

Espaces vectoriels

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

1 Structure d'espace vectoriel

- Présentation
- Définition
- Quelques propriétés immédiates
- Exemples fondamentaux

2 Sous-espaces vectoriels

- Définition et caractérisation
- Sous-espace vectoriel engendré par une partie
- Somme de sous-espaces vectoriels
- Sous-espaces supplémentaires

3 Dimension d'un espace vectoriel

- Familles libres, liées, génératrices, bases
- Dimension finie
- Propriétés en dimension finie
- Sous-espace vectoriel en dimension finie
- Supplémentarité en dimension finie
- Rang d'une famille de vecteurs
- Méthode des zéros échelonnés

- 1 Structure d'espace vectoriel
 - Présentation
 - Définition
 - Quelques propriétés immédiates
 - Exemples fondamentaux
- 2 Sous-espaces vectoriels
- 3 Dimension d'un espace vectoriel

Présentation

Les **structures algébriques** concernent des ensembles pour lesquels on dispose de certaines opérations. Elles apparaissent naturellement et progressivement dans la construction des nombres usuels : entiers, rationnels, réels, complexes... avec les **opérations** d'addition et de multiplication.

Ces structures ont pour vocation d'**unifier** des propriétés typiques (telles que la **commutativité**, l'**associativité**, la **distributivité**...) et d'ériger des règles de calcul qui s'avèrent communes à de nombreux exemples de natures *a priori* différentes.

La structure d'**espace vectoriel** est née avec l'étude géométrique des vecteurs du plan ou de l'espace dans lequel on vit. Malgré l'aspect **géométrique** de cette origine, les propriétés des espaces vectoriels sont de nature **algébrique** et s'appliquent dans divers contextes éloignés, en apparence, de la géométrie (espaces de fonctions, de polynômes...)

Présentation

Par exemple, pour les trois ensembles

- ① $\vec{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan ;
- ② $\mathbb{R}_1[X]$ des binômes de degré au plus 1 : $\alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- ③ $\mathcal{F}_{\text{trigo}}$ des fonctions trigonométriques de la forme $x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

on peut définir des opérations tout à fait similaires pour lesquels des règles de calcul sont rigoureusement les mêmes. Ces opérations sont respectivement les suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 \textcircled{1} \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} \longrightarrow \vec{\mathcal{P}} & \textcircled{2} \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X] & \textcircled{3} \mathcal{F}_{\text{trigo}} \times \mathcal{F}_{\text{trigo}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\text{trigo}} \\
 (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v} & (P, Q) \longmapsto P + Q & (f, g) \longmapsto f + g \\
 (\alpha, \vec{u}) \longmapsto \alpha \cdot \vec{u} & (\alpha, P) \longmapsto \alpha \cdot P & (\alpha, f) \longmapsto \alpha \cdot f
 \end{array}$$

- ① Pour le plan $\vec{\mathcal{P}}$, si l'on dispose d'une base (\vec{i}, \vec{j}) , on peut écrire n'importe quel vecteur \vec{u} de $\vec{\mathcal{P}}$ sous la forme $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- ② l'ensemble $\mathbb{R}_1[X]$ est constitué de binômes de la forme $\alpha X + \beta \mathbb{1}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}$ étant le polynôme constant égal à 1 ;
- ③ l'ensemble $\mathcal{F}_{\text{trigo}}$ est constitué de fonctions de la forme $\alpha \cos + \beta \sin$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

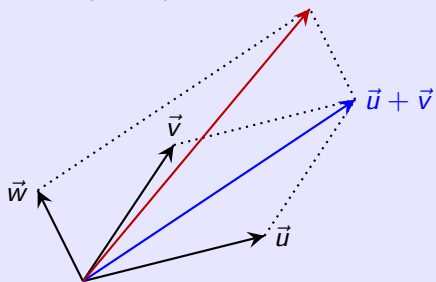
Présentation

Malgré la différence de nature de tous ces objets, dans les trois cas, les couples (\vec{i}, \vec{j}) , $(X, \mathbb{1})$ et (\cos, \sin) jouent le même rôle vis-à-vis des opérations $+$ et \cdot , à savoir que l'on peut écrire dans chaque situation un objet de l'ensemble uniquement à l'aide du couple correspondant et de facteurs d'échelle α, β ; on parle de **combinaisons linéaires** (e.g. $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$) et de **bases** (e.g. (\vec{i}, \vec{j})).

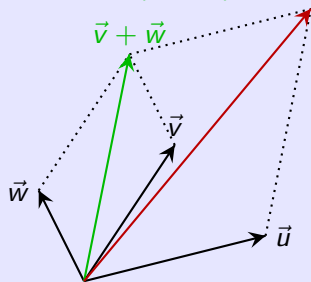
Les ensembles $\vec{\mathcal{P}}, \mathbb{R}_1[X], \mathcal{F}_{\text{trigo}}$ sont ainsi rapprochés les uns les autres selon un même jeu de « **calcul vectoriel** » et seront qualifiés d'**espaces vectoriels isomorphes**.

Présentation : « observation vectorielle »

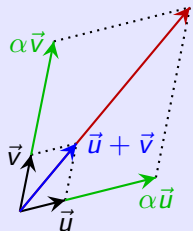
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$



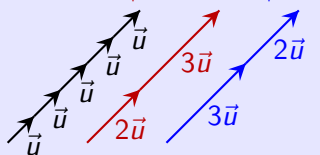
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$



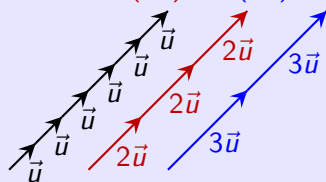
$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$



$$5\vec{u} = 2\vec{u} + 3\vec{u} = 3\vec{u} + 2\vec{u}$$



$$6\vec{u} = 3(2\vec{u}) = 2(3\vec{u})$$



Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1.1 (Axiomes)

Un ensemble E est un \mathbb{K} -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur \mathbb{K} , e.v. en abrégé) lorsqu'il est muni d'une **loi interne** $+_E$ (i.e. une application $E \times E \rightarrow E$) et d'une **loi externe** \cdot_E (i.e. une application $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$) telles que :

- ① $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E, (\vec{u} +_E \vec{v}) +_E \vec{w} = \vec{u} +_E (\vec{v} +_E \vec{w})$ (loi $+_E$ **associative**)
- ② $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u}$ (loi $+_E$ **commutative**)
- ③ $\exists \vec{0}_E \in E, \forall \vec{u} \in E, \vec{u} +_E \vec{0}_E = \vec{0}_E +_E \vec{u} = \vec{u}$ (existence d'un **élément neutre** pour la loi $+_E$ appelé **vecteur nul**)
- ④ $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E, \vec{u} +_E \vec{v} = \vec{v} +_E \vec{u} = \vec{0}_E$ (existence d'un **symétrique**, noté $-_E \vec{u}$, pour tout élément \vec{u} de E)
- ⑤ $\forall \vec{u} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \vec{u} = \vec{u}$
- ⑥ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \alpha \cdot_E (\beta \cdot_E \vec{u}) = (\alpha\beta) \cdot_E \vec{u}$
- ⑦ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, (\alpha + \beta) \cdot_E \vec{u} = (\alpha \cdot_E \vec{u}) +_E (\beta \cdot_E \vec{u})$ (on écrit $\alpha \cdot_E \vec{u} +_E \beta \cdot_E \vec{u}$)
- ⑧ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \alpha \cdot_E (\vec{u} +_E \vec{v}) = (\alpha \cdot_E \vec{u}) +_E (\alpha \cdot_E \vec{v})$ (on écrit $\alpha \cdot_E \vec{u} +_E \alpha \cdot_E \vec{v}$)

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de \mathbb{K} sont appelés des **scalaires**.
Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on peut écrire les vecteurs de E sans les surmonter d'une flèche.

