.v. de* E *tel que* $A \subset F$*, alors* $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
Par convention, on pose $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \left\{\vec{0}_E\right\}$.

Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)

Soit $(E, +, \cdot)$ *un e.v. et* A *une partie non vide de* E*.*
On appelle ***sous-espace vectoriel engendré par A****, noté* $\mathrm{Vect}(A)$*, le plus petit s.e.v. de* E *contenant* A*, c'est-à-dire que si* F *est un s.e.v. de* E *tel que* $A \subset F$*, alors* $\mathrm{Vect}(A) \subset F$*.*
Par convention, on pose $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{\vec{0}_E\}$*.*

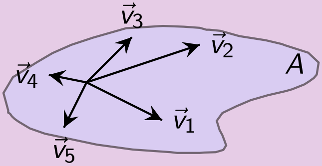
Proposition 2.6 (Ensemble de combinaisons linéaires)

Soit A *une partie non vide d'un e.v* E*.*

$\mathrm{Vect}(A)$ *est le s.e.v. de* E *constitué de toutes les* ***combinaisons linéaires*** *des vecteurs de* A*.*

En particulier, si A *est une famille finie de vecteurs* $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$*, alors :*

$$\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big) = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p,\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p\}$$



Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)

Soit $(E, +, \cdot)$ *un e.v. et* A *une partie non vide de* E.
On appelle ***sous-espace vectoriel engendré par A****, noté* $\mathrm{Vect}(A)$*, le plus petit s.e.v. de* E *contenant* A*, c'est-à-dire que si* F *est un s.e.v. de* E *tel que* $A \subset F$*, alors* $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
Par convention, on pose $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \left\{\vec{0}_E\right\}$.

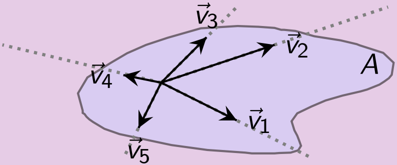
Proposition 2.6 (Ensemble de combinaisons linéaires)

Soit A *une partie non vide d'un e.v* E.

$\mathrm{Vect}(A)$ *est le s.e.v. de* E *constitué de toutes les* ***combinaisons linéaires*** *des vecteurs de* A.

En particulier, si A *est une famille finie de vecteurs* $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$*, alors :*

$$\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big) = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p,\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p\}$$



Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)

Soit $(E, +, \cdot)$ *un e.v. et* A *une partie non vide de* E.
On appelle ***sous-espace vectoriel engendré par A****, noté* $\mathrm{Vect}(A)$*, le plus petit s.e.v. de* E *contenant* A*, c'est-à-dire que si* F *est un s.e.v. de* E *tel que* $A \subset F$*, alors* $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
Par convention, on pose $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \left\{\vec{0}_E\right\}$.

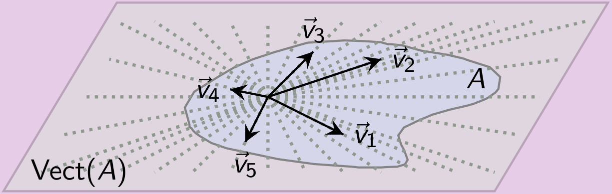
Proposition 2.6 (Ensemble de combinaisons linéaires)

Soit A *une partie non vide d'un e.v* E.

$\mathrm{Vect}(A)$ *est le s.e.v. de* E *constitué de toutes les* ***combinaisons linéaires*** *des vecteurs de* A.

En particulier, si A *est une famille finie de vecteurs* $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$*, alors :*

$$\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big) = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p,\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p\}$$



Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E*.*

Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E*.*

1. *Le s.e.v.* $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$ *est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*

Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E*.*

1. *Le s.e.v.* $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$ *est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*
2. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{0}_E)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$

Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E*.*

1. *Le s.e.v.* $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$ *est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*
2. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{0}_E)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*,\ \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \alpha\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big)$

Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E*.*

1. *Le s.e.v.* $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$ *est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*
2. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{0}_E)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*,\ \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \alpha\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big)$
4. $\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ *avec* $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ *(i fixé),*

   $$\mathrm{Vect}\Big(\Big(\vec{v}_1, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_p\Big)\Big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big)$$

Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E*.*

1. *Le s.e.v.* $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$ *est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*
2. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{0}_E)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*,\ \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \alpha\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big)$
4. $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ *avec* $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ *(*i *fixé),*
$$\mathrm{Vect}\Big(\big(\vec{v}_1, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_p\big)\Big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big)$$

Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.
Le s.e.v. $\mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big) = \{\alpha\vec{u},\ \alpha \in \mathbb{K}\}$, noté aussi $\mathbb{K}\vec{u}$, est une **droite vectorielle**.

Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.

1. *Le s.e.v.* $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$ *est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*
2. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{0}_E)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*,\ \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \alpha\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big)$
4. $\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ *avec* $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ *(i fixé),*
$$\mathrm{Vect}\Big(\Big(\vec{v}_1, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_p\Big)\Big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_p)\big)$$

Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.
Le s.e.v. $\mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big) = \{\alpha\vec{u},\ \alpha \in \mathbb{K}\}$, noté aussi $\mathbb{K}\vec{u}$, est une **droite vectorielle**.
2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires d'un $\mathbb{K}$-e.v. E (i.e. $\vec{w}$ ne coïncide avec aucun $\alpha\vec{v}$ et $\vec{v}$ ne coïncide avec aucun $\beta\vec{w}$).
Le s.e.v. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}, \vec{w})\big) = \big\{\alpha\vec{v} + \beta\vec{w},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\big\}$ est un **plan vectoriel**.

Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-e.v.* E*.*

1. *Le s.e.v.* $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)\big)$ *est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*
2. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}_E)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)\big)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \ \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \alpha\vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)\big)$
4. $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ *avec* $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ *(i fixé),*
$$\mathrm{Vect}\Big(\big(\vec{v}_1, \dots, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p\big)\Big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)\big)$$

Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.
Le s.e.v. $\mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big) = \{\alpha\vec{u}, \ \alpha \in \mathbb{K}\}$, noté aussi $\mathbb{K}\vec{u}$, est une **droite vectorielle**.
2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires d'un $\mathbb{K}$-e.v. E (i.e. $\vec{w}$ ne coïncide avec aucun $\alpha\vec{v}$ et $\vec{v}$ ne coïncide avec aucun $\beta\vec{w}$).
Le s.e.v. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}, \vec{w})\big) = \big\{\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\big\}$ est un **plan vectoriel**.
3. L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est une **droite vectorielle** dans le $\mathbb{R}$-e.v. des complexes $\mathbb{C}$.

Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.

1. *On appelle* ***somme*** *de F et G, l'ensemble noté $F+G$ défini par*

$$F+G=\{\vec{w}\in E : \exists\,\vec{u}\in F,\ \exists\,\vec{v}\in G,\ \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\}=\{\vec{u}+\vec{v},\ (\vec{u},\vec{v})\in F\times G\}.$$

Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.

1. *On appelle **somme** de F et G, l'ensemble noté $F + G$ défini par*

$$F + G = \{\vec{w} \in E : \exists\, \vec{u} \in F, \exists\, \vec{v} \in G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\} = \{\vec{u} + \vec{v}, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G\}.$$

2. *On dit que la somme $F + G$ est **directe** et on la note $F \oplus G$ lorsque la décomposition de tout vecteur $\vec{w}$ de $F + G$ en $\vec{u} + \vec{v}$ avec $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ est **unique**.*

Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.

1. *On appelle **somme** de F et G, l'ensemble noté $F+G$ défini par*

$$F+G=\{\vec{w}\in E : \exists\,\vec{u}\in F,\ \exists\,\vec{v}\in G,\ \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\}=\{\vec{u}+\vec{v},\ (\vec{u},\vec{v})\in F\times G\}.$$

2. *On dit que la somme $F+G$ est **directe** et on la note $F\oplus G$ lorsque la décomposition de tout vecteur $\vec{w}$ de $F+G$ en $\vec{u}+\vec{v}$ avec $(\vec{u},\vec{v})\in F\times G$ est **unique**.*

Proposition 2.10 (Somme et réunion)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.

1. *La somme $F+G$ est un **s.e.v.** de E contenant F et G et c'est le plus petit s.e.v. de E contenant $F\cup G$, autrement dit : $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.*

Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.

1. *On appelle* ***somme*** *de F et G, l'ensemble noté $F+G$ défini par*

$$F+G=\{\vec{w}\in E : \exists\,\vec{u}\in F,\ \exists\,\vec{v}\in G,\ \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\}=\{\vec{u}+\vec{v},\ (\vec{u},\vec{v})\in F\times G\}.$$

2. *On dit que la somme $F+G$ est* ***directe*** *et on la note $F\oplus G$ lorsque la décomposition de tout vecteur $\vec{w}$ de $F+G$ en $\vec{u}+\vec{v}$ avec $(\vec{u},\vec{v})\in F\times G$ est* ***unique****.*

Proposition 2.10 (Somme et réunion)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.

1. *La somme $F+G$ est un* ***s.e.v.*** *de E contenant F et G et c'est le plus petit s.e.v. de E contenant $F\cup G$, autrement dit : $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.*
2. *La somme $F+G$ est* ***directe*** *ssi $F\cap G=\{\vec{0}_E\}$.*

Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$\forall \vec{w} \in E,\ \exists!\, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G,\ \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

*Autrement dit, F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.*

Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$\forall \vec{w} \in E,\ \exists! \, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G,\ \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

*Autrement dit, F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.*

Théorème 2.12 (Caractérisation)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*F et G sont **supplémentaires** dans E ssi $F + G = E$ et $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.*

Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$\forall \vec{w} \in E, \ \exists! \, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \ \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

*Autrement dit, F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.*

Théorème 2.12 (Caractérisation)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*F et G sont **supplémentaires** dans E ssi $F + G = E$ et $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.*

Exemple 2.13

Dans l'e.v. $\mathbb{K}^3$, les s.e.v. $F = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{K}\}$ et $G = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{K}\}$ sont **supplémentaires**. On peut en effet décomposer de **manière unique** tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{K}^3$ en la somme $(x, y, 0)+(0, 0, z)$ d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$\forall \vec{w} \in E,\ \exists!\,(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G,\ \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

*Autrement dit, F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.*

Théorème 2.12 (Caractérisation)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*F et G sont **supplémentaires** dans E ssi $F + G = E$ et $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.*

Exemple 2.13

Dans l'e.v. $\mathbb{K}^3$, les s.e.v. $F = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{K}\}$ et $G = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{K}\}$ sont **supplémentaires**. On peut en effet décomposer de **manière unique** tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{K}^3$ en la somme $(x, y, 0)+(0, 0, z)$ d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple 2.14 (Fonctions paires/impaires)

Les s.e.v. des fonctions paires et impaires sont **supplémentaires** dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

Sommaire

Problématique

Avec une famille de deux vecteurs **non colinéaires** $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, il est possible de reconstruire **tout** l'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $E = \text{Vect}(\mathcal{S})$ par **combinaisons linéaires** de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: $E = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

Problématique

Avec une famille de deux vecteurs **non colinéaires** $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, il est possible de reconstruire **tout** l'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ par **combinaisons linéaires** de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: $E = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

- Si on retire un vecteur à la famille $\mathcal{S}$, on ne peut plus reconstruire ce plan vectoriel : on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille génératrice minimale**.

Problématique

Avec une famille de deux vecteurs **non colinéaires** $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, il est possible de reconstruire **tout** l'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $E = \text{Vect}(\mathcal{S})$ par **combinaisons linéaires** de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: $E = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

- Si on retire un vecteur à la famille $\mathcal{S}$, on ne peut plus reconstruire ce plan vectoriel : on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille génératrice minimale**.
- Si on rajoute un vecteur $\vec{u}_3$ de E à $\mathcal{S}$, on peut de nouveau reconstruire ce plan vectoriel mais $\vec{u}_3$ n'est pas indispensable à cette reconstruction puisqu'il est en fait combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille libre maximale** et que la famille agrandie $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **liée**.

