Applications linéaires

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

Présentation

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On considère les applications entre E et F qui sont « compatibles » avec la structure d'**espace vectoriel**.
Ce sont les ***applications linéaires*** ; elles « transportent » les **combinaisons linéaires**.

Les plus simples sont les applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ de la forme $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$.

Elles vérifient les relations

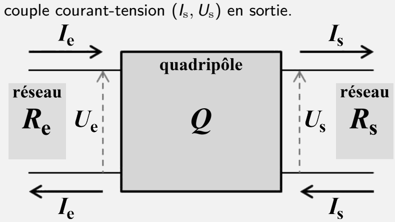
$$\forall x,y \in \mathbb{K},\ f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{et} \quad \forall \alpha, x \in \mathbb{K},\ f(\alpha x)=\alpha f(x).$$

De tels exemples se rencontrent dans diverses situations. Par exemple, pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

- en cinématique, la relation $x = vt$ exprime une dépendance ***linéaire*** entre déplacement x et temps t dans un mouvement rectiligne uniforme ;
- en mécanique, la loi de Hooke $F = k\Delta\ell$ exprime une dépendance ***linéaire*** entre allongement $\Delta\ell$ et force F générée par un ressort ;
- en électricité, les lois d'Ohm $U = RI$ et $Q = CU$ expriment des dépendances ***linéaires*** entre intensité I ou charge électrique Q et tension U dans un circuit électrique.

Présentation

Un autre exemple issu du domaine des circuits électriques concerne les quadripôles dits « ***linéaires*** » pour lesquels on dispose d'un couple courant-tension (I_e, U_e) en entrée et d'un couple courant-tension (I_s, U_s) en sortie.



Les lois de Kirchhoff expriment des relations ***linéaires*** entre ces deux couples :

$$\begin{cases} I_s = aI_e + bU_e \\ U_s = cI_e + dU_e \end{cases}$$

C'est un exemple d'***application linéaire*** de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ que l'on peut décrire selon

$$(I_s, U_s) = \Phi(I_e, U_e) \quad \text{avec} \quad \Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax+by, cx+dy) \end{array}$$

Présentation

De nombreux phénomènes de la nature sont modélisés par des relations entre diverses variables, notamment de la forme $y = f(x_1, \dots, x_n)$, f étant une fonction de n variables à valeurs réelles. De telles fonctions f sont en général très complexes et des approximations sont indispensables pour résoudre les problèmes concernés, lesquels sont qualifiés de manière vague de « ***non-linéaires*** ».

Le calcul différentiel propose dans cette direction des approximations des premier, deuxième, etc., ordres.
Une approximation du premier ordre au voisinage d'un point $\boldsymbol{x_0} = (x_1, \dots, x_n)$ est fournie par la **différentielle** de f, c'est typiquement une ***application linéaire*** d'une variable vectorielle $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$ définie par

$$d_{\boldsymbol{x_0}} f(\vec{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0})h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})h_n.$$

Notons qu'il ne s'agit en fait que d'une fonction polynomiale des n variables $h_1, \dots, h_n$ de degré 1 relativement à chacune d'elles sans terme constant, et qu'elle vérifie les relations, en la renotant plus simplement Φ :

$$\forall \vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n,\ \Phi(\vec{h}+\vec{k}) = \Phi(\vec{h}) + \Phi(\vec{k}) \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ \Phi(\alpha\vec{h}) = \alpha\Phi(\vec{h}).$$

Ces relations vont servir de définition pour une ***application linéaire*** dans un contexte vectoriel quelconque.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'on se donne deux $\mathbb{K}$-e.v. $(E, +_E, \cdot_E)$ et $(F, +_F, \cdot_F)$. Leurs vecteurs nuls seront notés respectivement $\vec{0}_E$ et $\vec{0}_F$.

Définition 1.1 (Applications linéaires)

*On dit qu'une application $f: E \longrightarrow F$ est **linéaire** si :*

1. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ f(\vec{u} +_E \vec{v}) = f(\vec{u}) +_F f(\vec{v})$
2. $\forall \vec{u} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha \cdot_E \vec{u}) = \alpha \cdot_F f(\vec{u})$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
*Un élément de $\mathcal{L}(E,E)$, noté plus simplement $\mathcal{L}(E)$, s'appelle un **endomorphisme** de E.*

