INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Espaces vectoriels

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1[er] cycle, 1[re] année

Sommaire

Présentation

Les **structures algébriques** concernent des ensembles pour lesquels on dispose de certaines opérations. Elles apparaissent naturellement et progressivement dans la construction des nombres usuels : entiers, rationnels, réels, complexes... avec les **opérations** d'addition et de multiplication.

Ces structures ont pour vocation d'**unifier** des propriétés typiques (telles que la **commutativité**, l'**associativité**, la **distributivité**...) et d'ériger des règles de calcul qui s'avèrent communes à de nombreux exemples de natures *a priori* différentes.

La structure d'**espace vectoriel** est née avec l'étude géométrique des vecteurs du plan ou de l'espace dans lequel on vit. Malgré l'aspect **géométrique** de cette origine, les propriétés des espaces vectoriels sont de nature **algébrique** et s'appliquent dans divers contextes éloignés, en apparence, de la géométrie (espaces de fonctions, de polynômes...)

Présentation

Par exemple, pour les trois ensembles

1. $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan ;
2. $\mathbb{R}_1[X]$ des binômes de degré au plus 1 : $\alpha X+\beta$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;
3. $\mathcal{F}_{\text{trigo}}$ des fonctions trigonométriques de la forme $x\longmapsto\alpha\cos x+\beta\sin x$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

on peut définir des opérations tout à fait similaires pour lesquels des règles de calcul sont rigoureusement les mêmes. Ces opérations sont respectivement les suivantes :

1. $\begin{array}{rcl}\overrightarrow{\mathcal{P}}\times\overrightarrow{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{P}}\\ (\vec u,\vec v) & \longmapsto & \vec u+\vec v\\ (\alpha,\vec u) & \longmapsto & \alpha\cdot\vec u\end{array}$
2. $\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_1[X]\times\mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X]\\ (P,Q) & \longmapsto & P+Q\\ (\alpha,P) & \longmapsto & \alpha\cdot P\end{array}$
3. $\begin{array}{rcl}\mathcal{F}_{\text{trigo}}\times\mathcal{F}_{\text{trigo}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\text{trigo}}\\ (f,g) & \longmapsto & f+g\\ (\alpha,f) & \longmapsto & \alpha\cdot f\end{array}$

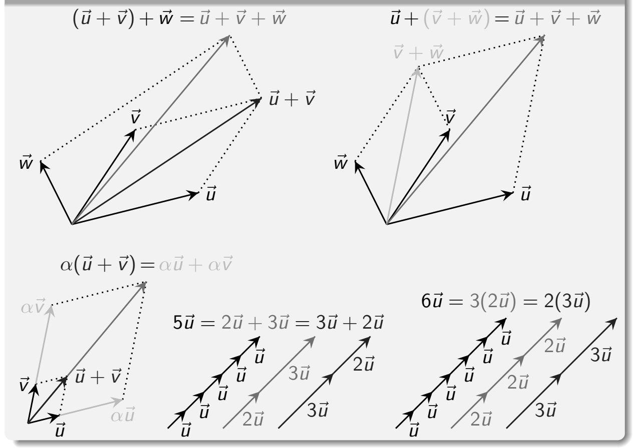
1. Pour le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, si l'on dispose d'une base $(\vec\imath,\vec\jmath)$, on peut écrire n'importe quel vecteur $\vec u$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sous la forme $\vec u=\alpha\vec\imath+\beta\vec\jmath$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;
2. l'ensemble $\mathbb{R}_1[X]$ est constitué de binômes de la forme $\alpha X+\beta\mathbb{1}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\mathbb{1}$ étant le polynôme constant égal à 1 ;
3. l'ensemble $\mathcal{F}_{\text{trigo}}$ est constitué de fonctions de la forme $\alpha\cos+\beta\sin$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Présentation

Malgré la différence de nature de tous ces objets, dans les trois cas, les couples $(\vec\imath,\vec\jmath)$, $(X,\mathbb{1})$ et $(\cos,\sin)$ jouent le même rôle vis-à-vis des opérations $+$ et $\cdot$, à savoir que l'on peut écrire dans chaque situation un objet de l'ensemble uniquement à l'aide du couple correspondant et de facteurs d'échelle α,β ; on parle de ***combinaisons linéaires*** (*e.g.* $\alpha\vec\imath+\beta\vec\jmath$) et de ***bases*** (*e.g.* $(\vec\imath,\vec\jmath)$).

Les ensembles $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\mathbb{R}_1[X]$, $\mathcal{F}_{\text{trigo}}$ sont ainsi rapprochés les uns les autres selon un même jeu de **« calcul vectoriel »** et seront qualifiés d'***espaces vectoriels isomorphes***.

Présentation : « observation vectorielle »



Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Axiomes)

*Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E\times E\longrightarrow E$) et d'une **loi externe** $\cdot_E$ (i.e. une application $\mathbb{K}\times E\longrightarrow E$) telles que :*

1. $\forall\vec u,\vec v,\vec w\in E,\ (\vec u+_E\vec v)+_E\vec w=\vec u+_E(\vec v+_E\vec w)$ *(loi $+_E$ **associative**)*
2. $\forall\vec u,\vec v\in E,\ \vec u+_E\vec v=\vec v+_E\vec u$ *(loi $+_E$ **commutative**)*
3. $\exists\vec 0_E\in E,\forall\vec u\in E,\ \vec u+_E\vec 0_E=\vec 0_E+_E\vec u=\vec u$ *(existence d'un **élément neutre** pour la loi $+_E$ appelé **vecteur nul**)*
4. $\forall\vec u\in E,\exists\vec v\in E,\ \vec u+_E\vec v=\vec v+_E\vec u=\vec 0_E$ *(existence d'un **symétrique**, noté $-_E\vec u$, pour tout élément $\vec u$ de E)*
5. $\forall\vec u\in E,\ 1_{\mathbb{K}}\cdot_E\vec u=\vec u$
6. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall\vec u\in E,\ \alpha\cdot_E(\beta\cdot_E\vec u)=(\alpha\beta)\cdot_E\vec u$
7. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall\vec u\in E,\ (\alpha+\beta)\cdot_E\vec u=(\alpha\cdot_E\vec u)+_E(\beta\cdot_E\vec u)$ *(on écrit $\alpha\cdot_E\vec u+_E\beta\cdot_E\vec u$)*
8. $\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall\vec u,\vec v\in E,\ \alpha\cdot_E(\vec u+_E\vec v)=(\alpha\cdot_E\vec u)+_E(\alpha\cdot_E\vec v)$ *(on écrit $\alpha\cdot_E\vec u+_E\alpha\cdot_E\vec v$)*

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et $\cdot_E$ sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^2$ » au lieu de $(\mathbb{K}^2,+,\cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et $\cdot$ (voire rien).