Problématique

Avec une famille de deux vecteurs **non colinéaires** $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, il est possible de reconstruire **tout** l'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $E = \text{Vect}(\mathcal{S})$ par **combinaisons linéaires** de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: $E = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

- Si on retire un vecteur à la famille $\mathcal{S}$, on ne peut plus reconstruire ce plan vectoriel : on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille génératrice minimale**.
- Si on rajoute un vecteur $\vec{u}_3$ de E à $\mathcal{S}$, on peut de nouveau reconstruire ce plan vectoriel mais $\vec{u}_3$ n'est pas indispensable à cette reconstruction puisqu'il est en fait combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille libre maximale** et que la famille agrandie $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **liée**.
- En fait le famille $\mathcal{S}$ est une **base** du plan vectoriel E.

Problématique

Avec une famille de deux vecteurs **non colinéaires** $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, il est possible de reconstruire **tout** l'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ par **combinaisons linéaires** de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: $E = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

- Si on retire un vecteur à la famille $\mathcal{S}$, on ne peut plus reconstruire ce plan vectoriel : on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille génératrice minimale**.
- Si on rajoute un vecteur $\vec{u}_3$ de E à $\mathcal{S}$, on peut de nouveau reconstruire ce plan vectoriel mais $\vec{u}_3$ n'est pas indispensable à cette reconstruction puisqu'il est en fait combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille libre maximale** et que la famille agrandie $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **liée**.
- En fait le famille $\mathcal{S}$ est une **base** du plan vectoriel E.

On va étendre ces trois notions de **familles libres/liées**, **familles génératrices** et de **bases** à un espace vectoriel quelconque.

Un objectif sera alors de déterminer des **bases** d'un espace vectoriel, c'est-à-dire des familles :

- comportant suffisamment de vecteurs pour **engendrer** cet espace (i.e. **familles génératrices**),
- et ne comportant pas de vecteurs inutiles à l'**engendrement** de cet espace (i.e. **familles libres**).

Définition 3.1 (Indépendance linéaire, familles libres, liées)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

1. *On dit qu'une famille de p vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E est **libre** lorsque :*
   $\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$,

   $$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}_E \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

   *On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont **linéairement indépendants**.*

Définition 3.1 (Indépendance linéaire, familles libres, liées)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

1. *On dit qu'une famille de p vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E est* ***libre*** *lorsque :*
   $\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$,
   $$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}_E \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$
   On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont ***linéairement indépendants****.*
2. *On dit que la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est* ***liée*** *lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire*
   $$\exists\,(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \text{ tel que } \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}_E.$$
   On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont ***linéairement dépendants****.*

Définition 3.1 (Indépendance linéaire, familles libres, liées)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

1. *On dit qu'une famille de p vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E est* ***libre*** *lorsque :*
   $\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$,
   $$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_E \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$
   On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont ***linéairement indépendants****.*

2. *On dit que la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est* ***liée*** *lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire*
   $$\exists\,(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \text{ tel que } \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_E.$$
   On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont ***linéairement dépendants****.*

Exemple 3.2 (Vecteurs colinéaires, coplanaires)

1. **Deux** vecteurs formant une famille **liée** sont dits **colinéaires**.
   Exemple : Soit dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-2, -4)$. On a $2\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
   Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

Définition 3.1 (Indépendance linéaire, familles libres, liées)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

1. *On dit qu'une famille de p vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de E est* ***libre*** *lorsque :* $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$,

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_E \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

   On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ sont ***linéairement indépendants****.*

2. *On dit que la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est* ***liée*** *lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire*

$$\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}) \text{ tel que } \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_E.$$

   On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ sont ***linéairement dépendants****.*

Exemple 3.2 (Vecteurs colinéaires, coplanaires)

1. **Deux** vecteurs formant une famille **liée** sont dits **colinéaires**.
   Exemple : Soit dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-2, -4)$. On a $2\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
   Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.
2. **Trois** vecteurs formant une famille **liée** sont dits **coplanaires**.
   Exemple : Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-3, 2, -1)$ et $\vec{w} = (1, -2, -1)$.
   On a $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$. Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

  En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

  En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,
  i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(2x) = 0$.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

  En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,
  i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(2x) = 0$.
  Alors :

  - pour $x = 0$, on obtient $\alpha + \gamma = 0$;

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

  En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,
  i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(2x) = 0$.
  Alors :

  * pour $x = 0$, on obtient $\alpha + \gamma = 0$;
  * pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta - \gamma = 0$;

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

  En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,
  i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(2x) = 0$.
  Alors :

  * pour $x = 0$, on obtient $\alpha + \gamma = 0$;
  * pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta - \gamma = 0$;
  * pour $x = \pi$, on obtient $-\alpha + \gamma = 0$.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

  En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,
  i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(2x) = 0$.
  Alors :

  * pour $x = 0$, on obtient $\alpha + \gamma = 0$;
  * pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta - \gamma = 0$;
  * pour $x = \pi$, on obtient $-\alpha + \gamma = 0$.

  On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

  En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,
  i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(2x) = 0$.
  Alors :

  * pour $x = 0$, on obtient $\alpha + \gamma = 0$;
  * pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta - \gamma = 0$;
  * pour $x = \pi$, on obtient $-\alpha + \gamma = 0$.

  On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

- La famille (f^2, g^2, h) est **liée**.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

  En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,
  i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(2x) = 0$.
  Alors :

  * pour $x = 0$, on obtient $\alpha + \gamma = 0$;
  * pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta - \gamma = 0$;
  * pour $x = \pi$, on obtient $-\alpha + \gamma = 0$.

  On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

- La famille (f^2, g^2, h) est **liée**.

  En effet : on a la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, d'où la combinaison linéaire non triviale $f^2 - g^2 - h = 0$.

Proposition 3.4 (Propriétés immédiates)

Proposition 3.4 (Propriétés immédiates)

1. *Une famille de vecteurs est* ***liée*** *ssi l'un des vecteurs est* ***combinaison linéaire*** *des autres.*

Proposition 3.4 (Propriétés immédiates)

1. *Une famille de vecteurs est* ***liée*** *ssi l'un des vecteurs est* ***combinaison linéaire*** *des autres.*
2. *Toute famille de vecteurs contenant le* ***vecteur nul*** *est* ***liée****.*

Proposition 3.4 (Propriétés immédiates)

1. *Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.*
2. *Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée**.*
3. *Toute famille **extraite** d'une famille **libre** est **libre**.*

Proposition 3.4 (Propriétés immédiates)

1. *Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.*
2. *Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée**.*
3. *Toute famille **extraite** d'une famille **libre** est **libre**.*
4. *Toute famille **contenant** une famille **liée** est **liée**.*

Proposition 3.4 (Propriétés immédiates)

1. *Une famille de vecteurs est* ***liée*** *ssi l'un des vecteurs est* ***combinaison linéaire*** *des autres.*
2. *Toute famille de vecteurs contenant le* ***vecteur nul*** *est* ***liée****.*
3. *Toute famille* ***extraite*** *d'une famille* ***libre*** *est* ***libre****.*
4. *Toute famille* ***contenant*** *une famille* ***liée*** *est* ***liée****.*

Proposition 3.5 (Extension d'une famille libre)

Soit $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ *une famille* ***libre*** *de vecteurs d'un e.v.* E.
Soit $\vec{v} \in E$. *Alors :*

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v}) \text{ est } \textbf{libre} \iff \vec{v} \notin \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big).$$

ou encore, de manière équivalente :

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v}) \text{ est } \textbf{liée} \iff \vec{v} \in \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big).$$

Autrement dit, on peut augmenter la taille d'une famille libre de vecteurs en lui ajoutant un vecteur qui ***n****'est* ***pas*** *combinaison linéaire de ces vecteurs.*

Définition 3.6 (Familles génératrices)

- *Une famille de vecteurs* $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ *d'un e.v.* E *est dite* ***génératrice*** *si tout vecteur de* E *s'écrit comme* ***combinaison linéaire*** *de* $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$*, ou encore, de manière équivalente, ssi* $E = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)\big)$.

  On dit aussi que la famille ***engendre*** E.

Définition 3.6 (Familles génératrices)

- *Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ d'un e.v. E est dite* ***génératrice*** *si tout vecteur de E s'écrit comme* ***combinaison linéaire*** *de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, ou encore, de manière équivalente, ssi $E = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$.*

  On dit aussi que la famille ***engendre*** *E.*

Proposition 3.7 (Propriétés immédiates)

1. *La famille contenant* ***tous*** *les vecteurs de E est naturellement* ***génératrice*** *de E !*

Définition 3.6 (Familles génératrices)

- *Une famille de vecteurs* $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ *d'un e.v.* E *est dite* ***génératrice*** *si tout vecteur de* E *s'écrit comme* ***combinaison linéaire*** *de* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$*, ou encore, de manière équivalente, ssi* $E = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$.

  On dit aussi que la famille ***engendre*** E.

Proposition 3.7 (Propriétés immédiates)

1. *La famille contenant* ***tous*** *les vecteurs de* E *est naturellement* ***génératrice*** *de* E *!*
2. *Une famille est* ***génératrice*** *du s.e.v. qu'elle* ***engendre*** *(cf. proposition 2.6).*

Définition 3.6 (Familles génératrices)

- *Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ d'un e.v. E est dite* ***génératrice*** *si tout vecteur de E s'écrit comme* ***combinaison linéaire*** *de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, ou encore, de manière équivalente, ssi $E = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$.*

  On dit aussi que la famille ***engendre*** *E.*

Proposition 3.7 (Propriétés immédiates)

1. *La famille contenant* ***tous*** *les vecteurs de E est naturellement* ***génératrice*** *de E !*
2. *Une famille est* ***génératrice*** *du s.e.v. qu'elle* ***engendre*** *(cf. proposition 2.6).*

Proposition 3.8 (Extension/restriction d'une famille génératrice)

Soit $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs ***génératrice*** *d'un e.v. E.*

1. *Soit $\vec{v} \in E$. Alors $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v})$ reste une famille de vecteurs* ***génératrice*** *de E.*

Définition 3.6 (Familles génératrices)

- *Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ d'un e.v. E est dite* ***génératrice*** *si tout vecteur de E s'écrit comme* ***combinaison linéaire*** *de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$, ou encore, de manière équivalente, ssi $E = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)\big)$.*

  On dit aussi que la famille ***engendre*** *E.*

Proposition 3.7 (Propriétés immédiates)

1. *La famille contenant* ***tous*** *les vecteurs de E est naturellement* ***génératrice*** *de E !*
2. *Une famille est* ***génératrice*** *du s.e.v. qu'elle* ***engendre*** *(cf. proposition 2.6).*

Proposition 3.8 (Extension/restriction d'une famille génératrice)

Soit $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs ***génératrice*** *d'un e.v. E.*

1. *Soit $\vec{v} \in E$. Alors $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v})$ reste une famille de vecteurs* ***génératrice*** *de E.*
2. *Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. Alors*

$$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_p) \text{ est } \textbf{génératrice de } E \iff \vec{v}_i \in \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_p)\big).$$

   Autrement dit, on peut diminuer la taille d'une famille génératrice de vecteurs en lui retirant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Définition 3.9 (Bases)

- *Une famille* ***libre*** *et* ***génératrice*** *de E est appelée une* ***base*** *de E.*

Définition 3.9 (Bases)

- *Une famille **libre** et **génératrice** de E est appelée une **base** de E.*

Proposition 3.10 (Coordonnées)

*La famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une **base** d'un $\mathbb{K}$-e.v. E ssi tout vecteur de E s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.*

*Pour tout vecteur $\vec{v} \in E$, il existe donc un **unique** n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n$.*

*Les scalaires $x_1, \dots, x_n$ de cette décomposition sont appelés les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Définition 3.9 (Bases)

- *Une famille **libre** et **génératrice** de E est appelée une **base** de E.*

Proposition 3.10 (Coordonnées)

*La famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une **base** d'un $\mathbb{K}$-e.v. E ssi tout vecteur de E s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.*

*Pour tout vecteur $\vec{v} \in E$, il existe donc un **unique** n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$.*

*Les scalaires $x_1, \dots, x_n$ de cette décomposition sont appelés les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 3.11 (Base canonique)

Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$, la famille de vecteurs $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ où $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 étant à la i-ème position), est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée **base canonique de $\mathbb{K}^n$**.
On a pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \dots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$.
Les **coordonnées** du **vecteur** $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dans la **base canonique** sont précisément les **scalaires** $x_1, \dots, x_n$.