Quand les lois $+_E$ et \cdot_E sont évidentes, on ne les précise pas. On écrit, par exemple, « le \mathbb{K} -e.v. \mathbb{K}^2 » au lieu de $(\mathbb{K}^2, +, \cdot)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on les note plus simplement $+$ et \cdot (voire rien).

Proposition 1.2 (Propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -e.v.

$$① \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E, \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \cdot \vec{u}$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \vec{u} \in E, \underbrace{\vec{u} + \dots + \vec{u}}_{n \text{ fois}} = n \vec{u}$

$$② \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \forall \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \alpha \cdot \vec{u}_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \vec{u}_i$$

$$③ \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \forall \vec{u} \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$$

$$④ \forall \vec{u} \in E, (-1_{\mathbb{K}}) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$$

$$⑤ \forall \vec{u} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}_E$$

Exemple 1.3 (Exemples fondamentaux)

- ① Définissons sur l'ensemble \mathbb{K}^n les deux opérations $+$ et \cdot par

$$\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

$$\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \end{cases}$$

Alors $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -e.v.

L'**élément neutre** est $\vec{0}_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)$ et le **symétrique** de (x_1, \dots, x_n) est ${}_{-\mathbb{K}^n}(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$. On les notera simplement **0** et $-(x_1, \dots, x_n)$.

- ② L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} muni des opérations $+$ et \cdot est un \mathbb{K} -e.v.
- ③ Définissons sur l'ensemble $\mathcal{A}(E, \mathbb{K})$ des applications définies sur un ensemble E à valeurs dans \mathbb{K} les opérations $+$ et \cdot par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{A}(E, \mathbb{K})^2, \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

$$\forall x \in E, \quad \begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

Alors $(\mathcal{A}(E, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -e.v.

- 1 Structure d'espace vectoriel
- 2 Sous-espaces vectoriels
 - Définition et caractérisation
 - Sous-espace vectoriel engendré par une partie
 - Somme de sous-espaces vectoriels
 - Sous-espaces supplémentaires
- 3 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 2.1 (Sous-espace vectoriel)

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -e.v. et F une partie de E .

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E (s.e.v. en abrégé) si $(F, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -e.v.

En général, on démontre qu'un ensemble est un \mathbb{K} -e.v. en établissant que c'est un s.e.v. d'un \mathbb{K} -e.v. connu :

Proposition 2.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -e.v. et F une partie de E .

$$F \text{ est un s.e.v. de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset & (\text{un s.e.v. contient toujours le vecteur } \vec{0}_E) \\ \text{et} \\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in F \\ (F \text{ est } \textbf{stable par combinaison linéaire}) \end{cases}$$

Par la suite, on notera la combinaison linéaire $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ plus simplement $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Proposition 2.3 (Intersection de deux s.e.v)

L'**intersection** de deux s.e.v. est encore un s.e.v. C'est **faux** pour la **réunion**.

Exemple 2.4

- ① Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Dans le \mathbb{K} -e.v. \mathbb{K}^n , le sous-ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ est un s.e.v.
- ② Considérons le **système linéaire homogène** \mathcal{S} de p équations à n inconnues suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pj}x_j + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

où les a_{ij} , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, sont des scalaires donnés de \mathbb{K} et les x_1, x_2, \dots, x_n sont des inconnues dans \mathbb{K} .

On peut interpréter le système \mathcal{S} comme une conjonction d'équations de la **seule inconnue le n -uplet** (x_1, x_2, \dots, x_n) de \mathbb{K}^n .

Dans ce contexte, l'ensemble des solutions du système \mathcal{S} est alors l'**intersection** de p s.e.v. de \mathbb{K}^n , c'est donc un s.e.v. de \mathbb{K}^n .

- ③ Dans le \mathbb{K} -e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ des applications de \mathbb{K} dans \mathbb{K} , les sous-ensembles des fonctions **paires** et des fonctions **impaires**, sont des s.e.v.
- ④ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans le \mathbb{K} -e.v. $\mathbb{K}[X]$:
- le sous-ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(\alpha) = 0\}$ est un s.e.v. ;
 - le sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v.

Définition 2.5 (S.e.v. engendré par une partie)

Soit $(E, +, \cdot)$ un e.v. et A une partie non vide de E .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par A** , noté $\text{Vect}(A)$, le plus petit s.e.v. de E contenant A , c'est-à-dire que si F est un s.e.v. de E tel que $A \subset F$, alors $\text{Vect}(A) \subset F$. Par convention, on pose $\text{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}_E\}$.

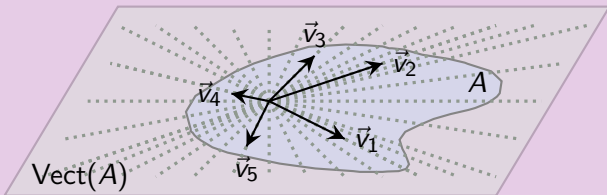
Proposition 2.6 (Ensemble de combinaisons linéaires)

Soit A une partie non vide d'un e.v E .

$\text{Vect}(A)$ est le s.e.v. de E constitué de toutes les **combinaisons linéaires** des vecteurs de A .

En particulier, si A est une famille finie de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$, alors :

$$\text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)) = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p\}$$



Proposition 2.7

Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille finie de vecteurs d'un \mathbb{K} -e.v. E .

① Le s.e.v. $\text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p))$ est inchangé si on change l'ordre des vecteurs.

② $\text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{0}_E)) = \text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p))$

③ $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \alpha \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p)) = \text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p))$

④ $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ avec $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ (i fixé),

$$\text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \sum_{j=1}^p \alpha_j \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_p)) = \text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_p))$$

Exemple 2.8 (Droites et plans vectoriels)

① Soit \vec{u} un vecteur non nul d'un \mathbb{K} -e.v. E .

Le s.e.v. $\text{Vect}((\vec{u})) = \{\alpha \vec{u}, \alpha \in \mathbb{K}\}$, noté aussi $\mathbb{K}\vec{u}$, est une **droite vectorielle**.

② Soit \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs non colinéaires d'un \mathbb{K} -e.v. E (i.e. \vec{w} ne coïncide avec aucun $\alpha \vec{v}$ et \vec{v} ne coïncide avec aucun $\beta \vec{w}$).

Le s.e.v. $\text{Vect}((\vec{v}, \vec{w})) = \{\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\}$ est un **plan vectoriel**.

③ L'ensemble des réels \mathbb{R} est une **droite vectorielle** dans le \mathbb{R} -e.v. des complexes \mathbb{C} .

Définition 2.9 (Somme de deux s.e.v.)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E .

- ① On appelle **somme** de F et G , l'ensemble noté $F + G$ défini par

$$F + G = \{\vec{w} \in E : \exists \vec{u} \in F, \exists \vec{v} \in G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\} = \{\vec{u} + \vec{v}, (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G\}.$$

- ② On dit que la somme $F + G$ est **directe** et on la note $F \oplus G$ lorsque la décomposition de tout vecteur \vec{w} de $F + G$ en $\vec{u} + \vec{v}$ avec $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ est **unique**.