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

1. $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K},\forall\vec u\in E,\ \displaystyle\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot\vec u=\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\right)\cdot\vec u$
   En particulier : $\forall n\in\mathbb{N},\forall\vec u\in E,\ \underbrace{\vec u+\dots+\vec u}_{n\text{ fois}}=n\,\vec u$
2. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$.* $\forall\vec u_1,\dots,\vec u_n\in E,\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \displaystyle\sum_{i=1}^n\alpha\cdot\vec u_i=\alpha\cdot\sum_{i=1}^n\vec u_i$
3. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$.* $\forall\vec u\in E,\ 0_{\mathbb{K}}\cdot\vec u=\vec 0_E$ *et* $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \alpha\cdot\vec 0_E=\vec 0_E$
4. $\forall\vec u\in E,\ (-1_{\mathbb{K}})\cdot\vec u=-\vec u$
5. $\forall\vec u\in E,\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \alpha\cdot\vec u=\vec 0_E\Longleftrightarrow\alpha=0_{\mathbb{K}}$ *ou* $\vec u=\vec 0_E$

Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)

1. Définissons sur l'ensemble $\mathbb{K}^n$ les deux opérations $+$ et $\cdot$ par
   $\forall((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n,\ \forall\alpha\in\mathbb{K}$,
   $$\begin{cases}(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\\ \alpha\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\end{cases}$$
   Alors $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
   L'**élément neutre** est $\vec 0_{\mathbb{K}^n}=(0,\dots,0)$ et le **symétrique** de $(x_1,\dots,x_n)$ est $-_{\mathbb{K}^n}(x_1,\dots,x_n)=(-x_1,\dots,-x_n)$. On les notera simplement $\mathbf{0}$ et $-(x_1,\dots,x_n)$.
2. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-e.v.
3. Définissons sur l'ensemble $\mathcal{A}(E,\mathbb{K})$ des applications définies sur un ensemble E à valeurs dans $\mathbb{K}$ les opérations $+$ et $\cdot$ par
   $\forall(f,g)\in\mathcal{A}(E,\mathbb{K})^2,\ \forall\alpha\in\mathbb{K}$,
   $$\forall x\in E,\quad\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\ (\alpha\cdot f)(x)=\alpha f(x)\end{cases}$$
   Alors $(\mathcal{A}(E,\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E (s.e.v. en abrégé) si $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.*

En général, on démontre qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-e.v. en établissant que c'est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. connu :

Proposition 2.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E.

$$F \text{ est un s.e.v. de } E \iff \begin{cases} F \neq \varnothing \quad \text{(un s.e.v. contient toujours le vecteur } \vec{0}_E) \\ \quad \text{et} \\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(\vec{u},\vec{v})\in F^2,\ \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\in F \\ (F \text{ est } \textbf{stable par combinaison linéaire}) \end{cases}$$

Par la suite, on notera la combinaison linéaire $\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$ plus simplement $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

Proposition 2.3 (Intersection de deux s.e.v)

*L'**intersection** de deux s.e.v. est encore un s.e.v. C'est **faux** pour la **réunion**.*

Exemple 2.4

1. Soit $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$, le sous-ensemble $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n : a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\}$ est un s.e.v.
2. Considérons le **système linéaire homogène** $\mathcal{S}$ de p équations à n inconnues suivant :
$$\mathcal{S}:\ \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \quad\vdots \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n=0 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1+\cdots+a_{pj}x_j+\cdots+a_{pn}x_n=0 \end{cases}$$
où les a_{ij}, $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant n$, sont des scalaires donnés de $\mathbb{K}$ et les $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sont des inconnues dans $\mathbb{K}$.
On peut interpréter le système $\mathcal{S}$ comme une conjonction d'équations de la **seule inconnue le n-uplet** $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$.
Dans ce contexte, l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est alors l'**intersection** de p s.e.v. de $\mathbb{K}^n$, c'est donc un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.
3. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, les sous-ensembles des fonctions **paires** et des fonctions **impaires**, sont des s.e.v.
4. Soit $\alpha\in\mathbb{K}$ et $n\in\mathbb{N}$. Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$:
   - le sous-ensemble $\{P\in\mathbb{K}[X] : P(\alpha)=0\}$ est un s.e.v. ;
   - le sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v.

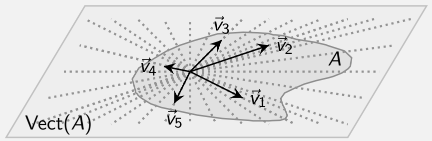
Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)

Soit $(E,+,\cdot)$ un e.v. et A une partie non vide de E.
*On appelle **sous-espace vectoriel engendré par A**, noté $\mathrm{Vect}(A)$, le plus petit s.e.v. de E contenant A, c'est-à-dire que si F est un s.e.v. de E tel que $A\subset F$, alors $\mathrm{Vect}(A)\subset F$.*
Par convention, on pose $\mathrm{Vect}(\varnothing)=\{\vec{0}_E\}$.

Proposition 2.6 (Ensemble de combinaisons linéaires)

Soit A une partie non vide d'un e.v E.
*$\mathrm{Vect}(A)$ est le s.e.v. de E constitué de toutes les **combinaisons linéaires** des vecteurs de A.*
En particulier, si A est une famille finie de vecteurs $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)$, alors :

$$\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)\big)=\{\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_p\vec{v}_p,\ (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)\in\mathbb{K}^p\}$$



Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.

1. *Le s.e.v. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)\big)$ est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.*
2. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p,\vec{0}_E)\big)=\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)\big)$
3. $\forall\alpha\in\mathbb{K}^*$, $\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1,\ldots,\alpha\vec{v}_i,\ldots,\vec{v}_p)\big)=\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_i,\ldots,\vec{v}_p)\big)$
4. $\forall(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in\mathbb{K}^p$ *avec* $\alpha_i\neq 0_{\mathbb{K}}$ *(i fixé),*
$$\mathrm{Vect}\Big(\big(\vec{v}_1,\ldots,\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\vec{v}_j,\ldots,\vec{v}_p\big)\Big)=\mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_i,\ldots,\vec{v}_p)\big)$$

Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.
Le s.e.v. $\mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)=\{\alpha\vec{u},\ \alpha\in\mathbb{K}\}$, noté aussi $\mathbb{K}\vec{u}$, est une **droite vectorielle**.
2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires d'un $\mathbb{K}$-e.v. E (i.e. $\vec{w}$ ne coïncide avec aucun $\alpha\vec{v}$ et $\vec{v}$ ne coïncide avec aucun $\beta\vec{w}$).
Le s.e.v. $\mathrm{Vect}\big((\vec{v},\vec{w})\big)=\{\alpha\vec{v}+\beta\vec{w},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\}$ est un **plan vectoriel**.
3. L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est une **droite vectorielle** dans le $\mathbb{R}$-e.v. des complexes $\mathbb{C}$.

Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.