Définition 3.12 (E.v. de dimension finie)

On dit qu'un e.v. E est de ***dimension finie*** *s'il existe une famille* ***finie*** *de vecteurs* ***génératrice*** *de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de* ***dimension infinie*** *et l'on note par convention* $\dim(E) = +\infty$.

Définition 3.12 (E.v. de dimension finie)

*On dit qu'un e.v. E est de **dimension finie** s'il existe une famille **finie** de vecteurs **génératrice** de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie** et l'on note par convention* $\dim(E) = +\infty$.

Théorème 3.13 (dit de la base incomplète)

*Dans un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul :*

1. *toute famille **libre** (finie) peut être complétée en une **base** ;*
2. *de toute famille **génératrice** (finie), on peut extraire une **base**.*

Définition 3.12 (E.v. de dimension finie)

On dit qu'un e.v. E est de ***dimension finie*** *s'il existe une famille* ***finie*** *de vecteurs* ***génératrice*** *de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de* ***dimension infinie*** *et l'on note par convention* $\dim(E) = +\infty$.

Théorème 3.13 (dit de la base incomplète)

Dans un e.v. de ***dimension finie*** *non réduit à son vecteur nul :*

1. *toute famille* ***libre*** *(finie) peut être complétée en une* ***base*** *;*
2. *de toute famille* ***génératrice*** *(finie), on peut extraire une* ***base****.*

Corollaire 3.14 (Existence de bases)

Tout e.v. de ***dimension finie*** *non réduit à son vecteur nul admet une base (****finie****).*

Définition 3.12 (E.v. de dimension finie)

On dit qu'un e.v. E est de ***dimension finie*** *s'il existe une famille* ***finie*** *de vecteurs* ***génératrice*** *de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de* ***dimension infinie*** *et l'on note par convention $\dim(E) = +\infty$.*

Théorème 3.13 (dit de la base incomplète)

Dans un e.v. de ***dimension finie*** *non réduit à son vecteur nul :*

1. *toute famille* ***libre*** *(finie) peut être complétée en une* ***base*** *;*
2. *de toute famille* ***génératrice*** *(finie), on peut extraire une* ***base****.*

Corollaire 3.14 (Existence de bases)

Tout e.v. de ***dimension finie*** *non réduit à son vecteur nul admet une base (****finie****).*

Remarque 3.15 (Existence de bases en dimension infinie (facultatif))

On peut définir en **dimension infinie** la notion de **famille infinie** de vecteurs libre, génératrice. On peut alors montrer que tout e.v. de **dimension infinie** admet également ne base (**infinie**).

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

- Si $\mathcal{L}$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

- Si $\mathcal{L}$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}$ **n'**est **pas génératrice** de E.
  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

- Si $\mathcal{L}$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}$ **n'**est **pas génératrice** de E.
  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  En effet :
  sinon tous les vecteurs de $\mathcal{G}$ seraient combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

- Si $\mathcal{L}$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}$ **n'**est **pas génératrice** de E.
  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  En effet :
  sinon tous les vecteurs de $\mathcal{G}$ seraient combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  La famille $\mathcal{G}$ étant **génératrice** de E, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$, eux-mêmes étant combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

- Si $\mathcal{L}$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}$ **n'**est **pas génératrice** de E.
  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  En effet :
  sinon tous les vecteurs de $\mathcal{G}$ seraient combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  La famille $\mathcal{G}$ étant **génératrice** de E, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$, eux-mêmes étant combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  Par suite, tout vecteur de E serait combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

- Si $\mathcal{L}$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}$ **n'**est **pas génératrice** de E.
  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  En effet :
  sinon tous les vecteurs de $\mathcal{G}$ seraient combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  La famille $\mathcal{G}$ étant **génératrice** de E, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$, eux-mêmes étant combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  Par suite, tout vecteur de E serait combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  Ainsi $\mathcal{L}$ serait **génératrice** de E, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

- Si $\mathcal{L}$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}$ **n'**est **pas génératrice** de E.
  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  En effet :
  sinon tous les vecteurs de $\mathcal{G}$ seraient combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  La famille $\mathcal{G}$ étant **génératrice** de E, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$, eux-mêmes étant combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  Par suite, tout vecteur de E serait combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  Ainsi $\mathcal{L}$ serait **génératrice** de E, ce qui est contraire à l'hypothèse.

  Supposons donc e.g. que $\vec{v}_1$ ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.
  Alors la sur-famille $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1) = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_1\right)$ de $\mathcal{L}$ est **libre**.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

On réitère le procédé à partir de la famille **libre** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1)$:

- Si $\mathcal{L}_1$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

On réitère le procédé à partir de la famille **libre** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1)$:

- Si $\mathcal{L}_1$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}_1$ **n'**est **pas génératrice** de E.

  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

On réitère le procédé à partir de la famille **libre** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1)$:

- Si $\mathcal{L}_1$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}_1$ **n'**est **pas génératrice** de E.

  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.

  Supposons donc e.g. que $\vec{v}_2$ ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.
  Alors la sur-famille $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup (\vec{v}_2) = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$ de $\mathcal{L}_1$ est **libre**.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

On réitère le procédé à partir de la famille **libre** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1)$:

- Si $\mathcal{L}_1$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}_1$ **n'**est **pas génératrice** de E.

  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.

  Supposons donc e.g. que $\vec{v}_2$ ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.
  Alors la sur-famille $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup (\vec{v}_2) = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$ de $\mathcal{L}_1$ est **libre**.

On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sur-familles **libres** $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \ldots$ de $\mathcal{L}$ en rajoutant progressivement des vecteurs de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{L} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_3 \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **libre** de E.

   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q\right)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

On réitère le procédé à partir de la famille **libre** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1)$:

- Si $\mathcal{L}_1$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}_1$ **n'**est **pas génératrice** de E.

  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.

  Supposons donc e.g. que $\vec{v}_2$ ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.
  Alors la sur-famille $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup (\vec{v}_2) = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$ de $\mathcal{L}_1$ est **libre**.

On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sur-familles **libres** $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \ldots$ de $\mathcal{L}$ en rajoutant progressivement des vecteurs de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{L} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_3 \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

Or, $\mathcal{G}$ étant **finie**, le procédé s'arrête :
il existe un entier r $(r \leqslant q)$ tel que la sur-famille **libre** $\mathcal{L}_r$ de $\mathcal{L}$ ainsi construite soit **génératrice** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille **libre** de E.

L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q)$ de E.
On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

On réitère le procédé à partir de la famille **libre** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1)$:

- Si $\mathcal{L}_1$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}_1$ **n'**est **pas génératrice** de E.

  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.

  Supposons donc e.g. que $\vec{v}_2$ ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.
  Alors la sur-famille $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup (\vec{v}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de $\mathcal{L}_1$ est **libre**.

On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sur-familles **libres** $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \ldots$ de $\mathcal{L}$ en rajoutant progressivement des vecteurs de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{L} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_3 \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

Or, $\mathcal{G}$ étant **finie**, le procédé s'arrête :
il existe un entier r $(r \leqslant q)$ tel que la sur-famille **libre** $\mathcal{L}_r$ de $\mathcal{L}$ ainsi construite soit **génératrice** de E.
C'est une **base** de E contenant la famille **libre** initiale $\mathcal{L}$.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_p$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-1}\right)$ est encore **génératrice** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_p$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-1}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère le procédé à partir de $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\}$:
   - Si $\mathcal{G}_1$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_p$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-1}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère le procédé à partir de $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\}$:
   - Si $\mathcal{G}_1$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}_1$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}_1$ combinaison linéaire des autres.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_p$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-1}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère le procédé à partir de $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\}$:
   - Si $\mathcal{G}_1$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}_1$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}_1$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_{p-1}$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \backslash \{\vec{u}_{p-1}\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-2}\right)$ est encore **génératrice** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_p$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-1}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère le procédé à partir de $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\}$:
   - Si $\mathcal{G}_1$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}_1$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}_1$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_{p-1}$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \backslash \{\vec{u}_{p-1}\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-2}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sous-familles **génératrices** $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \ldots$ de $\mathcal{G}$ en retirant progressivement des vecteurs de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_2 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_3 \underset{\neq}{\supset} \cdots$$

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_p$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}\backslash\{\vec{u}_p\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-1}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère le procédé à partir de $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}\backslash\{\vec{u}_p\}$:
   - Si $\mathcal{G}_1$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}_1$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}_1$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_{p-1}$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1\backslash\{\vec{u}_{p-1}\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-2}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sous-familles **génératrices** $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \ldots$ de $\mathcal{G}$ en retirant progressivement des vecteurs de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_2 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_3 \underset{\neq}{\supset} \cdots$$

   Le nombre de vecteurs de chaque sous-famille étant décroissant, le procédé s'arrête : il existe un entier r ($r \leqslant p$) tel que la sous-famille **génératrice** $\mathcal{G}_r$ de $\mathcal{G}$ ainsi construite soit **libre** de E.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_p$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}\backslash\{\vec{u}_p\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-1}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère le procédé à partir de $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}\backslash\{\vec{u}_p\}$:
   - Si $\mathcal{G}_1$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}_1$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}_1$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_{p-1}$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1\backslash\{\vec{u}_{p-1}\} = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{p-2}\right)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sous-familles **génératrices** $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \ldots$ de $\mathcal{G}$ en retirant progressivement des vecteurs de $\mathcal{G}$:
   $$\mathcal{G} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_2 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_3 \underset{\neq}{\supset} \cdots$$
   Le nombre de vecteurs de chaque sous-famille étant décroissant, le procédé s'arrête : il existe un entier r ($r \leqslant p$) tel que la sous-famille **génératrice** $\mathcal{G}_r$ de $\mathcal{G}$ ainsi construite soit **libre** de E.
   C'est une **base** de E extraite de la famille **génératrice** initiale $\mathcal{G}$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

   Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

   Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.