Proposition 2.10 (Somme et réunion)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E .

- ① La somme $F + G$ est un **s.e.v.** de E contenant F et G et c'est le plus petit s.e.v. de E contenant $F \cup G$, autrement dit : $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.
- ② La somme $F + G$ est **directe** ssi $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

Définition 2.11 (S.e.v. supplémentaires)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\forall \vec{w} \in E, \exists ! (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Autrement dit, F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.

Théorème 2.12 (Caractérisation)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E .

F et G sont **supplémentaires** dans E ssi $F + G = E$ et $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.

Exemple 2.13

Dans l'e.v. \mathbb{K}^3 , les s.e.v. $F = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{K}\}$ et $G = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{K}\}$ sont **supplémentaires**. On peut en effet décomposer de **manière unique** tout vecteur (x, y, z) de \mathbb{K}^3 en la somme $(x, y, 0) + (0, 0, z)$ d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Exemple 2.14 (Fonctions paires/impaires)

Les s.e.v. des fonctions paires et impaires sont **supplémentaires** dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

- 1 Structure d'espace vectoriel
- 2 Sous-espaces vectoriels
- 3 Dimension d'un espace vectoriel
 - Familles libres, liées, génératrices, bases
 - Dimension finie
 - Propriétés en dimension finie
 - Sous-espace vectoriel en dimension finie
 - Supplémentarité en dimension finie
 - Rang d'une famille de vecteurs
 - Méthode des zéros échelonnés

Problématique

Avec une famille de deux vecteurs **non colinéaires** $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, il est possible de reconstruire **tout** l'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $E = \text{Vect}(\mathcal{S})$ par **combinaisons linéaires** de \vec{u}_1 et \vec{u}_2 : $E = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2, (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

- Si on retire un vecteur à la famille \mathcal{S} , on ne peut plus reconstruire ce plan vectoriel : on dit que \mathcal{S} est une **famille génératrice minimale**.
- Si on rajoute un vecteur \vec{u}_3 de E à \mathcal{S} , on peut de nouveau reconstruire ce plan vectoriel mais \vec{u}_3 n'est pas indispensable à cette reconstruction puisqu'il est en fait combinaison linéaire de \vec{u}_1 et \vec{u}_2 : on dit que \mathcal{S} est une **famille libre maximale** et que la famille agrandie $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **liée**.
- En fait le famille \mathcal{S} est une **base** du plan vectoriel E .

On va étendre ces trois notions de **familles libres/liées**, **familles génératrices** et de **bases** à un espace vectoriel quelconque.

Un objectif sera alors de déterminer des **bases** d'un espace vectoriel, c'est-à-dire des familles :

- comportant suffisamment de vecteurs pour **engendrer** cet espace (i.e. **familles génératrices**),
- et ne comportant pas de vecteurs inutiles à l'**engendrement** de cet espace (i.e. **familles libres**).

Définition 3.1 (Indépendance linéaire, familles libres, liées)

Soit E un \mathbb{K} -e.v.

- ① On dit qu'une famille de p vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E est **libre** lorsque :
- $$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,$$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}_E \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont **linéairement indépendants**.

- ② On dit que la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est **liée** lorsqu'elle n'est pas libre, c'est-à-dire

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \text{ tel que } \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}_E.$$

On dit aussi que les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont **linéairement dépendants**.

Exemple 3.2 (Vecteurs colinéaires, coplanaires)

- ① Deux vecteurs formant une famille **liée** sont dits **colinéaires**.

Exemple : Soit dans \mathbb{R}^2 les vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-2, -4)$. On a $2\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
Donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires**.

- ② Trois vecteurs formant une famille **liée** sont dits **coplanaires**.

Exemple : Soit dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-3, 2, -1)$ et $\vec{w} = (1, -2, -1)$.
On a $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$. Donc les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires**.

Exemple 3.3 (Fonctions trigonométriques coplanaires)

Plaçons-nous dans le \mathbb{R} -e.v. $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
Soit $f = \cos$, $g = \sin$ et h l'application $x \mapsto \cos(2x)$.

- La famille (f, g, h) est **libre**.

En effet : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$,
i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma \cos(2x) = 0$.

Alors :

- * pour $x = 0$, on obtient $\alpha + \gamma = 0$;
- * pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta - \gamma = 0$;
- * pour $x = \pi$, on obtient $-\alpha + \gamma = 0$.

On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

- La famille (f^2, g^2, h) est **liée**.

En effet : on a la relation $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, d'où la combinaison linéaire non triviale $f^2 - g^2 - h = 0$.

Proposition 3.4 (Propriétés immédiates)

- ① Une famille de vecteurs est **liée** ssi l'un des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.
- ② Toute famille de vecteurs contenant le **vecteur nul** est **liée**.
- ③ Toute famille **extraite** d'une famille **libre** est **libre**.
- ④ Toute famille **contenant** une famille **liée** est **liée**.

Proposition 3.5 (Extension d'une famille libre)

Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille **libre** de vecteurs d'un e.v. E .

Soit $\vec{v} \in E$. Alors :

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}) \text{ est } \mathbf{libre} \iff \vec{v} \notin \text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)).$$

ou encore, de manière équivalente :

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}) \text{ est } \mathbf{liée} \iff \vec{v} \in \text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)).$$

Autrement dit, on peut augmenter la taille d'une famille libre de vecteurs en lui ajoutant un vecteur qui **n'est pas** combinaison linéaire de ces vecteurs.

Définition 3.6 (Familles génératrices)

- Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ d'un e.v. E est dite **génératrice** si tout vecteur de E s'écrit comme **combinaison linéaire** de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$, ou encore, de manière équivalente, ssi $E = \text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p))$.

On dit aussi que la famille **engendre** E .

Proposition 3.7 (Propriétés immédiates)

- ① La famille contenant **tous** les vecteurs de E est naturellement **génératrice** de E !
- ② Une famille est **génératrice** du s.e.v. qu'elle **engendre** (cf. proposition 2.6).

Proposition 3.8 (Extension/restriction d'une famille génératrice)

Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs **génératrice** d'un e.v. E .

- ① Soit $\vec{v} \in E$. Alors $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v})$ reste une famille de vecteurs **génératrice** de E .
- ② Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Alors

$$\begin{aligned}
 & (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_p) \text{ est } \mathbf{g\acute{e}n\acute{e}ratrice} \text{ de } E \\
 & \iff \vec{v}_i \in \text{Vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_p)).
 \end{aligned}$$

Autrement dit, on peut diminuer la taille d'une famille génératrice de vecteurs en lui retirant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Définition 3.9 (Bases)

- Une famille **libre** et **génératrice** de E est appelée une **base** de E .

Proposition 3.10 (Coordonnées)

La famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une **base** d'un \mathbb{K} -e.v. E ssi tout vecteur de E s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Pour tout vecteur $\vec{v} \in E$, il existe donc un **unique** n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$.

Les scalaires x_1, \dots, x_n de cette décomposition sont appelés les **coordonnées** de \vec{v} dans la base \mathcal{B} .

Exemple 3.11 (Base canonique)

Dans le \mathbb{K} -e.v. \mathbb{K}^n , la famille de vecteurs $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ où $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 étant à la i -ème position), est une base de \mathbb{K}^n appelée **base canonique de \mathbb{K}^n** .

On a pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \dots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$.