1. *On appelle **somme** de F et G, l'ensemble noté $F+G$ défini par*
$$F+G=\{\vec{w}\in E : \exists\,\vec{u}\in F,\ \exists\,\vec{v}\in G,\ \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\}=\{\vec{u}+\vec{v},\ (\vec{u},\vec{v})\in F\times G\}.$$
2. *On dit que la somme $F+G$ est **directe** et on la note $F\oplus G$ lorsque la décomposition de tout vecteur $\vec{w}$ de $F+G$ en $\vec{u}+\vec{v}$ avec $(\vec{u},\vec{v})\in F\times G$ est **unique**.*

Proposition 2.10 (Somme et réunion)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.

1. *La somme $F+G$ est un **s.e.v.** de E contenant F et G et c'est le plus petit s.e.v. de E contenant $F\cup G$, autrement dit : $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.*
2. *La somme $F+G$ est **directe** ssi $F\cap G=\{\vec{0}_E\}$.*

Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$\forall\vec{w}\in E,\ \exists!\,(\vec{u},\vec{v})\in F\times G,\ \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}.$$

*Autrement dit, F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E=F\oplus G$.*

Théorème 2.12 (Caractérisation)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E.
*F et G sont **supplémentaires** dans E ssi $F+G=E$ et $F\cap G=\{\vec{0}_E\}$.*

Exemple 2.13

Dans l'e.v. $\mathbb{K}^3$, les s.e.v. $F=\{(x,y,0),x,y\in\mathbb{K}\}$ et $G=\{(0,0,z),z\in\mathbb{K}\}$ sont **supplémentaires**. On peut en effet décomposer de **manière unique** tout vecteur (x,y,z) de $\mathbb{K}^3$ en la somme $(x,y,0)+(0,0,z)$ d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple 2.14 (Fonctions paires/impaires)

Les s.e.v. des fonctions paires et impaires sont **supplémentaires** dans $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$.

Problématique

Avec une famille de deux vecteurs **non colinéaires** $\mathcal{S}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, il est possible de reconstruire **tout** l'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $E=\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ par **combinaisons linéaires** de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: $E=\{\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2,\ (\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{K}^2\}$.

- Si on retire un vecteur à la famille $\mathcal{S}$, on ne peut plus reconstruire ce plan vectoriel : on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille génératrice minimale**.
- Si on rajoute un vecteur $\vec{u}_3$ de E à $\mathcal{S}$, on peut de nouveau reconstruire ce plan vectoriel mais $\vec{u}_3$ n'est pas indispensable à cette reconstruction puisqu'il est en fait combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$: on dit que $\mathcal{S}$ est une **famille libre maximale** et que la famille agrandie $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est **liée**.
- En fait le famille $\mathcal{S}$ est une **base** du plan vectoriel E.

On va étendre ces trois notions de **familles libres/liées**, **familles génératrices** et de **bases** à un espace vectoriel quelconque.

Un objectif sera alors de déterminer des **bases** d'un espace vectoriel, c'est-à-dire des familles :

- comportant suffisamment de vecteurs pour **engendrer** cet espace (i.e. **familles génératrices**),
- et ne comportant pas de vecteurs inutiles à l'**engendrement** de cet espace (i.e. **familles libres**).

Définition 3.1 (Indépendance linéaire, familles libres, liées)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

1. *On dit qu'une famille de p vecteurs $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)$ de E est **libre** lorsque :* $\forall(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in\mathbb{K}^p$,
$$\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_p\vec{v}_p=\vec{0}_E\Longrightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_p=0_{\mathbb{K}}.$$
*On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p$ sont **linéairement indépendants**.*
2. *On dit que la famille $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p)$ est **liée** lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire*
$$\exists\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\neq(0_{\mathbb{K}},\ldots,0_{\mathbb{K}}) \text{ tel que } \alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_p\vec{v}_p=\vec{0}_E.$$
*On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p$ sont **linéairement dépendants**.*

Exemple 3.2 (Vecteurs colinéaires, coplanaires)

1. **Deux** vecteurs formant une famille **liée** sont dits **colinéaires**.
Exemple : Soit dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\vec{u}=(1,2)$ et $\vec{v}=(-2,-4)$. On a $2\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.
2. **Trois** vecteurs formant une famille **liée** sont dits **coplanaires**.
Exemple : Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(-3,2,-1)$ et $\vec{w}=(1,-2,-1)$. On a $\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}=\vec{0}$. Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f=\cos$, $g=\sin$ et h l'application $x\mapsto\cos(2x)$.

- La famille (f,g,h) est **libre**.
En effet : soit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha f+\beta g+\gamma h=0$, i.e. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)+\gamma\cos(2x)=0$.
Alors :
  - pour $x=0$, on obtient $\alpha+\gamma=0$;
  - pour $x=\frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta-\gamma=0$;
  - pour $x=\pi$, on obtient $-\alpha+\gamma=0$.

  On en déduit que $\alpha=\beta=\gamma=0$.
- La famille (f^2,g^2,h) est **liée**.
En effet : on a la relation $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$, d'où la combinaison linéaire non triviale $f^2-g^2-h=0$.

Proposition 3.4 (Propriétés immédiates)

1. *Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.*
2. *Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée**.*
3. *Toute famille **extraite** d'une famille **libre** est **libre**.*
4. *Toute famille **contenant** une famille **liée** est **liée**.*

Proposition 3.5 (Extension d'une famille libre)

*Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille **libre** de vecteurs d'un e.v. E.*
Soit $\vec{v} \in E$. Alors :

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}) \text{ est } \textbf{libre} \iff \vec{v} \notin \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)\big).$$

ou encore, de manière équivalente :

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}) \text{ est } \textbf{liée} \iff \vec{v} \in \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)\big).$$

*Autrement dit, on peut augmenter la taille d'une famille libre de vecteurs en lui ajoutant un vecteur qui **n**'est **pas** combinaison linéaire de ces vecteurs.*

Définition 3.6 (Familles génératrices)

- *Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ d'un e.v. E est dite **génératrice** si tout vecteur de E s'écrit comme **combinaison linéaire** de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, ou encore, de manière équivalente, ssi $E = \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)\big)$.*

  *On dit aussi que la famille **engendre** E.*

Proposition 3.7 (Propriétés immédiates)

1. *La famille contenant **tous** les vecteurs de E est naturellement **génératrice** de E !*
2. *Une famille est **génératrice** du s.e.v. qu'elle **engendre** (cf. proposition 2.6).*

Proposition 3.8 (Extension/restriction d'une famille génératrice)

*Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs **génératrice** d'un e.v. E.*

1. *Soit $\vec{v} \in E$. Alors $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v})$ reste une famille de vecteurs **génératrice** de E.*
2. *Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Alors*

$$\begin{aligned}&(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_p) \text{ est } \textbf{génératrice de } E\\ &\iff \vec{v}_i \in \mathrm{Vect}\big((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_p)\big).\end{aligned}$$

Autrement dit, on peut diminuer la taille d'une famille génératrice de vecteurs en lui retirant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Définition 3.9 (Bases)

- *Une famille **libre** et **génératrice** de E est appelée une **base** de E.*

Proposition 3.10 (Coordonnées)

*La famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une **base** d'un $\mathbb{K}$-e.v. E ssi tout vecteur de E s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.*

*Pour tout vecteur $\vec{v} \in E$, il existe donc un **unique** n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$.*

*Les scalaires $x_1, \dots, x_n$ de cette décomposition sont appelés les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 3.11 (Base canonique)

Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$, la famille de vecteurs $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ où $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 étant à la i-ème position), est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée **base canonique de $\mathbb{K}^n$**.
On a pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \dots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$.
Les **coordonnées** du **vecteur** $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dans la **base canonique** sont précisément les **scalaires** $x_1, \dots, x_n$.