   - En complétant $\mathcal{L}$ avec l'un des deux vecteurs $\vec{e}_1$ ou $\vec{e}_2$ de $\mathcal{B}$, on obtient une famille **liée**, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

   Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec l'un des deux vecteurs $\vec{e}_1$ ou $\vec{e}_2$ de $\mathcal{B}$, on obtient une famille **liée**, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec le vecteur $\vec{e}_3$ de $\mathcal{B}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

   Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec l'un des deux vecteurs $\vec{e}_1$ ou $\vec{e}_2$ de $\mathcal{B}$, on obtient une famille **liée**, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec le vecteur $\vec{e}_3$ de $\mathcal{B}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, $\vec{v}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

   Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec l'un des deux vecteurs $\vec{e}_1$ ou $\vec{e}_2$ de $\mathcal{B}$, on obtient une famille **liée**, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec le vecteur $\vec{e}_3$ de $\mathcal{B}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, $\vec{v}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

   La famille $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ contient la base $\mathcal{B}$, elle est donc **génératrice** de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

   Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec l'un des deux vecteurs $\vec{e}_1$ ou $\vec{e}_2$ de $\mathcal{B}$, on obtient une famille **liée**, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec le vecteur $\vec{e}_3$ de $\mathcal{B}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, $\vec{v}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

   La famille $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ contient la base $\mathcal{B}$, elle est donc **génératrice** de $\mathbb{R}^3$.
   - En extrayant l'un des trois vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ou $\vec{v}_4$ de $\mathcal{G}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

   Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec l'un des deux vecteurs $\vec{e}_1$ ou $\vec{e}_2$ de $\mathcal{B}$, on obtient une famille **liée**, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec le vecteur $\vec{e}_3$ de $\mathcal{B}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, $\vec{v}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

   La famille $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ contient la base $\mathcal{B}$, elle est donc **génératrice** de $\mathbb{R}^3$.
   - En extrayant l'un des trois vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ou $\vec{v}_4$ de $\mathcal{G}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.
   - En extrayant le vecteur $\vec{v}_3$ de $\mathcal{G}$, on obtient une famille qui **n'est pas génératrice** de $\mathbb{R}^3$, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul.*

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la **dimension de $\boldsymbol{E}$**. Ce nombre est noté $\dim(E)$.*

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

Soit E un e.v. de ***dimension finie*** *non réduit à son vecteur nul.*

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la* ***dimension de E****. Ce nombre est noté $\dim(E)$.*
2. - *Toute famille* ***libre*** *de E contient* ***au plus*** *n vecteurs.*

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul.*

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la **dimension de E**. Ce nombre est noté $\dim(E)$.*
2. - *Toute famille **libre** de E contient **au plus** n vecteurs.*
   - *Toute famille **génératrice** de E contient **au moins** n vecteurs.*

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul.*

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la **dimension de E**. Ce nombre est noté* $\dim(E)$.
2. - *Toute famille **libre** de E contient **au plus** n vecteurs.*
   - *Toute famille **génératrice** de E contient **au moins** n vecteurs.*
3. - *Toute famille **libre** de n vecteurs de E est une **base**.*

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul.*

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la **dimension de E**. Ce nombre est noté $\dim(E)$.*
2. - *Toute famille **libre** de E contient **au plus** n vecteurs.*
   - *Toute famille **génératrice** de E contient **au moins** n vecteurs.*
3. - *Toute famille **libre** de n vecteurs de E est une **base**.*
   - *Toute famille **génératrice** de n vecteurs de E est une **base**.*

Par convention, on pose $\dim\left(\left\{\vec{0}_E\right\}\right) = 0$.

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul.*

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la **dimension de E**. Ce nombre est noté* $\dim(E)$.
2. - *Toute famille **libre** de E contient **au plus** n vecteurs.*
   - *Toute famille **génératrice** de E contient **au moins** n vecteurs.*
3. - *Toute famille **libre** de n vecteurs de E est une **base**.*
   - *Toute famille **génératrice** de n vecteurs de E est une **base**.*

Par convention, on pose $\dim\left(\{\vec{0}_E\}\right) = 0$.

Corollaire 3.18 (Équivalence entre famille libre et famille génératrice)

*Dans un e.v. de dimension **n**, si $\mathcal{F}$ est une famille de **n** vecteurs, alors :*

$\mathcal{F}$ *est une **base** de E* $\iff$ $\mathcal{F}$ *est **libre*** $\iff$ $\mathcal{F}$ *est **génératrice** de E.*

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul.*

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la **dimension de E**. Ce nombre est noté $\dim(E)$.*
2. - *Toute famille **libre** de E contient **au plus** n vecteurs.*
   - *Toute famille **génératrice** de E contient **au moins** n vecteurs.*
3. - *Toute famille **libre** de n vecteurs de E est une **base**.*
   - *Toute famille **génératrice** de n vecteurs de E est une **base**.*

Par convention, on pose $\dim\left(\{\vec{0}_E\}\right) = 0$.

Corollaire 3.18 (Équivalence entre famille libre et famille génératrice)

*Dans un e.v. de dimension **n**, si $\mathcal{F}$ est une famille de **n** vecteurs, alors :*

$$\mathcal{F} \text{ est une } \textbf{base} \text{ de } E \iff \mathcal{F} \text{ est } \textbf{libre} \iff \mathcal{F} \text{ est } \textbf{génératrice} \text{ de } E.$$

Corollaire 3.19 (Dimension infinie)

*Si un e.v. possède des familles libres de cardinal **arbitrairement grand,** alors il est de **dimension infinie**.*

Démonstration du théorème de la dimension

Lemme fondamental de Steinitz (facultatif)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
$q+1$ vecteurs combinaisons linéaires de q autres vecteurs constituent nécessairement un système **lié**.

Démonstration du théorème de la dimension

Lemme fondamental de Steinitz (facultatif)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
$q + 1$ vecteurs combinaisons linéaires de q autres vecteurs constituent nécessairement un système **lié**.

Plus généralement, p vecteurs combinaisons linéaires de q autres avec $p > q$ constituent nécessairement un système **lié**.

Démonstration du théorème de la dimension

Lemme fondamental de Steinitz (facultatif)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
$q+1$ vecteurs combinaisons linéaires de q autres vecteurs constituent nécessairement un système **lié**.

Plus généralement, p vecteurs combinaisons linéaires de q autres avec $p > q$ constituent nécessairement un système **lié**.

Conséquence 1

Pour toute famille **libre** de p vecteurs et toute famille **génératrice** de q vecteurs, on a $p \leqslant q$.

En d'autre termes, une famille **libre ne contient pas plus** de vecteurs qu'une famille **génératrice**.

Démonstration du théorème de la dimension

Lemme fondamental de Steinitz (facultatif)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
$q+1$ vecteurs combinaisons linéaires de q autres vecteurs constituent nécessairement un système **lié**.

Plus généralement, p vecteurs combinaisons linéaires de q autres avec $p > q$ constituent nécessairement un système **lié**.

Conséquence 1

Pour toute famille **libre** de p vecteurs et toute famille **génératrice** de q vecteurs, on a $p \leqslant q$.

En d'autre termes, une famille **libre ne contient pas plus** de vecteurs qu'une famille **génératrice**.

Conséquence 2

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E.

- $\mathcal{B}_1$ est une famille **libre** et $\mathcal{B}_2$ est une famille **génératrice**, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$;

Démonstration du théorème de la dimension

Lemme fondamental de Steinitz (facultatif)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
$q+1$ vecteurs combinaisons linéaires de q autres vecteurs constituent nécessairement un système **lié**.

Plus généralement, p vecteurs combinaisons linéaires de q autres avec $p > q$ constituent nécessairement un système **lié**.

Conséquence 1

Pour toute famille **libre** de p vecteurs et toute famille **génératrice** de q vecteurs, on a $p \leqslant q$.

En d'autre termes, une famille **libre ne contient pas plus** de vecteurs qu'une famille **génératrice**.

Conséquence 2

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E.

- $\mathcal{B}_1$ est une famille **libre** et $\mathcal{B}_2$ est une famille **génératrice**, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$;
- $\mathcal{B}_2$ est une famille **libre** et $\mathcal{B}_1$ est une famille **génératrice**, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_2) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{B}_1)$.

Démonstration du théorème de la dimension

Lemme fondamental de Steinitz (facultatif)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
$q+1$ vecteurs combinaisons linéaires de q autres vecteurs constituent nécessairement un système **lié**.

Plus généralement, p vecteurs combinaisons linéaires de q autres avec $p > q$ constituent nécessairement un système **lié**.

Conséquence 1

Pour toute famille **libre** de p vecteurs et toute famille **génératrice** de q vecteurs, on a $p \leqslant q$.

En d'autre termes, une famille **libre ne contient pas plus** de vecteurs qu'une famille **génératrice**.

Conséquence 2

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E.

- $\mathcal{B}_1$ est une famille **libre** et $\mathcal{B}_2$ est une famille **génératrice**, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$;
- $\mathcal{B}_2$ est une famille **libre** et $\mathcal{B}_1$ est une famille **génératrice**, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_2) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{B}_1)$.

D'où $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$. Toutes les bases de E ont **même** nombre de vecteurs.

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n+1$. La famille de polynômes $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en est une base appelée **base canonique**.

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n+1$. La famille de polynômes $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en est une base appelée **base canonique**.
4. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n+1$. La famille de polynômes $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en est une base appelée **base canonique**.
4. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.
5. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions $\left(x\mapsto x^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n+1$. La famille de polynômes $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en est une base appelée **base canonique**.
4. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.
5. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions $\left(x \mapsto x^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.

Exemple 3.21 (Base de Taylor)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. La formule de Taylor pour un polynôme de degré au plus n fournit la relation $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n+1$. La famille de polynômes $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en est une base appelée **base canonique**.
4. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.
5. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions $\left(x\mapsto x^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.

Exemple 3.21 (Base de Taylor)

Soit $\alpha\in\mathbb{K}$. La formule de Taylor pour un polynôme de degré au plus n fournit la relation $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$ que l'on peut interpréter en disant que la famille de polynômes $\left((X-\alpha)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est **génératrice** de l'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n+1$. La famille de polynômes $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en est une base appelée **base canonique**.
4. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.
5. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions $\left(x\mapsto x^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.

Exemple 3.21 (Base de Taylor)

Soit $\alpha\in\mathbb{K}$. La formule de Taylor pour un polynôme de degré au plus n fournit la relation $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$ que l'on peut interpréter en disant que la famille de polynômes $\left((X-\alpha)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est **génératrice** de l'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$. Comme elle contient $n+1$ polynômes et comme $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$, elle est aussi **libre**. C'est ainsi une **base** de $\mathbb{K}_n[X]$.

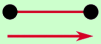
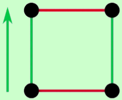
Exemple 3.22 (Dimensions 0 à 5)

•					•
0D					#Dim
$\vec{0}$ Point					

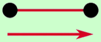
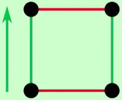
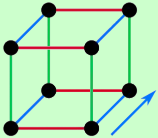
Exemple 3.22 (Dimensions 0 à 5)

					X
0D	1D				#Dim
$\vec{0}$ Point	Droite Segment				

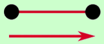
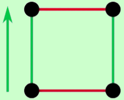
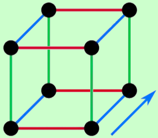
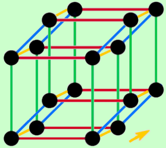
Exemple 3.22 (Dimensions 0 à 5)

					
0D	1D	2D			#Dim
$\vec{0}$ Point	Droite Segment	Plan Carré			

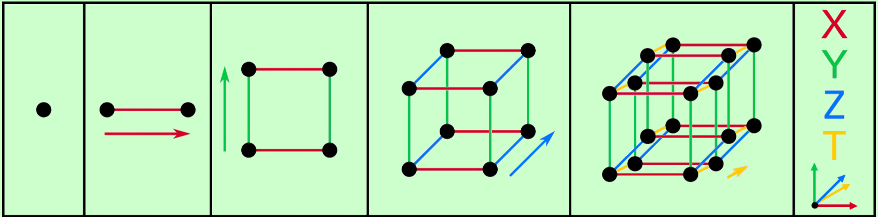
Exemple 3.22 (Dimensions 0 à 5)