Les **coordonnées** du vecteur (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{K}^n dans la **base canonique** sont précisément les **scalaires** x_1, \dots, x_n .

Définition 3.12 (E.v. de dimension finie)

On dit qu'un e.v. E est de **dimension finie** s'il existe une famille **finie** de vecteurs **génératrice** de E . Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie** et l'on note par convention $\dim(E) = +\infty$.

Théorème 3.13 (dit de la base incomplète)

Dans un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul :

- 1 toute famille **libre** (finie) peut être complétée en une **base** ;
- 2 de toute famille **génératrice** (finie), on peut extraire une **base**.

Corollaire 3.14 (Existence de bases)

Tout e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul admet une base (**finie**).

Remarque 3.15 (Existence de bases en dimension infinie (facultatif))

On peut définir en **dimension infinie** la notion de **famille infinie** de vecteurs libre, génératrice. On peut alors montrer que tout e.v. de **dimension infinie** admet également une base (**infinie**).

Démonstration du théorème de la base incomplète

① Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille **libre** de E .

L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$ de E .

On va construire une sur-famille de \mathcal{L} en lui rajoutant des vecteurs de \mathcal{G} de façon à obtenir une **base** de E .

-
- Si \mathcal{L} est **génératrice** de E , c'est alors une **base** de E .
 - Sinon, \mathcal{L} **n'est pas génératrice** de E .

Il existe alors un vecteur de \mathcal{G} qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{L} .

En effet :

sinon tous les vecteurs de \mathcal{G} seraient combinaisons linéaires des vecteurs de \mathcal{L} .

La famille \mathcal{G} étant **génératrice** de E , tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{G} , eux-mêmes étant combinaisons linéaires des vecteurs de \mathcal{L} .

Par suite, tout vecteur de E serait combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{L} .

Ainsi \mathcal{L} serait **génératrice** de E , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons donc e.g. que \vec{v}_1 ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{L} . Alors la sur-famille $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1)$ de \mathcal{L} est **libre**.

Démonstration du théorème de la base incomplète

① Soit $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille **libre** de E .

L'e.v. E étant de **dimension finie**, il existe une famille **génératrice finie** $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$ de E .

On va construire une sur-famille de \mathcal{L} en lui rajoutant des vecteurs de \mathcal{G} de façon à obtenir une **base** de E .

On réitère le procédé à partir de la famille **libre** $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (\vec{v}_1)$:

- Si \mathcal{L}_1 est **génératrice** de E , c'est alors une **base** de E .
- Sinon, \mathcal{L}_1 **n'est pas génératrice** de E .

Il existe alors un vecteur de \mathcal{G} qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{L}_1 .

Supposons donc e.g. que \vec{v}_2 ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{L}_1 .

Alors la sur-famille $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup (\vec{v}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de \mathcal{L}_1 est **libre**.

On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sur-familles **libres** $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots$ de \mathcal{L} en rajoutant progressivement des vecteurs de \mathcal{G} :

$$\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_3 \subsetneq \dots$$

Or, \mathcal{G} étant **finie**, le procédé s'arrête :

il existe un entier r ($r \leq q$) tel que la sur-famille **libre** \mathcal{L}_r de \mathcal{L} ainsi construite soit **génératrice** de E .

C'est une **base** de E contenant la famille **libre** initiale \mathcal{L} .

Démonstration du théorème de la base incomplète

② Soit $\mathcal{G} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille **génératrice** de E .

- Si \mathcal{G} est **libre**, c'est alors une **base** de E .
- Sinon, \mathcal{G} est **liée**.

Il existe alors un vecteur de \mathcal{G} combinaison linéaire des autres.

Supposons e.g. que ce soit \vec{u}_p .

Alors, la famille $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \setminus \{\vec{u}_p\} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-1})$ est encore **génératrice** de E .

On réitère le procédé à partir de $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \setminus \{\vec{u}_p\}$:

- Si \mathcal{G}_1 est **libre**, c'est alors une **base** de E .
- Sinon, \mathcal{G}_1 est **liée**.

Il existe alors un vecteur de \mathcal{G}_1 combinaison linéaire des autres.

Supposons e.g. que ce soit \vec{u}_{p-1} .

Alors, la famille $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \setminus \{\vec{u}_{p-1}\} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-2})$ est encore **génératrice** de E .

On réitère de nouveau le procédé. On construit ainsi de proche en proche des sous-familles **génératrices** $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$ de \mathcal{G} en retirant progressivement des vecteurs de \mathcal{G} :

$$\mathcal{G} \supset \underset{\neq}{\mathcal{G}_1} \supset \underset{\neq}{\mathcal{G}_2} \supset \underset{\neq}{\mathcal{G}_3} \supset \dots$$

Le nombre de vecteurs de chaque sous-famille étant décroissant, le procédé s'arrête : il existe un entier r ($r \leq p$) tel que la sous-famille **génératrice** \mathcal{G}_r de \mathcal{G} ainsi construite soit **libre** de E .

C'est une **base** de E extraite de la famille **génératrice** initiale \mathcal{G} .

Exemple 3.16 (Familles dans \mathbb{R}^3)

Plaçons-nous dans le \mathbb{R} -e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

① Soit $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 **ne sont pas colinéaires**, donc la famille $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est **libre**.

- En complétant \mathcal{L} avec l'un des deux vecteurs \vec{e}_1 ou \vec{e}_2 de \mathcal{B} , on obtient une famille **liée**, donc **pas** une **base** de \mathbb{R}^3 .
- En complétant \mathcal{L} avec le vecteur \vec{e}_3 de \mathcal{B} , on obtient une **base** de \mathbb{R}^3 .

② Soit $\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, $\vec{v}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

La famille $\mathcal{G} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ contient la base \mathcal{B} , elle est donc **génératrice** de \mathbb{R}^3 .

- En extrayant l'un des trois vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 ou \vec{v}_4 de \mathcal{G} , on obtient une **base** de \mathbb{R}^3 .
- En extrayant le vecteur \vec{v}_3 de \mathcal{G} , on obtient une famille qui **n'est pas génératrice** de \mathbb{R}^3 , donc **pas** une **base** de \mathbb{R}^3 .

Théorème-définition 3.17 (Dimension)

Soit E un e.v. de **dimension finie** non réduit à son vecteur nul.

- ① Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs n appelé la **dimension de E** . Ce nombre est noté $\dim(E)$.
- ②
 - Toute famille **libre** de E contient **au plus** n vecteurs.
 - Toute famille **génératrice** de E contient **au moins** n vecteurs.
- ③
 - Toute famille **libre** de n vecteurs de E est une **base**.
 - Toute famille **génératrice** de n vecteurs de E est une **base**.

Par convention, on pose $\dim(\{\vec{0}_E\}) = 0$.

Corollaire 3.18 (Équivalence entre famille libre et famille génératrice)

Dans un e.v. de dimension n , si \mathcal{F} est une famille de n vecteurs, alors :

$$\mathcal{F} \text{ est une } \mathbf{base} \text{ de } E \iff \mathcal{F} \text{ est } \mathbf{libre} \iff \mathcal{F} \text{ est } \mathbf{génératrice} \text{ de } E.$$

Corollaire 3.19 (Dimension infinie)

Si un e.v. possède des familles libres de cardinal **arbitrairement grand**, alors il est de **dimension infinie**.

Démonstration du théorème de la dimension

Lemme fondamental de Steinitz (facultatif)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et $p, q \in \mathbb{N}^*$.