Définition 3.12 (E.v. de dimension finie)

*On dit qu'un e.v. E est de **dimension finie** s'il existe une famille **finie** de vecteurs **génératrice** de E. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie** et l'on note par convention $\dim(E) = +\infty$.*

Théorème 3.13 (dit de la base incomplète)

*Dans un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul :*

1. *toute famille **libre** (finie) peut être complétée en une **base** ;*
2. *de toute famille **génératrice** (finie), on peut extraire une **base**.*

Corollaire 3.14 (Existence de bases)

*Tout e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul admet une base (**finie**).*

Remarque 3.15 (Existence de bases en dimension infinie (facultatif))

On peut définir en **dimension infinie** la notion de **famille infinie** de vecteurs libre, génératrice. On peut alors montrer que tout e.v. de **dimension infinie** admet également ne base (**infinie**).

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\big)$ une famille **libre** de E.
   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \big(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\big)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

- Si $\mathcal{L}$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}$ **n**'est **pas génératrice** de E.
  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  En effet :
  sinon tous les vecteurs de $\mathcal{G}$ seraient combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  La famille $\mathcal{G}$ étant **génératrice** de E, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$, eux-mêmes étant combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  Par suite, tout vecteur de E serait combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.

  Ainsi $\mathcal{L}$ serait **génératrice** de E, ce qui est contraire à l'hypothèse.

  Supposons donc e.g. que $\vec{v}_1$ ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.
  Alors la sur-famille $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1) = \big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1\big)$ de $\mathcal{L}$ est **libre**.

Démonstration du théorème de la base incomplète

1. Soit $\mathcal{L} = \big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\big)$ une famille **libre** de E.
   L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = \big(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\big)$ de E.
   On va construire une sur-famille de $\mathcal{L}$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une **base** de E.

On réitère le procédé à partir de la famille **libre** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1)$:

- Si $\mathcal{L}_1$ est **génératrice** de E, c'est alors une **base** de E.
- Sinon, $\mathcal{L}_1$ **n'est pas génératrice** de E.

  Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.

  Supposons donc e.g. que $\vec{v}_2$ ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$.
  Alors la sur-famille $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup (\vec{v}_2) = \big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2\big)$ de $\mathcal{L}_1$ est **libre**.

On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sur-familles **libres** $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots$ de $\mathcal{L}$ en rajoutant progressivement des vecteurs de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{L} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_2 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_3 \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

Or, $\mathcal{G}$ étant **finie**, le procédé s'arrête :
il existe un entier r ($r \leqslant q$) tel que la sur-famille **libre** $\mathcal{L}_r$ de $\mathcal{L}$ ainsi construite soit **génératrice** de E.
C'est une **base** de E contenant la famille **libre** initiale $\mathcal{L}$.

Démonstration du théorème de la base incomplète

2. Soit $\mathcal{G} = \big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\big)$ une famille **génératrice** de E.
   - Si $\mathcal{G}$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_p$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\} = \big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-1}\big)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère le procédé à partir de $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \backslash \{\vec{u}_p\}$:
   - Si $\mathcal{G}_1$ est **libre**, c'est alors une **base** de E.
   - Sinon, $\mathcal{G}_1$ est **liée**.
     Il existe alors un vecteur de $\mathcal{G}_1$ combinaison linéaire des autres.
     Supposons e.g. que ce soit $\vec{u}_{p-1}$.
     Alors, la famille $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \backslash \{\vec{u}_{p-1}\} = \big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-2}\big)$ est encore **génératrice** de E.

   On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sous-familles **génératrices** $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$ de $\mathcal{G}$ en retirant progressivement des vecteurs de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_2 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{G}_3 \underset{\neq}{\supset} \cdots$$

   Le nombre de vecteurs de chaque sous-famille étant décroissant, le procédé s'arrête :
   il existe un entier r ($r \leqslant p$) tel que la sous-famille **génératrice** $\mathcal{G}_r$ de $\mathcal{G}$ ainsi construite soit **libre** de E.
   C'est une **base** de E extraite de la famille **génératrice** initiale $\mathcal{G}$.

Exemple 3.16 (Familles dans $\mathbb{R}^3$)

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
   Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec l'un des deux vecteurs $\vec{e}_1$ ou $\vec{e}_2$ de $\mathcal{B}$, on obtient une famille **liée**, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.
   - En complétant $\mathcal{L}$ avec le vecteur $\vec{e}_3$ de $\mathcal{B}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, $\vec{v}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
   La famille $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ contient la base $\mathcal{B}$, elle est donc **génératrice** de $\mathbb{R}^3$.
   - En extrayant l'un des trois vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ou $\vec{v}_4$ de $\mathcal{G}$, on obtient une **base** de $\mathbb{R}^3$.
   - En extrayant le vecteur $\vec{v}_3$ de $\mathcal{G}$, on obtient une famille qui **n'est pas génératrice** de $\mathbb{R}^3$, donc **pas** une **base** de $\mathbb{R}^3$.

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul.*

1. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la **dimension de E**. Ce nombre est noté $\dim(E)$.*
2. - *Toute famille **libre** de E contient **au plus** n vecteurs.*
   - *Toute famille **génératrice** de E contient **au moins** n vecteurs.*
3. - *Toute famille **libre** de n vecteurs de E est une **base**.*
   - *Toute famille **génératrice** de n vecteurs de E est une **base**.*

Par convention, on pose $\dim\big(\{\vec{0}_E\}\big) = 0$.

Corollaire 3.18 (Équivalence entre famille libre et famille génératrice)

*Dans un e.v. de dimension **n**, si $\mathcal{F}$ est une famille de **n** vecteurs, alors :*

$$\mathcal{F} \text{ est une } \textbf{base} \text{ de } E \iff \mathcal{F} \text{ est } \textbf{libre} \iff \mathcal{F} \text{ est } \textbf{génératrice} \text{ de } E.$$

Corollaire 3.19 (Dimension infinie)

*Si un e.v. possède des familles libres de cardinal **arbitrairement grand,** alors il est de **dimension infinie**.*

Démonstration du théorème de la dimension

Lemme fondamental de Steinitz (facultatif)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et $p, q \in \mathbb{N}^*$.
$q+1$ vecteurs combinaisons linéaires de q autres vecteurs constituent nécessairement un système **lié**.