					X Y Z 
0D	1D	2D	3D		#Dim
$\vec{0}$ Point	Droite Segment	Plan Carré	Espace Cube		

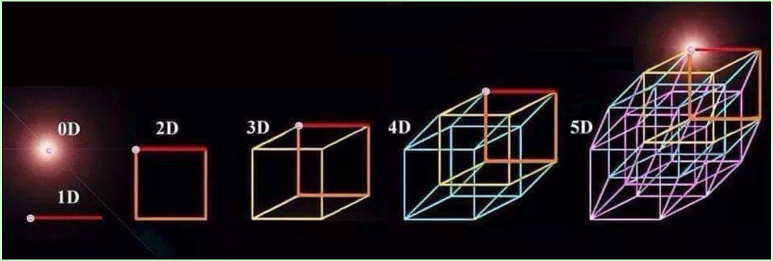
Exemple 3.22 (Dimensions 0 à 5)

					X Y Z T 
0D	1D	2D	3D	4D	#Dim
$\vec{0}$ Point	Droite Segment	Plan Carré	Espace Cube	Hyperespace Tesseract	

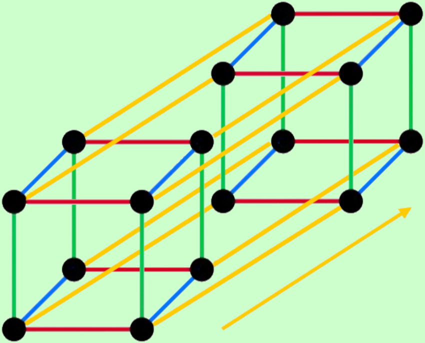
Exemple 3.22 (Dimensions 0 à 5)



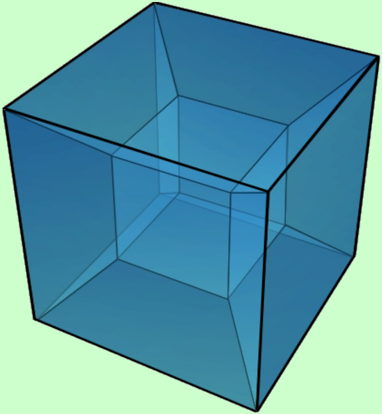
0D	1D	2D	3D	4D	#Dim
$\vec{0}$ Point	Droite Segment	Plan Carré	Espace Cube	Hyperespace Tesseract	



Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)

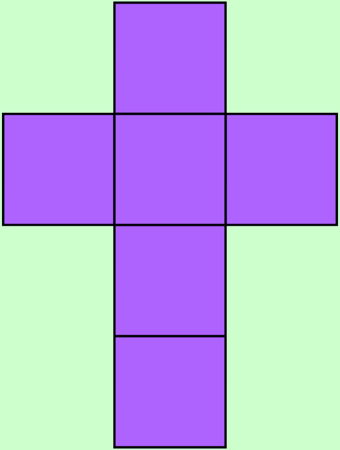


Perspective cavalière

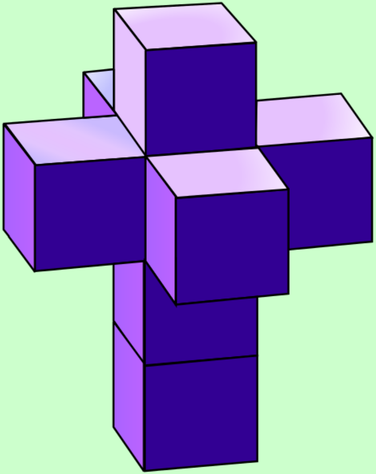


Représentation de Schleger

Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)

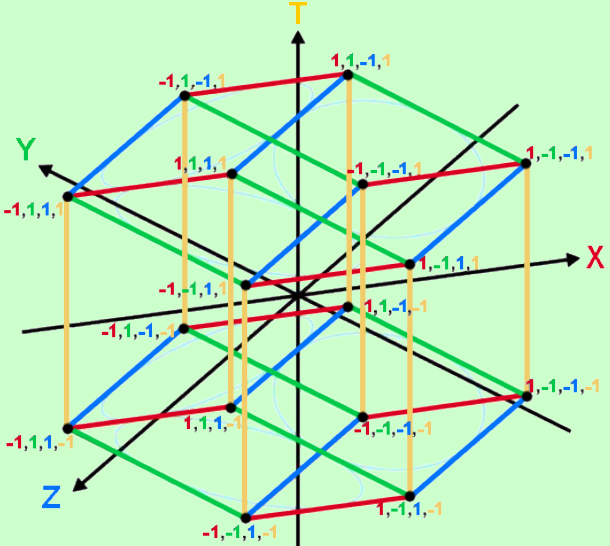


Patron d'un cube



Patron d'un tesseract

Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)



Tesseract et coordonnées

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

Soit E un e.v. de ***dimension finie****.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   Alors F est de ***dimension finie*** *et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.*

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

Soit E un e.v. de ***dimension finie****.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   Alors F est de ***dimension finie*** *et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   *Alors F est de **dimension finie** et* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ *alors* $F = E$.
2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a* $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   *Alors F est de **dimension finie** et* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ *alors* $F = E$.
2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a* $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.
   - *Si $F \subset G$ et* $\dim(F) = \dim(G)$ *alors* $F = G$.

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

Soit E un e.v. de ***dimension finie****.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   Alors F est de ***dimension finie*** *et* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ *alors* $F = E$.

2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a* $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.
   - *Si* $F \subset G$ *et* $\dim(F) = \dim(G)$ *alors* $F = G$.
   - $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ *(formule de* ***Grassmann****).*

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

Soit E un e.v. de ***dimension finie****.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   Alors F est de ***dimension finie*** *et* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ *alors* $F = E$.
2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a* $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.
   - *Si* $F \subset G$ *et* $\dim(F) = \dim(G)$ *alors* $F = G$.
   - $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ *(formule de* ***Grassmann****).*
   - $\max(\dim(F), \dim(G)) \leqslant \dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   *Alors F est de **dimension finie** et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.*
   - *Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.*
   - $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ *(formule de **Grassmann**).*
   - $\max(\dim(F), \dim(G)) \leqslant \dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple 3.25 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. sont de dimension **0** (le s.e.v. $\{(0,0,0)\}$), **1** (les **droites vectorielles**), **2** (les **plans vectoriels**) ou **3** (le s.e.v. $\mathbb{R}^3$).

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   *Alors F est de **dimension finie** et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.
2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.*
   - *Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.*
   - $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ *(formule de **Grassmann**).*
   - $\max(\dim(F), \dim(G)) \leqslant \dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple 3.25 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. sont de dimension **0** (le s.e.v. $\{(0, 0, 0)\}$), **1** (les **droites vectorielles**), **2** (les **plans vectoriels**) ou **3** (le s.e.v. $\mathbb{R}^3$).

Exemple 3.26 (Hyperplans vectoriels)

Un s.e.v. de dimension $\boldsymbol{n-1}$ d'un e.v. de dimension $\boldsymbol{n}$ est appelé **hyperplan vectoriel**.

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   *Alors F est de **dimension finie** et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.
2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.*
   - *Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.*
   - $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ *(formule de **Grassmann**).*
   - $\max(\dim(F), \dim(G)) \leqslant \dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple 3.25 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. sont de dimension **0** (le s.e.v. $\{(0, 0, 0)\}$), **1** (les **droites vectorielles**), **2** (les **plans vectoriels**) ou **3** (le s.e.v. $\mathbb{R}^3$).

Exemple 3.26 (Hyperplans vectoriels)

Un s.e.v. de dimension $\boldsymbol{n-1}$ d'un e.v. de dimension $\boldsymbol{n}$ est appelé **hyperplan vectoriel**.

1. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$.
   Le s.e.v. $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}^n$.

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   *Alors F est de **dimension finie** et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.
2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.*
   - *Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.*
   - $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ *(formule de **Grassmann**).*
   - $\max(\dim(F), \dim(G)) \leqslant \dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple 3.25 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. sont de dimension **0** (le s.e.v. $\{(0, 0, 0)\}$), **1** (les **droites vectorielles**), **2** (les **plans vectoriels**) ou **3** (le s.e.v. $\mathbb{R}^3$).

Exemple 3.26 (Hyperplans vectoriels)

Un s.e.v. de dimension $\boldsymbol{n-1}$ d'un e.v. de dimension $\boldsymbol{n}$ est appelé **hyperplan vectoriel**.

1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.
   Le s.e.v. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}^n$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Le s.e.v. $\{P \in \mathbb{K}_n[X] : P(\alpha) = 0\}$ est un **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - ⋆ Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) \subset F$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - ⋆ Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) \subset F$.
    - ∗ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leqslant n$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\text{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - ⋆ Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) \subset F$.
    - ∗ Soit $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leqslant n$.
    - ∗ Sinon, soit $\vec{u}_3$ un vecteur de F **non coplanaire** à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
      La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\big) \subset F$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\text{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - ⋆ Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) \subset F$.
    - ∗ Soit $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leqslant n$.
    - ∗ Sinon, soit $\vec{u}_3$ un vecteur de F **non coplanaire** à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
      La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\big) \subset F$.

On construit ainsi de proche en proche des famille **libres** de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots)$ de F. Leur nombre de vecteurs ne peut excéder la dimension n de E.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - ⋆ Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) \subset F$.
    - ∗ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leqslant n$.
    - ∗ Sinon, soit $\vec{u}_3$ un vecteur de F **non coplanaire** à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
      La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\big) \subset F$.

On construit ainsi de proche en proche des famille **libres** de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots)$ de F. Leur nombre de vecteurs ne peut excéder la dimension n de E.

Le procédé s'arrête donc : soit p le nombre maximal de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ d'une famille **libre** de F. On a $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)\big)$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - ⋆ Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) \subset F$.
    - ∗ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leqslant n$.
    - ∗ Sinon, soit $\vec{u}_3$ un vecteur de F **non coplanaire** à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
      La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\big) \subset F$.

On construit ainsi de proche en proche des famille **libres** de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots)$ de F. Leur nombre de vecteurs ne peut excéder la dimension n de E.

Le procédé s'arrête donc : soit p le nombre maximal de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ d'une famille **libre** de F. On a $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)\big)$.
Ainsi, la famille **libre** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une **base** de F donc $\dim(F) = p$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - ⋆ Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) \subset F$.
    - ∗ Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leqslant n$.
    - ∗ Sinon, soit $\vec{u}_3$ un vecteur de F **non coplanaire** à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
      La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\big) \subset F$.

On construit ainsi de proche en proche des famille **libres** de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots)$ de F. Leur nombre de vecteurs ne peut excéder la dimension n de E.

Le procédé s'arrête donc : soit p le nombre maximal de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ d'une famille **libre** de F. On a $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)\big)$.
Ainsi, la famille **libre** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une **base** de F donc $\dim(F) = p$.
On a nécessairement $p \leqslant n$, soit $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - ⋆ Soit $\text{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - ⋆ Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) \subset F$.
    - ∗ Soit $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leqslant n$.
    - ∗ Sinon, soit $\vec{u}_3$ un vecteur de F **non coplanaire** à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
      La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\big) \subset F$.

On construit ainsi de proche en proche des famille **libres** de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots)$ de F. Leur nombre de vecteurs ne peut excéder la dimension n de E.