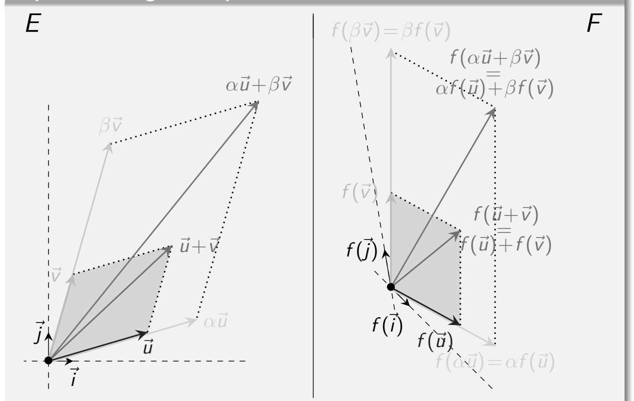
On peut aussi vérifier qu'une application est linéaire en une seule relation :

Proposition 1.2 (Stabilité par combinaison linéaire)

Soit f une application de E dans F.
$f \in \mathcal{L}(E,F) \iff \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u},\vec{v}) \in E^2,\ f(\alpha \cdot_E \vec{u} +_E \beta \cdot_E \vec{v}) = \alpha \cdot_F f(\vec{u}) +_F \beta \cdot_F f(\vec{v})$

N.B. Dans toute la suite, pour alléger les notations, on utilisera les mêmes symboles $+$ et $\cdot$ (ou rien) pour les lois relatives à E et F.

Représentation géométrique



Une application **linéaire** transforme les « **parallélogrammes** » en « **parallélogrammes** ».

Proposition 1.3 (Propriétés immédiates)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
- $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in E^n,\ f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\vec{u}_i)$

  En particulier : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \vec{u} \in E,\ f(n\vec{u}) = n\, f(\vec{u})$.

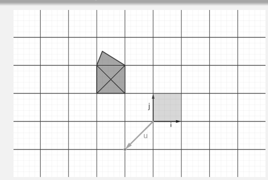
Exemple 1.4

1. Les **applications linéaires** de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont toutes de la forme $x \longmapsto ax$ où $a \in \mathbb{K}$.
2. Les **applications linéaires** de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$ sont toutes de la forme $(x,y) \longmapsto ax+by$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
3. Les **endomorphismes** de $\mathbb{K}^2$ sont tous de la forme $(x,y) \longmapsto (ax+by, cx+dy)$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$.
4. L'application « **dérivation** » $\varphi: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ entre les e.v. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ et continues définie par $\varphi(f) = f'$ est **linéaire**.
5. L'application « **intégration** » $\varphi: \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'e.v. $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ est **linéaire**.

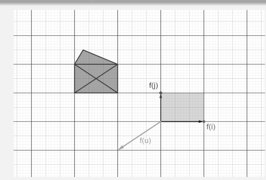
Définition 1.5 (Forme linéaire)

*Si $F = \mathbb{K}$ on dit que l'application linéaire est une **forme linéaire** sur E : $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.*

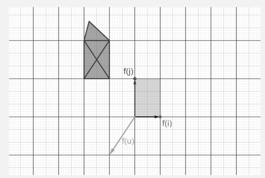
Exemple 1.6 (Quelques endomorphismes de $\mathbb{R}^2$)



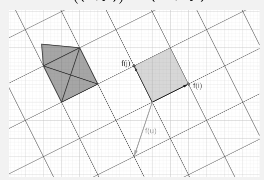
Espace de départ



Espace d'arrivée
$f((x,y)) = (3x, 2y)$

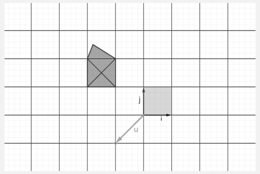


Espace d'arrivée
$f((x,y)) = (2x, 3y)$

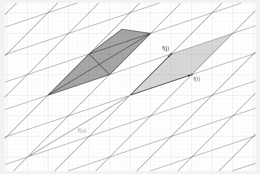


Espace d'arrivée
$f((x,y)) = (2x-y, x+2y)$

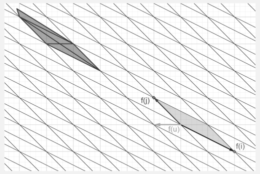
Exemple 1.7 (Quelques endomorphismes de $\mathbb{R}^2$)



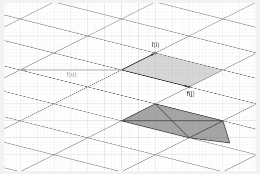
Espace de départ



Espace d'arrivée
$f\big((x,y)\big) = (3x+2y, x+2y)$



Espace d'arrivée
$f\big((x,y)\big) = (2x-y, -x+y)$



Espace d'arrivée
$f\big((x,y)\big) = (2x+4y, x-y)$

Proposition 1.8 (Structure d'e.v., composition)

1. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi un $\mathbb{K}$-e.v.*
   *Donc, toute **combinaison linéaire** d'**applications linéaires** est encore **linéaire**.*
2. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.*
   *Autrement dit, la **composée** de deux **applications linéaires** est encore **linéaire**.*
3. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est **bijective** alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*
   *Autrement dit, la **réciproque** d'une **bijection linéaire** est encore **linéaire**.*

Définition 1.9 (Isomorphisme, automorphisme)

1. *Toute application **linéaire bijective** de E dans F s'appelle un **isomorphisme** de E sur F.*
   *S'il existe un isomorphisme de E sur F, on dit que E et F sont **isomorphes**.*
2. *Tout **endomorphisme bijectif** de E s'appelle un **automorphisme** de E.*

Exemple 1.10 (Homothéties vectorielles)

On appelle **homothétie vectorielle** de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $h_\lambda : E \longmapsto E$ définie par $h_\lambda(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. C'est un **endomorphisme** de E.

1. Une **homothétie vectorielle** de $\mathcal{L}(E)$ **commute** avec tout $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $h_\lambda \circ h_\mu = h_\mu \circ h_\lambda = h_{\lambda\mu}$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, h_λ est un **automorphisme** de E et $(h_\lambda)^{-1} = h_{1/\lambda}$.

Définition 2.1 (Image directe/réciproque)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, A une partie de E et B une partie de F.

1. *L'**image (directe)** de A par f est l'ensemble*
$$f(A) = \{\vec{v} \in F : \exists\, \vec{u} \in A,\ \vec{v} = f(\vec{u})\} = \{f(\vec{u}), \vec{u} \in A\}.$$
   *C'est l'ensemble des **images** dans F des vecteurs de A par f.*
2. *L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble*
$$f^{-1}(B) = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) \in B\}.$$
   *C'est l'ensemble des **antécédents** dans E des vecteurs de B par f.*

Une propriété importante de conservation de la structure d'e.v. par les applications linéaires :

Proposition 2.2 (Image d'un s.e.v)

*Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, G un **s.e.v.** de E et H un **s.e.v.** de F.*
*Alors $f(G)$ est un **s.e.v.** de F et $f^{-1}(H)$ est un **s.e.v.** de E.*

Définition 2.3 (Image/Noyau)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. *On appelle **image** de f le s.e.v. $f(E)$ de F que l'on note $\mathrm{Im}\,(f)$.*
2. *On appelle **noyau** de f le s.e.v. $f^{-1}(\{\vec{0}_F\})$ de E que l'on note $\mathrm{Ker}\,(f)$:*
$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{\vec{u} \in E : f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$$

En particulier : $\vec{0}_E \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $\vec{0}_F \in \mathrm{Im}\,(f)$.

On peut caractériser la **surjectivité** et l'**injectivité** d'une application linéaire :

Théorème 2.4 (Injectivité/Surjectivité)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. *f est **surjective** ssi $\mathrm{Im}\,(f) = F$.*
2. *f est **injective** ssi $\mathrm{Ker}\,(f) = \{\vec{0}_E\}$.*

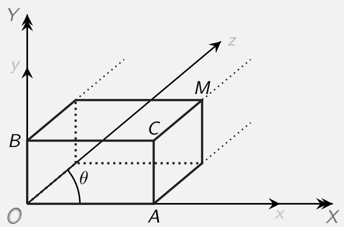
Remarque 2.5 (Principe de superposition)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\vec{b} \in F$. Si $\vec{b} \in \mathrm{Im}\,(f)$ et si $\vec{u}_p$ est une solution particulière de l'équation $f(\vec{u}) = \vec{b}$, alors les solutions de cette équation sont les vecteurs de E de la forme $\vec{u}_p + \vec{u}_h$ où $\vec{u}_h$ décrit $\mathrm{Ker}\,(f)$.

Exemple 2.6 (Perspective cavalière)

La **perspective cavalière** désigne un mode de représentation $2D$ des objets $3D$.

Notons $Oxyz$ les axes de l'espace $3D$ des objets observés et OXY ceux du plan $2D$ de représentation.
Ce dernier est le plan frontal de représentation, il coïncide avec le plan d'axes Oxy.
L'axe Oz tracé en oblique représente la ligne de fuite qui est repérée dans le plan de représentation par un angle θ par rapport à l'axe horizontal OX (coïncidant avec Ox).
La **perspective cavalière** a pour particularité de conserver les **lignes de fuite parallèles**.
On introduit un **coefficient de profondeur** $\rho \in]0,1[$ dans la direction Oz.