$q + 1$ vecteurs combinaisons linéaires de q autres vecteurs constituent nécessairement un système **lié**.

Plus généralement, p vecteurs combinaisons linéaires de q autres avec $p > q$ constituent nécessairement un système **lié**.

Conséquence 1

Pour toute famille **libre** de p vecteurs et toute famille **génératrice** de q vecteurs, on a $p \leq q$.

En d'autres termes, une famille **libre ne contient pas plus** de vecteurs qu'une famille **génératrice**.

Conséquence 2

Soit \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E .

- \mathcal{B}_1 est une famille **libre** et \mathcal{B}_2 est une famille **génératrice**, donc $\text{Card}(\mathcal{B}_1) \leq \text{Card}(\mathcal{B}_2)$;
- \mathcal{B}_2 est une famille **libre** et \mathcal{B}_1 est une famille **génératrice**, donc $\text{Card}(\mathcal{B}_2) \leq \text{Card}(\mathcal{B}_1)$.

D'où $\text{Card}(\mathcal{B}_1) = \text{Card}(\mathcal{B}_2)$. Toutes les bases de E ont **même** nombre de vecteurs.



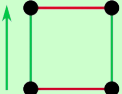
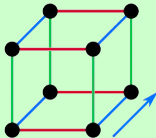
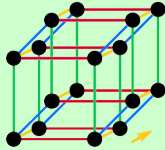

Exemple 3.20 (Exemples fondamentaux)

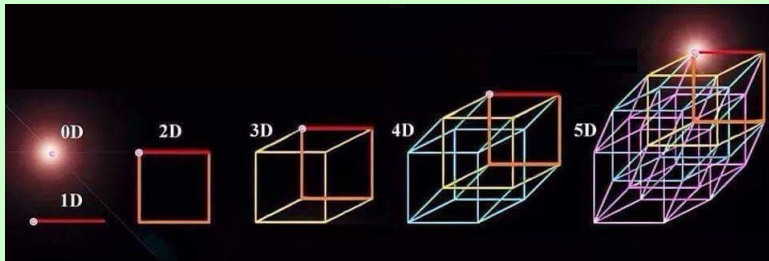
- 1 Un e.v. de **dimension 1** (resp. **2**) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).
- 2 Le \mathbb{K} -e.v. \mathbb{K}^n est de dimension n . C'est le \mathbb{K} -e.v. **canonique** de dimension n .
- 3 L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n est un \mathbb{K} -e.v. de dimension $n + 1$. La famille de polynômes $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ en est une base appelée **base canonique**.
- 4 Le \mathbb{K} -e.v. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension **infinie** puisque la famille de polynômes $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.
- 5 L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un \mathbb{R} -e.v. de dimension **infinie** puisque la famille des fonctions $(x \mapsto x^k)_{0 \leq k \leq n}$ y est libre pour n arbitrairement grand.

Exemple 3.21 (Base de Taylor)

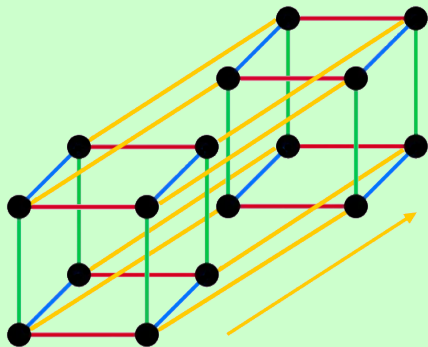
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. La formule de Taylor pour un polynôme de degré au plus n fournit la relation $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$ que l'on peut interpréter en disant que la famille de polynômes $((X - \alpha)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est **génératrice** de l'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$. Comme elle contient $n + 1$ polynômes et comme $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$, elle est aussi **libre**. C'est ainsi une **base** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 3.22 (Dimensions 0 à 5)

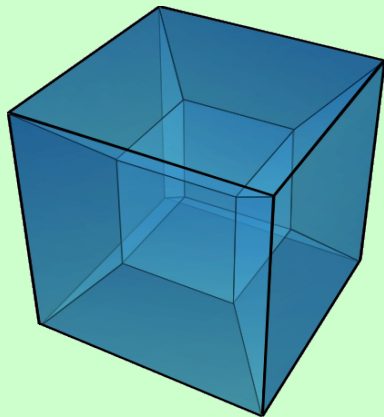
					<p>X Y Z T</p> 
0D	1D	2D	3D	4D	# Dim
$\vec{0}$ Point	Droite Segment	Plan Carré	Espace Cube	Hyperspace Tesseract	



Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)

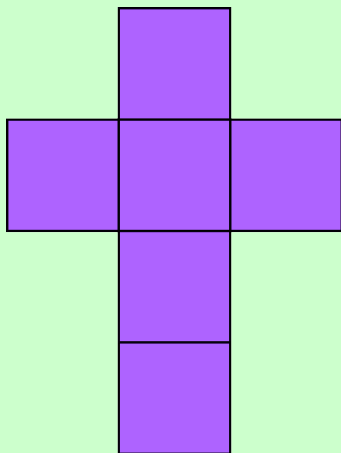


Perspective cavalière

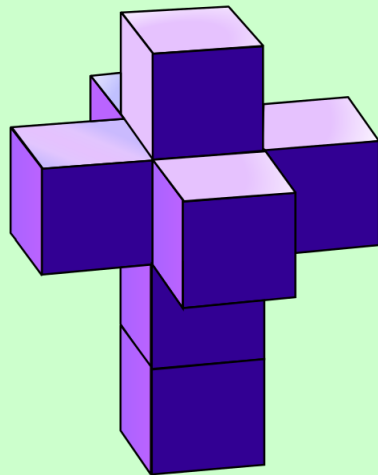


Représentation de Schlegler

Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)

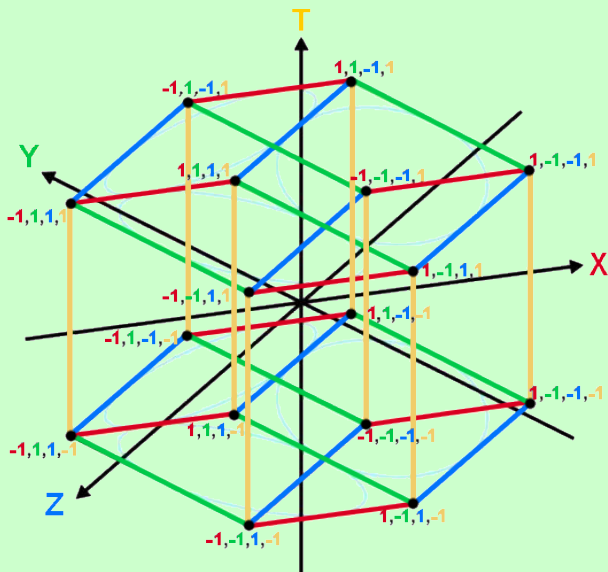


Patron d'un cube



Patron d'un tesseract

Exemple 3.23 (Dimension 4 : le tesseract)



Tesseract et coordonnées

Théorème 3.24 (Dimension d'un s.e.v.)

Soit E un e.v. de **dimension finie**.

① Soit F un s.e.v. de E .

Alors F est de **dimension finie** et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

② Soit F et G deux s.e.v. de E .

- On a $\dim(F \cap G) \leq \min(\dim(F), \dim(G))$.

- Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

- $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ (formule de **Grassmann**).