Le procédé s'arrête donc : soit p le nombre maximal de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ d'une famille **libre** de F. On a $F = \text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)\big)$.
Ainsi, la famille **libre** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une **base** de F donc $\dim(F) = p$.
On a nécessairement $p \leqslant n$, soit $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

De plus, si $\dim(F) = \dim(E)$, i.e. $p = n$, la **base** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de F étant une famille **libre** de E contenant exactement n vecteurs, est aussi une **base** de E.
D'où $E = F$.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

1. La **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ de base $\big((a_1, \dots, a_n)\big)$ peut être décrite par :

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

1. La **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ de base $\big((a_1, \dots, a_n)\big)$ peut être décrite par :
   - la **représentation paramétrique à 1 paramètre** $\begin{cases} x_1 = a_1\lambda \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathcal{D} = \big\{(a_1\lambda, \dots, a_n\lambda), \lambda \in \mathbb{K}\big\}$;

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

1. La **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ de base $\big((a_1, \dots, a_n)\big)$ peut être décrite par :
   - la **représentation paramétrique à 1 paramètre** $\begin{cases} x_1 = a_1\lambda \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathcal{D} = \big\{(a_1\lambda, \dots, a_n\lambda), \lambda \in \mathbb{K}\big\}$;
   - la **représentation cartésienne à $n-1$ équations linéaires** $\dfrac{x_1}{a_1} = \cdots = \dfrac{x_n}{a_n}$ c'est-à-dire $\mathcal{D} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \dfrac{x_1}{a_1} = \cdots = \dfrac{x_n}{a_n}\right\}$.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

1. La **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ de base $\big((a_1, \dots, a_n)\big)$ peut être décrite par :
   - la **représentation paramétrique à 1 paramètre** $\begin{cases} x_1 = a_1\lambda \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathcal{D} = \big\{(a_1\lambda, \dots, a_n\lambda), \lambda \in \mathbb{K}\big\}$;
   - la **représentation cartésienne à $n-1$ équations linéaires** $\dfrac{x_1}{a_1} = \cdots = \dfrac{x_n}{a_n}$ c'est-à-dire $\mathcal{D} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \dfrac{x_1}{a_1} = \cdots = \dfrac{x_n}{a_n}\right\}$.
2. Un **hyperplan vectoriel** $\mathcal{H}$ de $\mathbb{K}^n$ peut être décrit par :

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

1. La **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ de base $\big((a_1, \dots, a_n)\big)$ peut être décrite par :
   - la **représentation paramétrique à 1 paramètre** $\begin{cases} x_1 = a_1\lambda \\ \quad \vdots \\ x_n = a_n\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{K}$,
     c'est-à-dire $\mathcal{D} = \big\{(a_1\lambda, \dots, a_n\lambda), \lambda \in \mathbb{K}\big\}$;
   - la **représentation cartésienne à $n-1$ équations linéaires** $\dfrac{x_1}{a_1} = \dots = \dfrac{x_n}{a_n}$
     c'est-à-dire $\mathcal{D} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \dfrac{x_1}{a_1} = \dots = \dfrac{x_n}{a_n}\right\}$.
2. Un **hyperplan vectoriel** $\mathcal{H}$ de $\mathbb{K}^n$ peut être décrit par :
   - une **représentation cartésienne à 1 équation linéaire** $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$
     c'est-à-dire $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$;

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

1. La **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ de base $\big((a_1,\dots,a_n)\big)$ peut être décrite par :
   - la **représentation paramétrique à 1 paramètre** $\begin{cases} x_1 = a_1\lambda \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathcal{D}=\big\{(a_1\lambda,\dots,a_n\lambda),\lambda\in\mathbb{K}\big\}$;
   - la **représentation cartésienne à $n-1$ équations linéaires** $\dfrac{x_1}{a_1}=\cdots=\dfrac{x_n}{a_n}$ c'est-à-dire $\mathcal{D}=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n : \dfrac{x_1}{a_1}=\cdots=\dfrac{x_n}{a_n}\right\}$.
2. Un **hyperplan vectoriel** $\mathcal{H}$ de $\mathbb{K}^n$ peut être décrit par :
   - une **représentation cartésienne à 1 équation linéaire** $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ c'est-à-dire $\mathcal{H}=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n : a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\}$;
   - une **représentation paramétrique à $n-1$ paramètres** (en supposant e.g. $a_n\neq 0$)

$$\begin{cases} x_1 = -a_n\lambda_1 \\ x_2 = \qquad\quad -a_n\lambda_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = \qquad\qquad\qquad -a_n\lambda_{n-1} \\ x_n = a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\cdots+a_{n-1}\lambda_{n-1} \end{cases},\ \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{K},\text{ c'est-à-dire}$$

$$\mathcal{H}=\big\{(-a_n\lambda_1,-a_n\lambda_2,\dots,-a_n\lambda_{n-1},a_1\lambda_1+\cdots+a_{n-1}\lambda_{n-1}),\ \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{K}\big\}$$

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

1. La **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ de base $\big((a_1, \dots, a_n)\big)$ peut être décrite par :
   - la **représentation paramétrique à 1 paramètre** $\begin{cases} x_1 = a_1\lambda \\ \quad \vdots \\ x_n = a_n\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathcal{D} = \big\{(a_1\lambda, \dots, a_n\lambda), \lambda \in \mathbb{K}\big\}$;
   - la **représentation cartésienne à $n-1$ équations linéaires** $\dfrac{x_1}{a_1} = \dots = \dfrac{x_n}{a_n}$ c'est-à-dire $\mathcal{D} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \dfrac{x_1}{a_1} = \dots = \dfrac{x_n}{a_n}\right\}$.

2. Un **hyperplan vectoriel** $\mathcal{H}$ de $\mathbb{K}^n$ peut être décrit par :
   - une **représentation cartésienne à 1 équation linéaire** $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ c'est-à-dire $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$;
   - une **représentation paramétrique à $n-1$ paramètres** (en supposant e.g. $a_n \neq 0$)

$$\begin{cases} x_1 = -a_n\lambda_1 \\ x_2 = \qquad -a_n\lambda_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = \qquad\qquad -a_n\lambda_{n-1} \\ x_n = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_{n-1}\lambda_{n-1} \end{cases}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\mathcal{H} = \big\{(-a_n\lambda_1, -a_n\lambda_2, \dots, -a_n\lambda_{n-1}, a_1\lambda_1 + \dots + a_{n-1}\lambda_{n-1}),\ \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}\big\}$$

La famille $\big((-a_n, 0 \dots, 0, a_1), (0, -a_n, \dots, 0, a_2), \dots, (0, 0, \dots, -a_n, a_{n-1})\big)$ est une **base** de $\mathcal{H}$.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille libre de E. Soit F le s.e.v. de E engendré par $\mathcal{S}$: $F = \text{Vect}(\mathcal{S})$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p$ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \vec{e}_i, \; 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre de E. Soit F le s.e.v. de E engendré par $\mathcal{S}$: $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \vec{e}_i, \ 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Pour un vecteur générique $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ de E, on a

$$\begin{aligned}
\vec{u} \in F &\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \ \vec{u} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \vec{u}_j \\
&\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ x_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} \lambda_j.
\end{aligned}$$

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{S}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p)$ une famille libre de E. Soit F le s.e.v. de E engendré par $\mathcal{S}$: $F=\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p$ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{u}_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\vec{e}_i,\ 1\leqslant j\leqslant p.$$

Pour un vecteur générique $\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i$ de E, on a

$$\begin{aligned}\vec{u}\in F &\iff \exists\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K},\ \vec{u}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\vec{u}_j\\ &\iff \exists\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K},\forall i\in\{1,\dots,n\},\ x_i=\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ij}\lambda_j.\end{aligned}$$

Le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 &= \alpha_{11}\,\lambda_1+\alpha_{12}\,\lambda_2+\dots+\alpha_{1p}\,\lambda_p\\ x_2 &= \alpha_{21}\,\lambda_1+\alpha_{22}\,\lambda_2+\dots+\alpha_{2p}\,\lambda_p\\ &\ \vdots\\ x_n &= \alpha_{n1}\,\lambda_1+\alpha_{n2}\,\lambda_2+\dots+\alpha_{np}\,\lambda_p\end{cases}\qquad \lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$$

est une **représentation paramétrique** du s.e.v. F (qui est de dimension p). Elle contient p paramètres.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre de E. Soit F le s.e.v. de E engendré par $\mathcal{S}$: $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{S})$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \vec{e}_i, \ 1 \leqslant j \leqslant p.$$

En éliminant les p paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, il est possible d'obtenir un système de $n-p$ équations reliant les coordonnées $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} \beta_{11}\, x_1 + \beta_{12}\, x_2 + \cdots + \beta_{1n}\, x_n = 0 \\ \beta_{21}\, x_1 + \beta_{22}\, x_2 + \cdots + \beta_{2n}\, x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ \beta_{n-p\,1}\, x_1 + \beta_{n-p\,2}\, x_2 + \cdots + \beta_{n-p\,n}\, x_n = 0 \end{cases}$$

Ce système est une **représentation cartésienne** du s.e.v. F.
On voit sous cette forme que F est l'intersection de $n-p$ **hyperplans vectoriels**.

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- On a $D = \{\lambda(1, 3, -2),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 3\lambda, -2\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
  Un vecteur générique $\vec{v} = (x, y, z)$ de E appartient à D si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (\lambda, 3\lambda, -2\lambda)$.

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \text{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \text{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- On a $D = \{\lambda(1, 3, -2),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 3\lambda, -2\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
  Un vecteur générique $\vec{v} = (x, y, z)$ de E appartient à D si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (\lambda, 3\lambda, -2\lambda)$.
  D'où la **représentation paramétrique** de la droite D suivante :
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- On a $D = \{\lambda(1, 3, -2),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 3\lambda, -2\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
  Un vecteur générique $\vec{v} = (x, y, z)$ de E appartient à D si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (\lambda, 3\lambda, -2\lambda)$.
  D'où la **représentation paramétrique** de la droite D suivante :
  $$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
  On en obtient une **représentation cartésienne** en éliminant le paramètre λ : de la première équation, on tire $\lambda = x$ que l'on injecte dans les deux autres équations pour arriver à
  $$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- De même, en écrivant

  $$P = \{\lambda(1, 1, -1)+\mu(2, 5, -1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda+2\mu, \lambda+5\mu, -\lambda-\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- De même, en écrivant

  $P = \{\lambda(1, 1, -1) + \mu(2, 5, -1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda+2\mu, \lambda+5\mu, -\lambda-\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$,

  on obtient une **représentation paramétrique** de P :

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = \lambda + 5\mu \\ z = -\lambda - \mu \end{cases},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

  de laquelle on déduit une **représentation cartésienne** après élimination des paramètres λ et μ.

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1,3,-2)$: $D = \mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1,1,-1)$ et $\vec{u}_2 = (2,5,-1)$: $P = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1,\vec{u}_2)\big)$.

- De même, en écrivant

  $P = \{\lambda(1,1,-1)+\mu(2,5,-1),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda+2\mu, \lambda+5\mu, -\lambda-\mu),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$,

  on obtient une **représentation paramétrique** de P :

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = \lambda + 5\mu \\ z = -\lambda - \mu \end{cases},\ \lambda,\mu \in \mathbb{R},$$

  de laquelle on déduit une **représentation cartésienne** après élimination des paramètres λ et μ. En effet, des première et troisième équations, on tire

$$\begin{cases} \mu = x + z \\ \lambda = -x - 2z \end{cases}$$

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- De même, en écrivant
  $P = \{\lambda(1, 1, -1)+\mu(2, 5, -1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda+2\mu, \lambda+5\mu, -\lambda-\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$,
  on obtient une **représentation paramétrique** de P :
  $$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = \lambda + 5\mu \\ z = -\lambda - \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$
  de laquelle on déduit une **représentation cartésienne** après élimination des paramètres λ et μ. En effet, des première et troisième équations, on tire
  $$\begin{cases} \mu = x + z \\ \lambda = -x - 2z \end{cases}$$
  que l'on injecte dans la deuxième équation pour obtenir la **représentation cartésienne** de P suivante :
  $$4x - y + 3z = 0.$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

- ***Pour F :*** $\vec{u} \in F \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{u} = (\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, 3\mu, \lambda + \mu)$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases}$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

- ***Pour F :*** $\vec{u} \in F \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{u} = (\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, 3\mu, \lambda + \mu)$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases}$$

Le système d'équations précédent est une **représentation paramétrique** de F, de laquelle on déduit

$$\begin{aligned} F &= \big\{(\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, 3\mu, \lambda + \mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{\lambda(1, 2, 0, 1) + \mu(2, 1, 3, 1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 1)\big) \end{aligned}$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u} = (x,y,z,t) \in E$.