Plus généralement, p vecteurs combinaisons linéaires de q autres avec $p > q$ constituent nécessairement un système **lié**.

Conséquence 1

Pour toute famille **libre** de p vecteurs et toute famille **génératrice** de q vecteurs, on a $p \leqslant q$.

En d'autre termes, une famille **libre ne contient pas plus** de vecteurs qu'une famille **génératrice**.

Conséquence 2

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E.

- $\mathcal{B}_1$ est une famille **libre** et $\mathcal{B}_2$ est une famille **génératrice**, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$;
- $\mathcal{B}_2$ est une famille **libre** et $\mathcal{B}_1$ est une famille **génératrice**, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_2) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{B}_1)$.

D'où $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$. Toutes les bases de E ont **même** nombre de vecteurs.

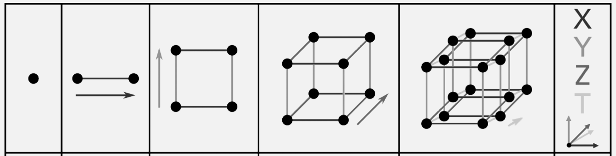
Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

1. Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
2. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n. C'est le $\mathbb{K}$-e.v. **canonique** de dimension n.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n+1$. La famille de polynômes $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ en est une base appelée **base canonique**.
4. Le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.
5. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions $\left(x \mapsto x^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.

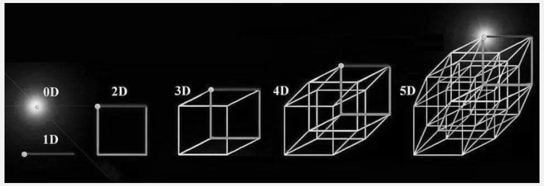
Exemple 3.21 (Base de Taylor)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. La formule de Taylor pour un polynôme de degré au plus n fournit la relation $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$ que l'on peut interpréter en disant que la famille de polynômes $\left((X-\alpha)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est **génératrice** de l'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$. Comme elle contient $n+1$ polynômes et comme $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$, elle est aussi **libre**. C'est ainsi une **base** de $\mathbb{K}_n[X]$.

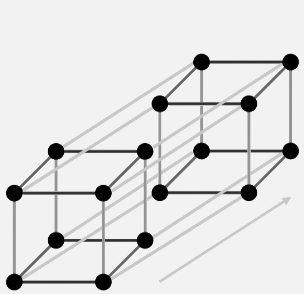
Exemple 3.22 (Dimensions 0 à 5)



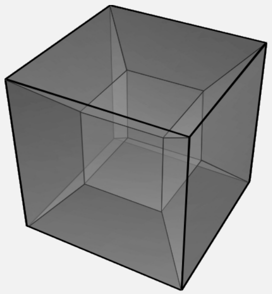
0D	1D	2D	3D	4D	#Dim
$\vec{0}$ Point	Droite Segment	Plan Carré	Espace Cube	Hyperespace Tesseract	



Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)

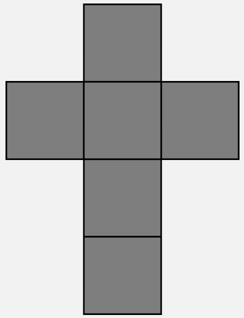


Perspective cavalière

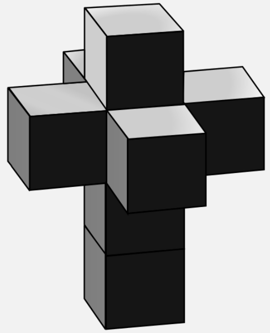


Représentation de Schleger

Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)

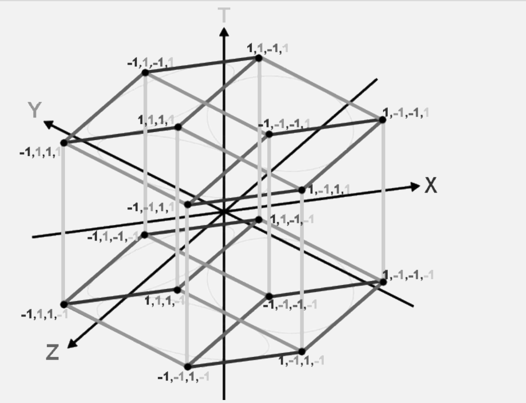


Patron d'un cube



Patron d'un tesseract

Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)



Tesseract et coordonnées

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*

1. *Soit F un s.e.v. de E.*
   *Alors F est de **dimension finie** et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
   Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.
2. *Soit F et G deux s.e.v. de E.*
   - *On a $\dim(F\cap G) \leqslant \min(\dim(F), \dim(G))$.*
   - *Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.*
   - *$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G)$ (formule de **Grassmann**).*
   - *$\max(\dim(F), \dim(G)) \leqslant \dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.*

Exemple 3.25 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. sont de dimension **0** (le s.e.v. $\{(0,0,0)\}$), **1** (les **droites vectorielles**), **2** (les **plans vectoriels**) ou **3** (le s.e.v. $\mathbb{R}^3$).

Exemple 3.26 (Hyperplans vectoriels)

Un s.e.v. de dimension $\boldsymbol{n-1}$ d'un e.v. de dimension $\boldsymbol{n}$ est appelé **hyperplan vectoriel**.

1. Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$.
   Le s.e.v. $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est un **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}^n$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Le s.e.v. $\{P \in \mathbb{K}_n[X] : P(\alpha) = 0\}$ est un **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E.

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leqslant n$.
- Sinon, soit $\vec{u}_1$ un vecteur **non nul** de F.
  La famille $(\vec{u}_1)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) \subset F$.
  - Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leqslant n$.
  - Sinon, soit $\vec{u}_2$ un vecteur de F **non colinéaire** à $\vec{u}_1$.
    La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1,\vec{u}_2)\big) \subset F$.
    - Soit $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1,\vec{u}_2)\big) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leqslant n$.
    - Sinon, soit $\vec{u}_3$ un vecteur de F **non coplanaire** à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
      La famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est **libre** et l'on a $\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\big) \subset F$.

On construit ainsi de proche en proche des famille **libres** de vecteurs $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\dots)$ de F. Leur nombre de vecteurs ne peut excéder la dimension n de E.

Le procédé s'arrête donc : soit p le nombre maximal de vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ d'une famille **libre** de F. On a $F = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)\big)$.
Ainsi, la famille **libre** $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ est une **base** de F donc $\dim(F) = p$.
On a nécessairement $p \leqslant n$, soit $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

De plus, si $\dim(F) = \dim(E)$, i.e. $p = n$, la **base** $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$ de F étant une famille **libre** de E contenant exactement n vecteurs, est aussi une **base** de E.
D'où $E = F$.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$. On se place dans le $\mathbb{K}$-e.v. canonique $\mathbb{K}^n$.