- $\max(\dim(F), \dim(G)) \leq \dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple 3.25 (Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3)

Dans \mathbb{R}^3 , les s.e.v. sont de dimension **0** (le s.e.v. $\{(0, 0, 0)\}$), **1** (les **droites vectorielles**), **2** (les **plans vectoriels**) ou **3** (le s.e.v. \mathbb{R}^3).

Exemple 3.26 (Hyperplans vectoriels)

Un s.e.v. de dimension $n-1$ d'un e.v. de dimension n est appelé **hyperplan vectoriel**.

① Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Le s.e.v. $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ est un **hyperplan vectoriel** de \mathbb{K}^n .

② Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Le s.e.v. $\{P \in \mathbb{K}_n[X] : P(\alpha) = 0\}$ est un **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration du théorème de la dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un e.v. de **dimension finie** n et F un s.e.v. de E .

- Soit $F = \{\vec{0}_E\}$ auquel cas $\dim(F) = 0 \leq n$.
- Sinon, soit \vec{u}_1 un vecteur **non nul** de F .

La famille (\vec{u}_1) est **libre** et l'on a $\text{Vect}((\vec{u}_1)) \subset F$.

★ Soit $\text{Vect}((\vec{u}_1)) = F$, auquel cas $\dim(F) = 1 \leq n$.

★ Sinon, soit \vec{u}_2 un vecteur de F **non colinéaire** à \vec{u}_1 .

La famille (\vec{u}_1, \vec{u}_2) est **libre** et l'on a $\text{Vect}((\vec{u}_1, \vec{u}_2)) \subset F$.

* Soit $\text{Vect}((\vec{u}_1, \vec{u}_2)) = F$, auquel cas $\dim(F) = 2 \leq n$.

* Sinon, soit \vec{u}_3 un vecteur de F **non coplanaire** à \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **libre** et l'on a $\text{Vect}((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)) \subset F$.

On construit ainsi de proche en proche des famille **libres** de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots)$ de F . Leur nombre de vecteurs ne peut excéder la dimension n de E .

Le procédé s'arrête donc : soit p le nombre maximal de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ d'une famille **libre** de F . On a $F = \text{Vect}((\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p))$.

Ainsi, la famille **libre** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une **base** de F donc $\dim(F) = p$.

On a nécessairement $p \leq n$, soit $\dim(F) \leq \dim(E)$.

De plus, si $\dim(F) = \dim(E)$, i.e. $p = n$, la **base** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de F étant une famille **libre** de E contenant exactement n vecteurs, est aussi une **base** de E .

D'où $E = F$.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On se place dans le \mathbb{K} -e.v. canonique \mathbb{K}^n .

① La droite vectorielle \mathcal{D} de base $((a_1, \dots, a_n))$ peut être décrite par :

- la **représentation paramétrique à 1 paramètre** $\begin{cases} x_1 = a_1 \lambda \\ \vdots \\ x_n = a_n \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{K}$,
c'est-à-dire $\mathcal{D} = \{(a_1 \lambda, \dots, a_n \lambda), \lambda \in \mathbb{K}\}$;
- la **représentation cartésienne à $n - 1$ équations linéaires** $\frac{x_1}{a_1} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$
c'est-à-dire $\mathcal{D} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \frac{x_1}{a_1} = \dots = \frac{x_n}{a_n} \right\}$.

② Un hyperplan vectoriel \mathcal{H} de \mathbb{K}^n peut être décrit par :

- une **représentation cartésienne à 1 équation linéaire** $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$
c'est-à-dire $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$;
- une **représentation paramétrique à $n - 1$ paramètres** (en supposant e.g. $a_n \neq 0$)

$$\begin{cases} x_1 = -a_n \lambda_1 \\ x_2 = -a_n \lambda_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = -a_n \lambda_{n-1} \\ x_n = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_{n-1} \lambda_{n-1} \end{cases}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\mathcal{H} = \{(-a_n \lambda_1, -a_n \lambda_2, \dots, -a_n \lambda_{n-1}, a_1 \lambda_1 + \dots + a_{n-1} \lambda_{n-1}), \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}\}$$

La famille $((-a_n, 0, \dots, 0, a_1), (0, -a_n, \dots, 0, a_2), \dots, (0, 0, \dots, -a_n, a_{n-1}))$ est une **base** de \mathcal{H} .

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n , $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre de E . Soit F le s.e.v. de E engendré par \mathcal{S} : $F = \text{Vect}(\mathcal{S})$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ relativement à la base \mathcal{B} :

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Pour un vecteur générique $\vec{u} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ de E , on a

$$\begin{aligned} \vec{u} \in F &\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \vec{u} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{u}_j \\ &\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} \lambda_j. \end{aligned}$$

Le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} \lambda_1 + \alpha_{12} \lambda_2 + \dots + \alpha_{1p} \lambda_p \\ x_2 = \alpha_{21} \lambda_1 + \alpha_{22} \lambda_2 + \dots + \alpha_{2p} \lambda_p \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1} \lambda_1 + \alpha_{n2} \lambda_2 + \dots + \alpha_{np} \lambda_p \end{cases} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$$

est une **représentation paramétrique** du s.e.v. F (qui est de dimension p). Elle contient p paramètres.

Exemple 3.27 (Représentation cartésienne/paramétrique (facultatif))

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension n , $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre de E . Soit F le s.e.v. de E engendré par \mathcal{S} : $F = \text{Vect}(\mathcal{S})$.

Introduisons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ relativement à la base \mathcal{B} :

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i, \quad 1 \leq j \leq p.$$

En éliminant les p paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, il est possible d'obtenir un système de $n - p$ équations reliant les coordonnées x_1, \dots, x_n :

$$\begin{cases} \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \dots + \beta_{1n} x_n = 0 \\ \beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2 + \dots + \beta_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ \beta_{n-p,1} x_1 + \beta_{n-p,2} x_2 + \dots + \beta_{n-p,n} x_n = 0 \end{cases}$$

Ce système est une **représentation cartésienne** du s.e.v. F .

On voit sous cette forme que F est l'intersection de $n - p$ **hyperplans vectoriels**.

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans \mathbb{R}^3)

Considérons dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \text{Vect}((\vec{u}))$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \text{Vect}((\vec{u}_1, \vec{u}_2))$.

-
- On a $D = \{\lambda(1, 3, -2), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 3\lambda, -2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Un vecteur générique $\vec{v} = (x, y, z)$ de E appartient à D si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (\lambda, 3\lambda, -2\lambda)$.

D'où la **représentation paramétrique** de la droite D suivante :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On en obtient une **représentation cartésienne** en éliminant le paramètre λ : de la première équation, on tire $\lambda = x$ que l'on injecte dans les deux autres équations pour arriver à

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Exemple 3.28 (Représentation cartésienne/paramétrique dans \mathbb{R}^3)

Considérons dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$:

- la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $\vec{u} = (1, 3, -2)$: $D = \text{Vect}((\vec{u}))$,
- le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (2, 5, -1)$: $P = \text{Vect}((\vec{u}_1, \vec{u}_2))$.