- ***Pour F :*** $\vec{u} \in F \iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \vec{u} = (\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu)$

$$\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases}$$

Le système d'équations précédent est une **représentation paramétrique** de F, de laquelle on déduit

$$\begin{aligned} F &= \big\{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{\lambda(1,2,0,1) + \mu(2,1,3,1),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((1,2,0,1),(2,1,3,1)\big) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une famille **génératrice** de F : $\mathcal{B}_F = \big\{(1,2,0,1),(2,1,3,1)\big\}$ qui est clairement une **base** de F puisque les deux vecteurs $(1,2,0,1)$ et $(2,1,3,1)$ ne sont pas **colinéaires**.
On a donc $\dim(F) = 2$, F est un **plan vectoriel**.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

- ***Pour G :*** partant de l'équation $y - 2z + t = 0$ appelée **représentation cartésienne** de G, on trouve

$$\vec{u} \in G \iff y - 2z + t = 0 \iff t = -y + 2z \iff \vec{u} = (x, y, z, -y + 2z)$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

- ***Pour G :*** partant de l'équation $y - 2z + t = 0$ appelée **représentation cartésienne** de G, on trouve

  $$\vec{u} \in G \iff y - 2z + t = 0 \iff t = -y + 2z \iff \vec{u} = (x, y, z, -y + 2z)$$

  d'où l'on tire

  $$\begin{aligned} G &= \big\{(\lambda, \mu, \nu, -\mu + 2\nu),\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{\lambda(1, 0, 0, 0) + \mu(0, 1, 0, -1) + \nu(0, 0, 1, 2),\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \operatorname{Vect}\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\big) \end{aligned}$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

- ***Pour G :*** partant de l'équation $y - 2z + t = 0$ appelée **représentation cartésienne** de G, on trouve

  $$\vec{u} \in G \iff y - 2z + t = 0 \iff t = -y + 2z \iff \vec{u} = (x, y, z, -y + 2z)$$

  d'où l'on tire

  $$\begin{aligned} G &= \big\{(\lambda, \mu, \nu, -\mu + 2\nu),\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{\lambda(1, 0, 0, 0) + \mu(0, 1, 0, -1) + \nu(0, 0, 1, 2),\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\big) \end{aligned}$$

  D'où une famille **génératrice** de G : $\mathcal{B}_G = \big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\big)$ qui s'avère être une **base** de G.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

- ***Pour G :*** partant de l'équation $y - 2z + t = 0$ appelée **représentation cartésienne** de G, on trouve

  $$\vec{u} \in G \iff y - 2z + t = 0 \iff t = -y + 2z \iff \vec{u} = (x, y, z, -y + 2z)$$

  d'où l'on tire

  $$\begin{aligned} G &= \big\{(\lambda, \mu, \nu, -\mu + 2\nu),\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{\lambda(1, 0, 0, 0) + \mu(0, 1, 0, -1) + \nu(0, 0, 1, 2),\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\big) \end{aligned}$$

  D'où une famille **génératrice** de G : $\mathcal{B}_G = \big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)\big)$ qui s'avère être une **base** de G.
  Vérifions que $\mathcal{B}_G$ est effectivement une famille **libre**.
  Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, -1) + \gamma(0, 0, 1, 2) = \vec{0}$.
  On a $(\alpha, \beta, \gamma, -\beta + 2\gamma) = (0, 0, 0, 0)$ et nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
  Les vecteurs $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)$ ne sont pas **coplanaires**.
  On a donc $\dim(G) = 3$, G est un **hyperplan vectoriel**.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

- ***Pour*** $\boldsymbol{F \cap G}$ ***:*** on utilise la **représentation paramétrique** de F ainsi que la **représentation cartésienne** de G :

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases} \text{ et } y - 2z + t = 0$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

- ***Pour $F \cap G$:*** on utilise la **représentation paramétrique** de F ainsi que la **représentation cartésienne** de G :

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases} \text{ et } y - 2z + t = 0$$

Injectons les équations paramétriques (contenant les paramètres λ, μ) dans l'équation cartésienne $y - 2z + t = 0$: on obtient la relation $3\lambda - 4\mu = 0$, ou encore $\mu = \frac{3}{4}\lambda$, puis en reportant cette dernière dans les équations paramétriques, on trouve, après multiplication par 4 ($\lambda = 4\nu, \mu = 3\nu$),

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \exists \nu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 10\nu \\ y = 11\nu \\ z = 9\nu \\ t = 7\nu \end{cases}$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

- ***Pour $F \cap G$:*** on utilise la **représentation paramétrique** de F ainsi que la **représentation cartésienne** de G :

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases} \text{ et } y - 2z + t = 0$$

Injectons les équations paramétriques (contenant les paramètres λ, μ) dans l'équation cartésienne $y - 2z + t = 0$: on obtient la relation $3\lambda - 4\mu = 0$, ou encore $\mu = \frac{3}{4}\lambda$, puis en reportant cette dernière dans les équations paramétriques, on trouve, après multiplication par 4 ($\lambda = 4\nu, \mu = 3\nu$),

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \exists \nu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 10\nu \\ y = 11\nu \\ z = 9\nu \\ t = 7\nu \end{cases}$$

Donc $\quad F \cap G = \big\{(10\nu, 11\nu, 9\nu, 7\nu),\ \nu \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((10, 11, 9, 7)\big)$

Ainsi $F \cap G$ est la **droite vectorielle engendrée** par le vecteur $(10, 11, 9, 7)$.

Exemple 3.30 (Égalité entre deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$)

Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Soit $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{e}_1, \vec{e}_2)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

Exemple 3.30 (Égalité entre deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$)

Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Soit $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{e}_1, \vec{e}_2)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant des **combinaisons linéaires** des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on a l'**inclusion** $G \subset F$.

Exemple 3.30 (Égalité entre deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$)

Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Soit $F = \operatorname{Vect}\big((\vec{e}_1, \vec{e}_2)\big)$ et $G = \operatorname{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant des **combinaisons linéaires** des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on a l'**inclusion** $G \subset F$.
- Par ailleurs :
  - La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant extraite de la **base** $\mathcal{B}$, est **libre**.
    Elle engendre par définition F, c'en est donc une **base** et $\dim(F) = 2$.

Exemple 3.30 (Égalité entre deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$)

Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Soit $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{e}_1, \vec{e}_2)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant des **combinaisons linéaires** des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on a l'**inclusion** $G \subset F$.
- Par ailleurs :
    - ∗ La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant extraite de la **base** $\mathcal{B}$, est **libre**.
      Elle engendre par définition F, c'en est donc une **base** et $\dim(F) = 2$.
    - ∗ La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ étant composée de vecteurs **non colinéaires** est également **libre**.
      Elle engendre par définition G, c'en est donc une **base** et $\dim(G) = 2$

Exemple 3.30 (Égalité entre deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$)

Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Soit $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{e}_1, \vec{e}_2)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant des **combinaisons linéaires** des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on a l'**inclusion** $G \subset F$.
- Par ailleurs :
  - La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant extraite de la **base** $\mathcal{B}$, est **libre**.
    Elle engendre par définition F, c'en est donc une **base** et $\dim(F) = 2$.
  - La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ étant composée de vecteurs **non colinéaires** est également **libre**.
    Elle engendre par définition G, c'en est donc une **base** et $\dim(G) = 2$

  Ainsi $\dim(F) = \dim(G)$.

En conclusion, on a l'**égalité** $F = G$.

Exemple 3.30 (Égalité entre deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$)

Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Soit $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{e}_1, \vec{e}_2)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big)$.

- Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant des **combinaisons linéaires** des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on a l'**inclusion** $G \subset F$.
- Par ailleurs :
  - $*$ La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant extraite de la **base** $\mathcal{B}$, est **libre**.
    Elle engendre par définition F, c'en est donc une **base** et $\dim(F) = 2$.
  - $*$ La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ étant composée de vecteurs **non colinéaires** est également **libre**.
    Elle engendre par définition G, c'en est donc une **base** et $\dim(G) = 2$

  Ainsi $\dim(F) = \dim(G)$.

En conclusion, on a l'**égalité** $F = G$.

Remarque : on observe que l'on a $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$, donc les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont réciproquement des **combinaisons linéaires** des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, prouvant ainsi l'**inclusion inverse** $F \subset G$.
La théorie de la **dimension** permet d'éviter cette dernière vérification.

Proposition 3.31 (Supplémentarité et dimension)

*Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E de **dimension finie**.*

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{\vec{0}\} \quad \textit{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \quad \textit{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

Proposition 3.31 (Supplémentarité et dimension)

*Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E de **dimension finie**.*

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{\vec{0}\} \quad \text{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \quad \text{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

Proposition 3.32

*Deux s.e.v. F et G d'un e.v. E de **dimension finie** sont **supplémentaires** ssi on peut former une **base** $\mathcal{B}_E$ de E en accolant une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G : $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ et alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.*

*Une telle base de E obtenue en accolant une base de F et une base de G est dite **adaptée à la supplémentarité** de F et G.*

Proposition 3.31 (Supplémentarité et dimension)

*Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E de **dimension finie**.*

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\Longleftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\} \quad \textit{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\Longleftrightarrow E = F + G \quad \textit{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

Proposition 3.32

*Deux s.e.v. F et G d'un e.v. E de **dimension finie** sont **supplémentaires** ssi on peut former une **base** $\mathcal{B}_E$ de E en accolant une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G : $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ et alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.*

*Une telle base de E obtenue en accolant une base de F et une base de G est dite **adaptée à la supplémentarité** de F et G.*

Théorème 3.33 (Existence de s.e.v. supplémentaires)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*
*Tout s.e.v. de E possède au moins un **supplémentaire** dans E.*

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note* $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, *la **dimension** du s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note* $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, *la **dimension** du s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un e.v. E.

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **libre**.*

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note* $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, *la **dimension** du s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un e.v. E.

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **libre**.*
2. *Si E est de **dimension finie,***
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E ;*
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$ *ssi $\mathcal{F}$ est une **base** de E.*

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note* $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, *la **dimension** du s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un e.v. E.

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **libre**.*
2. *Si E est de **dimension finie**,*
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E ;*
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$ *ssi $\mathcal{F}$ est une **base** de E.*

Proposition 3.36 (Opérations élémentaires)

*Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. On **ne** modifie **pas** le s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *et donc **pas** le **rang** de $\mathcal{F}$ lorsque l'on effectue l'une des opérations, dites **élémentaires**, suivantes :*

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note* $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, *la **dimension** du s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un e.v. E.

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **libre**.*
2. *Si E est de **dimension finie,***
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E ;*
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$ *ssi $\mathcal{F}$ est une **base** de E.*

Proposition 3.36 (Opérations élémentaires)

*Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. On **ne** modifie **pas** le s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *et donc **pas** le **rang** de $\mathcal{F}$ lorsque l'on effectue l'une des opérations, dites **élémentaires**, suivantes :*

- *on **retire le vecteur nul** de $\mathcal{F}$ si celui-ci apparaît ;*

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, la **dimension** du s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un e.v. E.

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **libre**.*
2. *Si E est de **dimension finie,***
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E ;*
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$ *ssi $\mathcal{F}$ est une **base** de E.*

Proposition 3.36 (Opérations élémentaires)

*Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. On **ne** modifie **pas** le s.e.v.* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ *et donc **pas** le **rang** de $\mathcal{F}$ lorsque l'on effectue l'une des opérations, dites **élémentaires**, suivantes :*

- *on **retire le vecteur nul** de $\mathcal{F}$ si celui-ci apparaît ;*
- *on **change l'ordre** des vecteurs de $\mathcal{F}$;*

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note $\operatorname{rg}(\mathcal{F})$, la **dimension** du s.e.v. $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$:*

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\operatorname{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un e.v. E.