1. La **droite vectorielle** $\mathcal{D}$ de base $\big((a_1,\dots,a_n)\big)$ peut être décrite par :
   - la **représentation paramétrique à 1 paramètre** $\begin{cases} x_1 = a_1\lambda \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{K}$,
     c'est-à-dire $\mathcal{D} = \big\{(a_1\lambda,\dots,a_n\lambda), \lambda \in \mathbb{K}\big\}$;
   - la **représentation cartésienne à $n-1$ équations linéaires** $\dfrac{x_1}{a_1} = \cdots = \dfrac{x_n}{a_n}$
     c'est-à-dire $\mathcal{D} = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n : \dfrac{x_1}{a_1} = \cdots = \dfrac{x_n}{a_n}\right\}$.
2. Un **hyperplan vectoriel** $\mathcal{H}$ de $\mathbb{K}^n$ peut être décrit par :
   - une **représentation cartésienne à 1 équation linéaire** $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$
     c'est-à-dire $\mathcal{H} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$;
   - une **représentation paramétrique à $n-1$ paramètres** (en supposant e.g. $a_n \neq 0$)
     $$\begin{cases} x_1 = -a_n\lambda_1 \\ x_2 = \qquad -a_n\lambda_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = \qquad\qquad - a_n\lambda_{n-1} \\ x_n = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_{n-1} \end{cases}, \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{K}, \text{ c'est-à-dire}$$
     $\mathcal{H} = \big\{(-a_n\lambda_1, -a_n\lambda_2, \dots, -a_n\lambda_{n-1}, a_1\lambda_1 + \cdots + a_{n-1}\lambda_{n-1}),\ \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{K}\big\}$
     La famille $\big((-a_n, 0\dots,0,a_1), (0,-a_n,\dots,0,a_2), \dots, (0,0,\dots,-a_n,a_{n-1})\big)$ est une **base** de $\mathcal{H}$.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{S}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p)$ une famille libre de E. Soit F le s.e.v. de E engendré par $\mathcal{S}$: $F=\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p$ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{u}_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\vec{e}_i,\ 1\leqslant j\leqslant p.$$

Pour un vecteur générique $\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i$ de E, on a

$$\begin{aligned}\vec{u}\in F &\iff \exists\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K},\ \vec{u}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\vec{u}_j\\ &\iff \exists\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K},\ \forall i\in\{1,\dots,n\},\ x_i=\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ij}\lambda_j.\end{aligned}$$

Le système d'équations

$$\begin{cases}x_1 = \alpha_{11}\lambda_1+\alpha_{12}\lambda_2+\cdots+\alpha_{1p}\lambda_p\\ x_2 = \alpha_{21}\lambda_1+\alpha_{22}\lambda_2+\cdots+\alpha_{2p}\lambda_p\\ \vdots\\ x_n = \alpha_{n1}\lambda_1+\alpha_{n2}\lambda_2+\cdots+\alpha_{np}\lambda_p\end{cases}\qquad \lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$$

est une **représentation paramétrique** du s.e.v. F (qui est de dimension p).
Elle contient p paramètres.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{S}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p)$ une famille libre de E. Soit F le s.e.v. de E engendré par $\mathcal{S}$: $F=\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p$ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{u}_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\vec{e}_i,\ 1\leqslant j\leqslant p.$$

En éliminant les p paramètres $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, il est possible d'obtenir un système de $n-p$ équations reliant les coordonnées $x_1,\dots,x_n$:

$$\begin{cases}\beta_{11}x_1+\ \ \beta_{12}x_2+\cdots+\ \ \beta_{1n}x_n = 0\\ \beta_{21}x_1+\ \ \beta_{22}x_2+\cdots+\ \ \beta_{2n}x_n = 0\\ \qquad\vdots\\ \beta_{n-p\,1}x_1+\beta_{n-p\,2}x_2+\cdots+\beta_{n-p\,n}x_n = 0\end{cases}$$

Ce système est une **représentation cartésienne** du s.e.v. F.
On voit sous cette forme que F est l'intersection de $n-p$ **hyperplans vectoriels**.

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u}=(1,3,-2)$: $D=\mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1=(1,1,-1)$ et $\vec{u}_2=(2,5,-1)$: $P=\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1,\vec{u}_2)\big)$.

- On a $D=\{\lambda(1,3,-2),\ \lambda\in\mathbb{R}\}=\{(\lambda,3\lambda,-2\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.
  Un vecteur générique $\vec{v}=(x,y,z)$ de E appartient à D si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $(x,y,z)=(\lambda,3\lambda,-2\lambda)$.
  D'où la **représentation paramétrique** de la droite D suivante :
  $$\begin{cases}x=\ \ \lambda\\ y=\ \ 3\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$
  On en obtient une **représentation cartésienne** en éliminant le paramètre λ : de la première équation, on tire $\lambda=x$ que l'on injecte dans les deux autres équations pour arriver à
  $$\begin{cases}3x-y=0\\ 2x+z=0\end{cases}$$

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^3$)

Considérons dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u}=(1,3,-2)$: $D=\mathrm{Vect}\big((\vec{u})\big)$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1=(1,1,-1)$ et $\vec{u}_2=(2,5,-1)$: $P=\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1,\vec{u}_2)\big)$.

- De même, en écrivant
  $P=\{\lambda(1,1,-1)+\mu(2,5,-1),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}=\{(\lambda+2\mu,\lambda+5\mu,-\lambda-\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$,
  on obtient une **représentation paramétrique** de P :
  $$\begin{cases}x=\ \ \lambda+2\mu\\ y=\ \ \lambda+5\mu\\ z=-\lambda-\ \mu\end{cases},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$
  de laquelle on déduit une **représentation cartésienne** après élimination des paramètres λ et μ. En effet, des première et troisième équations, on tire
  $$\begin{cases}\mu=\ \ x+\ z\\ \lambda=-x-2z\end{cases}$$
  que l'on injecte dans la deuxième équation pour obtenir la **représentation cartésienne** de P suivante :
  $$4x-y+3z=0.$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F=\{(\lambda+2\mu,2\lambda+\mu,3\mu,\lambda+\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in E : y-2z+t=0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F\cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u}=(x,y,z,t)\in E$.