- De même, en écrivant

$$P = \{\lambda(1, 1, -1) + \mu(2, 5, -1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda + 2\mu, \lambda + 5\mu, -\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

on obtient une **représentation paramétrique** de P :

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = \lambda + 5\mu \\ z = -\lambda - \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

de laquelle on déduit une **représentation cartésienne** après élimination des paramètres λ et μ . En effet, des première et troisième équations, on tire

$$\begin{cases} \mu = x + z \\ \lambda = -x - 2z \end{cases}$$

que l'on injecte dans la deuxième équation pour obtenir la **représentation cartésienne** de P suivante :

$$4x - y + 3z = 0.$$

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans \mathbb{R}^4)

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$$F = \{(\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, 3\mu, \lambda + \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in E : y - 2z + t = 0\}.$$

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G . Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

- **Pour F** : $\vec{u} \in F \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u} = (\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, 3\mu, \lambda + \mu)$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases}$$

Le système d'équations précédent est une **représentation paramétrique** de F , de laquelle on déduit

$$\begin{aligned} F &= \{(\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, 3\mu, \lambda + \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda(1, 2, 0, 1) + \mu(2, 1, 3, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 1)) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une famille **génératrice** de F : $\mathcal{B}_F = \{(1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 1)\}$ qui est clairement une **base** de F puisque les deux vecteurs $(1, 2, 0, 1)$ et $(2, 1, 3, 1)$ ne sont pas **colinéaires**.

On a donc $\dim(F) = 2$, F est un **plan vectoriel**.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans \mathbb{R}^4)

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$$F = \{(\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, 3\mu, \lambda + \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in E : y - 2z + t = 0\}.$$

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

On commence par chercher des **bases** de F et G . Soit $\vec{u} = (x, y, z, t) \in E$.

- **Pour G** : partant de l'équation $y - 2z + t = 0$ appelée **représentation cartésienne** de G , on trouve

$$\vec{u} \in G \iff y - 2z + t = 0 \iff t = -y + 2z \iff \vec{u} = (x, y, z, -y + 2z)$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} G &= \{(\lambda, \mu, \nu, -\mu + 2\nu), \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda(1, 0, 0, 0) + \mu(0, 1, 0, -1) + \nu(0, 0, 1, 2), \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)) \end{aligned}$$

D'où une famille **génératrice** de G : $\mathcal{B}_G = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2))$ qui s'avère être une **base** de G .

Vérifions que \mathcal{B}_G est effectivement une famille **libre**.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, -1) + \gamma(0, 0, 1, 2) = \vec{0}$.

On a $(\alpha, \beta, \gamma, -\beta + 2\gamma) = (0, 0, 0, 0)$ et nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Les vecteurs $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)$ ne sont pas **coplanaires**.

On a donc $\dim(G) = 3$, G est un **hyperplan vectoriel**.

Exemple 3.29 (Représentation cartésienne/paramétrique dans \mathbb{R}^4)

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les deux s.e.v.

$$F = \{(\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, 3\mu, \lambda+\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in E : y-2z+t = 0\}.$$

On voudrait déterminer le s.e.v. $F \cap G$.

- **Pour $F \cap G$** : on utilise la **représentation paramétrique** de F ainsi que la **représentation cartésienne** de G :

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases} \quad \text{et} \quad y - 2z + t = 0$$

Injectons les équations paramétriques (contenant les paramètres λ, μ) dans l'équation cartésienne $y - 2z + t = 0$: on obtient la relation $3\lambda - 4\mu = 0$, ou encore $\mu = \frac{3}{4}\lambda$, puis en reportant cette dernière dans les équations paramétriques, on trouve, après multiplication par 4 ($\lambda = 4\nu, \mu = 3\nu$),

$$\vec{u} \in F \cap G \iff \exists \nu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 10\nu \\ y = 11\nu \\ z = 9\nu \\ t = 7\nu \end{cases}$$

Donc $F \cap G = \{(10\nu, 11\nu, 9\nu, 7\nu), \nu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((10, 11, 9, 7))$

Ainsi $F \cap G$ est la **droite vectorielle engendrée** par le vecteur $(10, 11, 9, 7)$.

Exemple 3.30 (Égalité entre deux s.e.v. de \mathbb{R}^3)

Dans le \mathbb{R} -e.v. $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

Soit $F = \text{Vect}((\vec{e}_1, \vec{e}_2))$ et $G = \text{Vect}((\vec{u}_1, \vec{u}_2))$.

- Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 étant des **combinaisons linéaires** des vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , on a l'**inclusion** $G \subset F$.
- Par ailleurs :
 - * La famille (\vec{e}_1, \vec{e}_2) étant extraite de la **base** \mathcal{B} , est **libre**.
Elle engendre par définition F , c'en est donc une **base** et $\dim(F) = 2$.
 - * La famille (\vec{u}_1, \vec{u}_2) étant composée de vecteurs **non colinéaires** est également **libre**.
Elle engendre par définition G , c'en est donc une **base** et $\dim(G) = 2$

Ainsi $\dim(F) = \dim(G)$.

En conclusion, on a l'**égalité** $F = G$.

Remarque : on observe que l'on a $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$, donc les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont réciproquement des **combinaisons linéaires** des vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , prouvant ainsi l'**inclusion inverse** $F \subset G$.

La théorie de la **dimension** permet d'éviter cette dernière vérification.

Proposition 3.31 (Supplémentarité et dimension)

Soit F et G deux s.e.v. d'un e.v. E de **dimension finie**.

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{\vec{0}\} \quad \text{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \quad \text{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

Proposition 3.32

Deux s.e.v. F et G d'un e.v. E de **dimension finie** sont **supplémentaires** ssi on peut former une **base** \mathcal{B}_E de E en accolant une base \mathcal{B}_F de F et une base \mathcal{B}_G de G : $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ et alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Une telle base de E obtenue en accolant une base de F et une base de G est dite **adaptée à la supplémentation** de F et G .

Théorème 3.33 (Existence de s.e.v. supplémentaires)

Soit E un e.v. de **dimension finie**.

Tout s.e.v. de E possède au moins un **supplémentaire** dans E .

Définition 3.34 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs d'un e.v.

On appelle **rang** de la famille \mathcal{F} , et on note $\text{rg}(\mathcal{F})$, la **dimension** du s.e.v. $\text{Vect}(\mathcal{F})$:
$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})).$$

Proposition 3.35 (Rang et dimension)

Soit \mathcal{F} une famille de p vecteurs d'un e.v. E .

- ① $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ avec égalité ssi \mathcal{F} est **libre**.
- ② Si E est de **dimension finie**,
 - $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi \mathcal{F} est **génératrice** de E ;
 - $\text{rg}(\mathcal{F}) = p = \dim(E)$ ssi \mathcal{F} est une **base** de E .

Proposition 3.36 (Opérations élémentaires)

Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs. On **ne modifie pas** le s.e.v. $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et donc **pas** le **rang** de \mathcal{F} lorsque l'on effectue l'une des opérations, dites **élémentaires**, suivantes :

- on **retire le vecteur nul** de \mathcal{F} si celui-ci apparaît ;
- on **change l'ordre** des vecteurs de \mathcal{F} ;
- on **multiplie** un vecteur de \mathcal{F} par un **scalaire non nul** ;
- on **ajoute** à un vecteur de \mathcal{F} une **combinaison linéaire** des autres.