1. $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **libre**.*
2. *Si E est de **dimension finie**,*
   - $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E ;*
   - $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$ *ssi $\mathcal{F}$ est une **base** de E.*

Proposition 3.36 (Opérations élémentaires)

*Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. On **ne** modifie **pas** le s.e.v. $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ et donc **pas** le **rang** de $\mathcal{F}$ lorsque l'on effectue l'une des opérations, dites **élémentaires**, suivantes :*

- *on **retire le vecteur nul** de $\mathcal{F}$ si celui-ci apparaît ;*
- *on **change l'ordre** des vecteurs de $\mathcal{F}$;*
- *on **multiplie** un vecteur de $\mathcal{F}$ par un **scalaire non nul** ;*

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, la **dimension** du s.e.v. $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un e.v. E.

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **libre**.*
2. *Si E est de **dimension finie,***
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E ;*
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$ *ssi $\mathcal{F}$ est une **base** de E.*

Proposition 3.36 (Opérations élémentaires)

*Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. On **ne** modifie **pas** le s.e.v. $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et donc **pas** le **rang** de $\mathcal{F}$ lorsque l'on effectue l'une des opérations, dites **élémentaires**, suivantes :*

- *on **retire le vecteur nul** de $\mathcal{F}$ si celui-ci apparaît ;*
- *on **change l'ordre** des vecteurs de $\mathcal{F}$;*
- *on **multiplie** un vecteur de $\mathcal{F}$ par un **scalaire non nul** ;*
- *on **ajoute** à un vecteur de $\mathcal{F}$ une **combinaison linéaire** des autres.*

Remarque 3.37 (Rang d'un système linéaire)

Soit $(\mathcal{S})$ le **système linéaire** de n équations à p inconnues suivant :

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Introduisons les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ où $\vec{v}_j$ est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ainsi que le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(b_1, \dots, b_n)$. Dans ce contexte, **l'inconnue** du système $(\mathcal{S})$ est le ***p*-uplet** $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$. Alors :

- le système $(\mathcal{S})$ est équivalent à la relation **vectorielle**

$$x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{w}$$

- $(\mathcal{S})$ admet **au moins** une solution **ssi** le vecteur $\vec{w}$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Dans ce cas, si de plus la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est **libre**, alors cette solution est **unique** ;
- le **rang du système** $(\mathcal{S})$ est égal au **rang de la famille de vecteurs** $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$.

Définition 3.38 (Vecteurs échelonnés)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** et soit $\mathcal{B}$ une base de E.*
*Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de E est dite **échelonnée relativement à la base** $\mathcal{B}$ lorsque, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, l'écriture des coordonnées de $\vec{v}_{k+1}$ dans la base $\mathcal{B}$ commence par un nombre de zéros strictement plus grand que celui de $\vec{v}_k$, sauf si $\vec{v}_k = \vec{v}_{k+1} = 0$.*

Définition 3.38 (Vecteurs échelonnés)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** et soit $\mathcal{B}$ une base de E.*
*Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de E est dite **échelonnée relativement à la base** $\mathcal{B}$ lorsque, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, l'écriture des coordonnées de $\vec{v}_{k+1}$ dans la base $\mathcal{B}$ commence par un nombre de zéros strictement plus grand que celui de $\vec{v}_k$, sauf si $\vec{v}_k = \vec{v}_{k+1} = 0$.*

Proposition 3.39 (Vecteurs échelonnés et liberté)

*Toute famille de vecteurs non nuls **échelonnée** relativement à une base est nécessairement **libre**.*

Définition 3.38 (Vecteurs échelonnés)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** et soit $\mathcal{B}$ une base de E.*
*Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E est dite **échelonnée relativement à la base** $\mathcal{B}$ lorsque, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, l'écriture des coordonnées de $\vec{v}_{k+1}$ dans la base $\mathcal{B}$ commence par un nombre de zéros strictement plus grand que celui de $\vec{v}_k$, sauf si $\vec{v}_k = \vec{v}_{k+1} = 0$.*

Proposition 3.39 (Vecteurs échelonnés et liberté)

*Toute famille de vecteurs non nuls **échelonnée** relativement à une base est nécessairement **libre**.*

Exemple 3.40

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ où
$\vec{e}_1 = (1,0,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,0), \vec{e}_3 = (0,0,1,0), \vec{e}_4 = (0,0,0,1)$.

Considérons les vecteurs $\vec{u} = (1,2,3,4), \vec{v} = (0,1,2,3), \vec{w} = (0,0,0,2)$, soit encore, écrits dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 \\ \vec{v} &= \phantom{\vec{e}_1 + 2}\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 \\ \vec{w} &= \phantom{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + } 2\vec{e}_4 \end{aligned}$$

La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$, donc **libre**.

Proposition 3.41 (Polynômes échelonnés)

Une famille de polynômes non nuls de ***degrés tous différents*** *est toujours* ***libre****.*

Proposition 3.41 (Polynômes échelonnés)

*Une famille de polynômes non nuls de **degrés tous différents** est toujours **libre**.*

Exemple 3.42 (Polynômes échelonnés)

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}_3[X]$ rapporté à la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.
La famille de polynômes $(X^3 + 2X^2 + 3X + 4, X^2 + 2X + 3, 2)$ est **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$, donc **libre**.

Proposition 3.41 (Polynômes échelonnés)

*Une famille de polynômes non nuls de **degrés tous différents** est toujours **libre**.*

Exemple 3.42 (Polynômes échelonnés)

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}_3[X]$ rapporté à la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.
La famille de polynômes $(X^3 + 2X^2 + 3X + 4, X^2 + 2X + 3, 2)$ est **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$, donc **libre**.

Théorème 3.43 (Méthode des zéros échelonnés)

Soit $\mathcal{F}_1$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E.

*On peut toujours transformer $\mathcal{F}_1$ en une famille $\mathcal{F}_2$ **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$ par une succession d'**opérations élementaires**.*

Proposition 3.41 (Polynômes échelonnés)

*Une famille de polynômes non nuls de **degrés tous différents** est toujours **libre**.*

Exemple 3.42 (Polynômes échelonnés)

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}_3[X]$ rapporté à la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.
La famille de polynômes $(X^3 + 2X^2 + 3X + 4, X^2 + 2X + 3, 2)$ est **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$, donc **libre**.

Théorème 3.43 (Méthode des zéros échelonnés)

Soit $\mathcal{F}_1$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E.

*On peut toujours transformer $\mathcal{F}_1$ en une famille $\mathcal{F}_2$ **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$ par une succession d'**opérations élementaires**.*

*Alors les vecteurs non nuls de $\mathcal{F}_2$ forment une **base** de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$, et le **rang** de $\mathcal{F}_1$ est égal au nombre de vecteurs **non nuls** de $\mathcal{F}_2$.*

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4)$, $\vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6)$, $\vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1)$.

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1,1,0,5),\ \vec{u}_2 = (2,-1,2,-4),\ \vec{u}_3 = (4,1,2,6),\ \vec{u}_4 = (1,0,1,0),\ \vec{u}_5 = (4,0,3,1).$$

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array}$$

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4)$, $\vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6)$, $\vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1)$.

On remarque que $\text{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

---

1. Faisons apparaître des zéros sur la **première** ligne à partir de la **deuxième** colonne :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \vec{u}'_3 & \vec{u}'_4 & \vec{u}'_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -14 & -14 & -5 & -19 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec $\vec{u}'_1 = \vec{u}_1$, $\vec{u}'_2 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1$, $\vec{u}'_3 = \vec{u}_3 - 4\vec{u}_1$, $\vec{u}'_4 = \vec{u}_4 - \vec{u}_1$, $\vec{u}'_5 = \vec{u}_5 - 4\vec{u}_1$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1,1,0,5),\ \vec{u}_2 = (2,-1,2,-4),\ \vec{u}_3 = (4,1,2,6),\ \vec{u}_4 = (1,0,1,0),\ \vec{u}_5 = (4,0,3,1).$$

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

---

❷ Faisons apparaître des zéros sur la **deuxième** ligne à partir de la **troisième** colonne :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1'' & \vec{u}_2'' & \vec{u}_3'' & \vec{u}_4'' & \vec{u}_5'' \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -14 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec $\vec{u}_1'' = \vec{u}_1'$, $\vec{u}_2'' = \vec{u}_2'$, $\vec{u}_3'' = \vec{u}_3' - \vec{u}_2'$, $\vec{u}_4'' = 3\vec{u}_4' - \vec{u}_2'$, $\vec{u}_5'' = 3\vec{u}_5' - 4\vec{u}_2'$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1,1,0,5),\ \vec{u}_2 = (2,-1,2,-4),\ \vec{u}_3 = (4,1,2,6),\ \vec{u}_4 = (1,0,1,0),\ \vec{u}_5 = (4,0,3,1).$$

On remarque que $\text{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

---

❸ Le terme apparaissant à l'intersection des **troisième** ligne et **troisième** colonne étant nul, on permute par exemple les vecteurs $\vec{u}_3''$ et $\vec{u}_5''$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1'' & \vec{u}_2'' & \vec{u}_5'' & \vec{u}_4'' & \vec{u}_3'' \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1,1,0,5),\ \vec{u}_2 = (2,-1,2,-4),\ \vec{u}_3 = (4,1,2,6),\ \vec{u}_4 = (1,0,1,0),\ \vec{u}_5 = (4,0,3,1).$$

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{c c}
\begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix}
\end{array}$$

---

4. Faisons apparaître des zéros sur la **troisième** ligne à partir de la **quatrième** colonne :

$$\begin{array}{c c}
\begin{matrix} \vec{u}_1''' & \vec{u}_2''' & \vec{u}_3''' & \vec{u}_4''' & \vec{u}_5''' \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{matrix}
\end{array}$$

avec $\vec{u}_1''' = \vec{u}_1''$, $\vec{u}_2''' = \vec{u}_2''$, $\vec{u}_3''' = \vec{u}_5''$, $\vec{u}_4''' = \vec{u}_4'' - \vec{u}_5''$, $\vec{u}_5''' = \vec{u}_3''$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1,1,0,5),\ \vec{u}_2 = (2,-1,2,-4),\ \vec{u}_3 = (4,1,2,6),\ \vec{u}_4 = (1,0,1,0),\ \vec{u}_5 = (4,0,3,1).$$

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

---

5. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{S}) = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1''', \vec{u}_2''', \vec{u}_3''')\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1, 3\vec{u}_5 - 4\vec{u}_2 - 4\vec{u}_1)\big).$$

La famille $\big((1,1,0,5), (0,-3,2,-14), (0,0,1,-1)\big)$ est une **base** de $\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ et alors

$$\mathrm{rang}(\mathcal{S}) = 3.$$

De plus les égalités $\vec{u}_4''' = \vec{u}_5''' = \vec{0}$ conduisent progressivement à $\vec{u}_4'' - \vec{u}_5'' = \vec{u}_3'' = \vec{0}$, puis $\vec{u}_2' + \vec{u}_4' - \vec{u}_5' = \vec{u}_3' - \vec{u}_2' = \vec{0}$ et enfin

$$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u}_5 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Systèmes linéaires

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
coursPC/chap11_Systemes_Lineaires_WEB.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Systèmes linéaires

Quelques exercices

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_systemes_lineaires.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Carrés magiques d'ordre 3

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_carres_magiques_ordre3.pdf

Notions à retenir

- Espaces vectoriels
  - ⋆ Axiomes, calcul vectoriel
  - ⋆ Exemples canoniques
  - ⋆ Dimension
- Sous-espaces vectoriels
  - ⋆ Caractérisation
  - ⋆ Notion d'engendrement
  - ⋆ Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentarité
- Famille de vecteurs
  - ⋆ Familles libres, liées, génératrices, bases
  - ⋆ Dépendance, indépendance linéaires
  - ⋆ Rang, méthode des zéros échelonnés