- ***Pour F :*** $\vec{u}\in F\iff\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \vec{u}=(\lambda+2\mu,2\lambda+\mu,3\mu,\lambda+\mu)$
  $$\iff\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=\ \ \lambda+2\mu\\ y=2\lambda+\ \mu\\ z=\qquad 3\mu\\ t=\ \ \lambda+\ \mu\end{cases}$$
  Le système d'équations précédent est une **représentation paramétrique** de F, de laquelle on déduit
  $$\begin{aligned}F&=\big\{(\lambda+2\mu,2\lambda+\mu,3\mu,\lambda+\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\big\}\\ &=\big\{\lambda(1,2,0,1)+\mu(2,1,3,1),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\big\}\\ &=\mathrm{Vect}\big((1,2,0,1),(2,1,3,1)\big)\end{aligned}$$
  On obtient ainsi une famille **génératrice** de F : $\mathcal{B}_F=\big\{(1,2,0,1),(2,1,3,1)\big\}$ qui est clairement une **base** de F puisque les deux vecteurs $(1,2,0,1)$ et $(2,1,3,1)$ ne sont pas **colinéaires**.
  On a donc $\dim(F)=2$, F est un **plan vectoriel**.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F=\{(\lambda+2\mu,2\lambda+\mu,3\mu,\lambda+\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in E : y-2z+t=0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F\cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G. Soit $\vec{u}=(x,y,z,t)\in E$.

- ***Pour G :*** partant de l'équation $y-2z+t=0$ appelée **représentation cartésienne** de G, on trouve
  $$\vec{u}\in G\iff y-2z+t=0\iff t=-y+2z\iff\vec{u}=(x,y,z,-y+2z)$$
  d'où l'on tire
  $$\begin{aligned}G&=\big\{(\lambda,\mu,\nu,-\mu+2\nu),\ \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\big\}\\ &=\big\{\lambda(1,0,0,0)+\mu(0,1,0,-1)+\nu(0,0,1,2),\ \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\big\}\\ &=\mathrm{Vect}\big((1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)\big)\end{aligned}$$
  D'où une famille **génératrice** de G : $\mathcal{B}_G=\big((1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)\big)$ qui s'avère être une **base** de G.
  Vérifions que $\mathcal{B}_G$ est effectivement une famille **libre**.
  Soit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,1,0,-1)+\gamma(0,0,1,2)=\vec{0}$.
  On a $(\alpha,\beta,\gamma,-\beta+2\gamma)=(0,0,0,0)$ et nécessairement $\alpha=\beta=\gamma=0$.
  Les vecteurs $(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)$ ne sont pas **coplanaires**.
  On a donc $\dim(G)=3$, G est un **hyperplan vectoriel**.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans $\mathbb{R}^4$)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$F=\{(\lambda+2\mu,2\lambda+\mu,3\mu,\lambda+\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in E : y-2z+t=0\}$.

On voudrait déterminer le s.e.v. $F\cap G$.

- ***Pour F ∩ G :*** on utilise la **représentation paramétrique** de F ainsi que la **représentation cartésienne** de G :
  $$\vec{u}\in F\cap G\iff\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=\ \ \lambda+2\mu\\ y=2\lambda+\ \mu\\ z=\qquad 3\mu\\ t=\ \ \lambda+\ \mu\end{cases}\text{ et } y-2z+t=0$$
  Injectons les équations paramétriques (contenant les paramètres λ,μ) dans l'équation cartésienne $y-2z+t=0$: on obtient la relation $3\lambda-4\mu=0$, ou encore $\mu=\frac{3}{4}\lambda$, puis en reportant cette dernière dans les équations paramétriques, on trouve, après multiplication par 4 ($\lambda=4\nu,\mu=3\nu$),
  $$\vec{u}\in F\cap G\iff\exists\nu\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=10\nu\\ y=11\nu\\ z=9\nu\\ t=7\nu\end{cases}$$
  Donc $\quad F\cap G=\big\{(10\nu,11\nu,9\nu,7\nu),\ \nu\in\mathbb{R}\big\}=\mathrm{Vect}\big((10,11,9,7)\big)$
  Ainsi $F\cap G$ est la **droite vectorielle engendrée** par le vecteur $(10,11,9,7)$.

Exemple 3.30 (Égalité entre deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$)

Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E=\mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ et $\vec{u}_2=\vec{e}_1-\vec{e}_2$.
Soit $F=\mathrm{Vect}\big((\vec{e}_1,\vec{e}_2)\big)$ et $G=\mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1,\vec{u}_2)\big)$.

- Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant des **combinaisons linéaires** des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, on a l'**inclusion** $G\subset F$.
- Par ailleurs :
  - La famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ étant extraite de la **base** $\mathcal{B}$, est **libre**.
    Elle engendre par définition F, c'en est donc une **base** et $\dim(F)=2$.
  - La famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ étant composée de vecteurs **non colinéaires** est également **libre**.
    Elle engendre par définition G, c'en est donc une **base** et $\dim(G)=2$

  Ainsi $\dim(F)=\dim(G)$.

En conclusion, on a l'**égalité** $F=G$.

Remarque : on observe que l'on a $\vec{e}_1=\frac{1}{2}(\vec{u}_1+\vec{u}_2)$ et $\vec{e}_2=\frac{1}{2}(\vec{u}_1-\vec{u}_2)$, donc les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont réciproquement des **combinaisons linéaires** des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, prouvant ainsi l'**inclusion inverse** $F\subset G$.
La théorie de la **dimension** permet d'éviter cette dernière vérification.

Proposition 3.31 (Supplémentarité et dimension)

*Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E de **dimension finie**.*

$$\begin{aligned}E=F\oplus G&\iff F\cap G=\{\vec{0}\}\quad\textit{et}\quad\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\\ &\iff E=F+G\quad\textit{et}\quad\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)\end{aligned}$$

Proposition 3.32

*Deux s.e.v. F et G d'un e.v. E de **dimension finie** sont **supplémentaires** ssi on peut former une **base** $\mathcal{B}_E$ de E en accolant une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G : $\mathcal{B}_E=\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}_G$ et alors $\dim(E)=\dim(F)+\dim(G)$.*

*Une telle base de E obtenue en accolant une base de F et une base de G est dite **adaptée à la supplémentarité** de F et G.*

Théorème 3.33 (Existence de s.e.v. supplémentaires)

*Soit E un e.v. de **dimension finie**.*
*Tout s.e.v. de E possède au moins un **supplémentaire** dans E.*

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un e.v.
*On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, la **dimension** du s.e.v. $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un e.v. E.

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant p$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **libre**.*
2. *Si E est de **dimension finie**,*
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est **génératrice** de E ;*
   - $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$ *ssi $\mathcal{F}$ est une **base** de E.*

Proposition 3.36 (Opérations élémentaires)

*Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. On **ne** modifie **pas** le s.e.v. $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et donc **pas** le **rang** de $\mathcal{F}$ lorsque l'on effectue l'une des opérations, dites **élémentaires**, suivantes :*

- *on **retire le vecteur nul** de $\mathcal{F}$ si celui-ci apparaît ;*
- *on **change l'ordre** des vecteurs de $\mathcal{F}$;*
- *on **multiplie** un vecteur de $\mathcal{F}$ par un **scalaire non nul** ;*
- *on **ajoute** à un vecteur de $\mathcal{F}$ une **combinaison linéaire** des autres.*

Remarque 3.37 (Rang d'un système linéaire)

Soit $(\mathcal{S})$ le **système linéaire** de n équations à p inconnues suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Introduisons les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ où $\vec{v}_j$ est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ainsi que le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(b_1, \ldots, b_n)$. Dans ce contexte, **l'inconnue** du système $(\mathcal{S})$ est le ***p*-uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$. Alors :

- le système $(\mathcal{S})$ est équivalent à la relation **vectorielle**
$$x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{w}$$
- $(\mathcal{S})$ admet **au moins** une solution **ssi** le vecteur $\vec{w}$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$. Dans ce cas, si de plus la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est **libre**, alors cette solution est **unique** ;
- le **rang du système** $(\mathcal{S})$ est égal au **rang de la famille de vecteurs** $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$.