Remarque 3.37 (Rang d'un système linéaire)

Soit (\mathcal{S}) le **système linéaire** de n équations à p inconnues suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Introduisons les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ où \vec{v}_j est le vecteur de \mathbb{K}^n de coordonnées (a_{1j}, \dots, a_{nj}) dans la base canonique de \mathbb{K}^n ainsi que le vecteur \vec{w} de coordonnées (b_1, \dots, b_n) . Dans ce contexte, l'**inconnue** du système (\mathcal{S}) est le **p -uplet** (x_1, x_2, \dots, x_p) de \mathbb{K}^p . Alors :

- le système (\mathcal{S}) est équivalent à la relation **vectorielle**

$$x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{w}$$

- (\mathcal{S}) admet **au moins** une solution **ssi** le vecteur \vec{w} est **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$. Dans ce cas, si de plus la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ est **libre**, alors cette solution est **unique** ;
- le **rang du système** (\mathcal{S}) est égal au **rang de la famille de vecteurs** $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$.

Définition 3.38 (Vecteurs échelonnés)

Soit E un e.v. de **dimension finie** et soit \mathcal{B} une base de E .

Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de E est dite **échelonnée relativement à la base \mathcal{B}** lorsque, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, l'écriture des coordonnées de \vec{v}_{k+1} dans la base \mathcal{B} commence par un nombre de zéros strictement plus grand que celui de \vec{v}_k , sauf si $\vec{v}_k = \vec{v}_{k+1} = 0$.

Proposition 3.39 (Vecteurs échelonnés et liberté)

Toute famille de vecteurs non nuls **échelonnée** relativement à une base est nécessairement **libre**.

Exemple 3.40

Plaçons-nous dans \mathbb{R}^4 rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ où $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Considérons les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v} = (0, 1, 2, 3)$, $\vec{w} = (0, 0, 0, 2)$, soit encore, écrits dans la base \mathcal{B} :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 \\ \vec{v} &= \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 \\ \vec{w} &= 2\vec{e}_4\end{aligned}$$

La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **échelonnée** relativement à \mathcal{B} , donc **libre**.

Proposition 3.41 (Polynômes échelonnés)

Une famille de polynômes non nuls de **degrés tous différents** est toujours **libre**.

Exemple 3.42 (Polynômes échelonnés)

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}_3[X]$ rapporté à la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.

La famille de polynômes $(X^3 + 2X^2 + 3X + 4, X^2 + 2X + 3, 2)$ est **échelonnée** relativement à \mathcal{B} , donc **libre**.

Théorème 3.43 (Méthode des zéros échelonnés)

Soit \mathcal{F}_1 une famille de vecteurs de E et \mathcal{B} une base de E .

On peut toujours transformer \mathcal{F}_1 en une famille \mathcal{F}_2 **échelonnée** relativement à \mathcal{B} par une succession d'**opérations élémentaires**.

Alors les vecteurs non nuls de \mathcal{F}_2 forment une **base** de $\text{Vect}(\mathcal{F}_1)$, et le **rang** de \mathcal{F}_1 est égal au nombre de vecteurs **non nuls** de \mathcal{F}_2 .

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que $\text{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système \mathcal{S} est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de \mathcal{S} , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

- ① Faisons apparaître des zéros sur la **première** ligne à partir de la **deuxième** colonne :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}'_1 & \vec{u}'_2 & \vec{u}'_3 & \vec{u}'_4 & \vec{u}'_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -14 & -14 & -5 & -19 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec $\vec{u}'_1 = \vec{u}_1$, $\vec{u}'_2 = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1$, $\vec{u}'_3 = \vec{u}_3 - 4\vec{u}_1$, $\vec{u}'_4 = \vec{u}_4 - \vec{u}_1$, $\vec{u}'_5 = \vec{u}_5 - 4\vec{u}_1$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que $\text{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système \mathcal{S} est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de \mathcal{S} , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

② Faisons apparaître des zéros sur la **deuxième** ligne à partir de la **troisième** colonne :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1'' & \vec{u}_2'' & \vec{u}_3'' & \vec{u}_4'' & \vec{u}_5'' \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -14 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec $\vec{u}_1'' = \vec{u}_1'$, $\vec{u}_2'' = \vec{u}_2'$, $\vec{u}_3'' = \vec{u}_3' - \vec{u}_2'$, $\vec{u}_4'' = 3\vec{u}_4' - \vec{u}_2'$, $\vec{u}_5'' = 3\vec{u}_5' - 4\vec{u}_2'$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que $\text{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système \mathcal{S} est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de \mathcal{S} , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

- ③ Le terme apparaissant à l'intersection des **troisième** ligne et **troisième** colonne étant nul, on permute par exemple les vecteurs \vec{u}_3'' et \vec{u}_5'' :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1'' & \vec{u}_2'' & \vec{u}_5'' & \vec{u}_4'' & \vec{u}_3'' \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que $\text{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système \mathcal{S} est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de \mathcal{S} , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

- 4 Faisons apparaître des zéros sur la **troisième** ligne à partir de la **quatrième** colonne :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1''' & \vec{u}_2''' & \vec{u}_3''' & \vec{u}_4''' & \vec{u}_5''' \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -14 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

avec $\vec{u}_1''' = \vec{u}_1''$, $\vec{u}_2''' = \vec{u}_2''$, $\vec{u}_3''' = \vec{u}_3''$, $\vec{u}_4''' = \vec{u}_4'' - \vec{u}_5''$, $\vec{u}_5''' = \vec{u}_3''$.

Exemple 3.44 (Méthode des zéros échelonnés)

Dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $E = \mathbb{K}^4$ rapporté à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ où

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, -1, 2, -4), \quad \vec{u}_3 = (4, 1, 2, 6), \quad \vec{u}_4 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (4, 0, 3, 1).$$

On remarque que $\text{Card}(\mathcal{S}) = 5 > 4 = \dim(E)$, le système \mathcal{S} est donc **lié**.

Pour déterminer le **rang** de \mathcal{S} , on dispose ses vecteurs sous forme d'un tableau :

$$\begin{array}{ccccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 & \vec{u}_5 \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4 \end{array} \end{array}$$

5 Ainsi,

$$\text{Vect}(\mathcal{S}) = \text{Vect}((\vec{u}_1''', \vec{u}_2''', \vec{u}_3''')) = \text{Vect}((\vec{u}_1, \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1, 3\vec{u}_5 - 4\vec{u}_2 - 4\vec{u}_1)).$$

La famille $((1, 1, 0, 5), (0, -3, 2, -14), (0, 0, 1, -1))$ est une **base** de $\text{Vect}(\mathcal{S})$ et alors

$$\text{rang}(\mathcal{S}) = 3.$$

De plus les égalités $\vec{u}_4''' = \vec{u}_5''' = \vec{0}$ conduisent progressivement à $\vec{u}_4'' - \vec{u}_5'' = \vec{u}_3'' = \vec{0}$, puis $\vec{u}_2' + \vec{u}_4' - \vec{u}_5' = \vec{u}_3' - \vec{u}_2' = \vec{0}$ et enfin

$$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u}_5 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4.$$

Systèmes linéaires

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/coursPC/chap11_Systemes_Lineaires_WEB.pdf

Systèmes linéaires

Quelques exercices

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_systemes_lineaires.pdf

Carrés magiques d'ordre 3

Aimé Lachal

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_carres_magiques_ordre3.pdf

Notions à retenir

- Espaces vectoriels
 - ★ Axiomes, calcul vectoriel
 - ★ Exemples canoniques
 - ★ Dimension
- Sous-espaces vectoriels
 - ★ Caractérisation
 - ★ Notion d'engendrement
 - ★ Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentarité
- Famille de vecteurs
 - ★ Familles libres, liées, génératrices, bases
 - ★ Dépendance, indépendance linéaires
 - ★ Rang, méthode des zéros échelonnés