Définition 3.38 (Vecteurs échelonnés)

*Soit E un e.v. de **dimension finie** et soit $\mathcal{B}$ une base de E.*
*Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de E est dite **échelonnée relativement à la base** $\mathcal{B}$ lorsque, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, l'écriture des coordonnées de $\vec{v}_{k+1}$ dans la base $\mathcal{B}$ commence par un nombre de zéros strictement plus grand que celui de $\vec{v}_k$, sauf si $\vec{v}_k = \vec{v}_{k+1} = 0$.*

Proposition 3.39 (Vecteurs échelonnés et liberté)

*Toute famille de vecteurs non nuls **échelonnée** relativement à une base est nécessairement **libre**.*

Exemple 3.40

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ où $\vec{e}_1 = (1,0,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,0), \vec{e}_3 = (0,0,1,0), \vec{e}_4 = (0,0,0,1)$.

Considérons les vecteurs $\vec{u} = (1,2,3,4), \vec{v} = (0,1,2,3), \vec{w} = (0,0,0,2)$, soit encore, écrits dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 \\ \vec{v} &= \phantom{\vec{e}_1 + {}} \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 \\ \vec{w} &= \phantom{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + {}} 2\vec{e}_4 \end{aligned}$$

La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$, donc **libre**.

Proposition 3.41 (Polynômes échelonnés)

*Une famille de polynômes non nuls de **degrés tous différents** est toujours **libre**.*

Exemple 3.42 (Polynômes échelonnés)

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}_3[X]$ rapporté à la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.
La famille de polynômes $(X^3 + 2X^2 + 3X + 4, X^2 + 2X + 3, 2)$ est **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$, donc **libre**.

Théorème 3.43 (Méthode des zéros échelonnés)

Soit $\mathcal{F}_1$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E.

*On peut toujours transformer $\mathcal{F}_1$ en une famille $\mathcal{F}_2$ **échelonnée** relativement à $\mathcal{B}$ par une succession d'**opérations élementaires**.*

*Alors les vecteurs non nuls de $\mathcal{F}_2$ forment une **base** de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$, et le **rang** de $\mathcal{F}_1$ est égal au nombre de vecteurs **non nuls** de $\mathcal{F}_2$.*

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

1. Faisons apparaître des zéros sur la **première** ligne à partir de la **deuxième** colonne :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \vec{u}'_3 & \vec{u}'_4 & \vec{u}'_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -14 & -14 & -5 & -19 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec $\vec{u}'_1 = \vec{u}_1$, $\vec{u}'_2 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1$, $\vec{u}'_3 = \vec{u}_3 - 4\vec{u}_1$, $\vec{u}'_4 = \vec{u}_4 - \vec{u}_1$, $\vec{u}'_5 = \vec{u}_5 - 4\vec{u}_1$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

2. Faisons apparaître des zéros sur la **deuxième** ligne à partir de la **troisième** colonne :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}''_1 & \vec{u}''_2 & \vec{u}''_3 & \vec{u}''_4 & \vec{u}''_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -14 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec $\vec{u}''_1 = \vec{u}'_1$, $\vec{u}''_2 = \vec{u}'_2$, $\vec{u}''_3 = \vec{u}'_3 - \vec{u}'_2$, $\vec{u}''_4 = 3\vec{u}'_4 - \vec{u}'_2$, $\vec{u}''_5 = 3\vec{u}'_5 - 4\vec{u}'_2$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

3. Le terme apparaissant à l'intersection des **troisième** ligne et **troisième** colonne étant nul, on permute par exemple les vecteurs $\vec{u}''_3$ et $\vec{u}''_5$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}''_1 & \vec{u}''_2 & \vec{u}''_5 & \vec{u}''_4 & \vec{u}''_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

4. Faisons apparaître des zéros sur la **troisième** ligne à partir de la **quatrième** colonne :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}'''_1 & \vec{u}'''_2 & \vec{u}'''_3 & \vec{u}'''_4 & \vec{u}'''_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec $\vec{u}'''_1 = \vec{u}''_1$, $\vec{u}'''_2 = \vec{u}''_2$, $\vec{u}'''_3 = \vec{u}''_5$, $\vec{u}'''_4 = \vec{u}''_4 - \vec{u}''_5$, $\vec{u}'''_5 = \vec{u}''_3$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$\vec{u}_1 = (1,1,0,5)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,2,-4)$, $\vec{u}_3 = (4,1,2,6)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_5 = (4,0,3,1)$.

On remarque que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système $\mathcal{S}$ est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de $\mathcal{S}$, on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

5. Ainsi,
$$\mathrm{Vect}(\mathcal{S}) = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}'''_1, \vec{u}'''_2, \vec{u}'''_3)\big) = \mathrm{Vect}\big((\vec{u}_1, \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1, 3\vec{u}_5 - 4\vec{u}_2 - 4\vec{u}_1)\big).$$

La famille $\big((1,1,0,5), (0,-3,2,-14), (0,0,1,-1)\big)$ est une **base** de $\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ et alors
$$\mathrm{rang}(\mathcal{S}) = 3.$$

De plus les égalités $\vec{u}'''_4 = \vec{u}'''_5 = \vec{0}$ conduisent progressivement à $\vec{u}''_4 - \vec{u}''_5 = \vec{u}''_3 = \vec{0}$, puis $\vec{u}'_2 + \vec{u}'_4 - \vec{u}'_5 = \vec{u}'_3 - \vec{u}'_2 = \vec{0}$ et enfin
$$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u}_5 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4.$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Systèmes linéaires

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/_alachal/diaporamas/coursPC/chap11__Systemes__Lineaires__WEB.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Systèmes linéaires

Quelques exercices

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/_alachal/diaporamas/diaporama__systemes__lineaires.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Carrés magiques d'ordre 3

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/_alachal/diaporamas/diaporama__carres__magiques__ordre3.pdf

Notions à retenir

- Espaces vectoriels
  - Axiomes, calcul vectoriel
  - Exemples canoniques
  - Dimension
- Sous-espaces vectoriels
  - Caractérisation
  - Notion d'engendrement
  - Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentarité
- Famille de vecteurs
  - Familles libres, liées, génératrices, bases
  - Dépendance, indépendance linéaires
  - Rang, méthode des zéros échelonnés