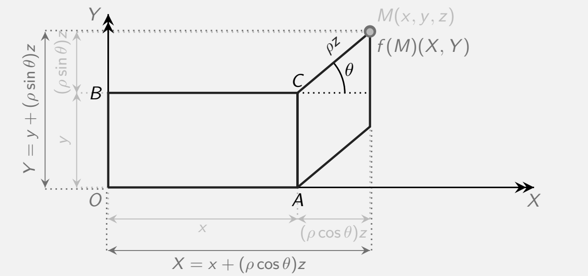


Exemple 2.6 (Perspective cavalière)

Modélisation analytique : à tout point M de l'espace $3D$ de coordonnées (x,y,z) on calcule les coordonnées (X,Y) correspondantes dans le plan $2D$ de représentation.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \big(x + (\rho\cos\theta)z, y + (\rho\sin\theta)z\big) \end{array}$$

La correspondance f est une **application linéaire** du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ vers le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^2$.

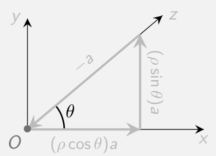


Exemple 2.6 (Perspective cavalière)

Étudions l'**injectivité** et la **surjectivité** de f :

- On a $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y,0) = (x,y)$, donc tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{R}^3$ par f.
  On a ainsi $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$. L'application f est **surjective**.
  La représentation recouvre tout le plan $2D$.
- $$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x + (\rho\cos\theta)z, y + (\rho\sin\theta)z) = (0,0)\} \\ &= \{\big(-(\rho\cos\theta)z, -(\rho\sin\theta)z, z\big),\ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, -1)\big) \end{aligned}$$
  donc $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \{(0,0,0)\}$. L'application f **n'est pas injective**.

  Tous les points de l'espace $3D$ alignés sur certaines droites ne sont pas discernables dans la représentation.
  Par exemple, tous les points de l'espace $3D$ de coordonnées $\big((\rho\cos\theta)a, (\rho\sin\theta)a, -a\big)$ admettent la même représentation dans le plan $2D$ (l'origine O de coordonnées $(0,0)$).



Exemple 2.7 (Dérivation/intégration)

1. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, considérons les applications $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto \int_0^{\cdot} f \end{array}$
   ($\int_0^{\cdot} f$ est la fonction $x \longmapsto \int_0^x f$).
   - φ et ψ sont des **endomorphismes** de E.
   - $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est le s.e.v. des fonctions constantes et $\mathrm{Im}\,(\varphi) = E$
     donc φ est **surjective** mais **pas injective.**
   - $\mathrm{Ker}\,(\psi) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\,(\psi)$ est le s.e.v. des fonctions s'annulant en 0
     donc ψ est **injective** mais **pas surjective.**
   - On a $\forall\, f \in E$, $(\varphi \circ \psi)(f) = \left(\int_0^{\cdot} f\right)' = f$ et $(\psi \circ \varphi)(f) = \int_0^{\cdot} f' = f - f(0)$
     donc $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$ (mais $\psi \circ \varphi \neq \mathrm{Id}_E$).
2. Le sous-ensemble $E_0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$ est un s.e.v. de E.
   Considérons à présent les applications $\varphi_0 : \begin{array}{l} E_0 \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{array}$ et $\psi_0 : \begin{array}{l} E \longrightarrow E_0 \\ f \longmapsto \int_0^{\cdot} f \end{array}$.

   Dans ce contexte, on a $\varphi_0 \circ \psi_0 = \mathrm{Id}_E$ et $\psi_0 \circ \varphi_0 = \mathrm{Id}_{E_0}$.
   Ainsi φ_0 et ψ_0 sont des **isomorphismes** réciproques l'un de l'autre.

Exemple 2.8 (Équation différentielle linéaire du 1er ordre)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Considérons l'**équation différentielle**

$$(\mathcal{E}) : \quad u'(t) + au(t) = g(t), \quad t \in I$$

On introduit l'**application linéaire** Φ entre les $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ et continues sur I définie par

$$\Phi : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ f \longmapsto f' + af \end{array}$$

- $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$ est l'ensemble des solutions de l'**équation homogène associée** à $(\mathcal{E})$:
$$u'(t) + au(t) = 0$$
  C'est la **droite vectorielle** des fonctions $t \longmapsto \lambda e^{-at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Puis, l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrivant $\Phi(f) = g$, en notant u_p une solution particulière de $(\mathcal{E})$, son ensemble de solutions est donné par
$$\mathcal{S} = \mathrm{Ker}\,(\Phi) + u_p = \{u + u_p,\ u \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)\}$$
  On retrouve ainsi un **principe de superposition**.

Exemple 2.9 (Équation différentielle linéaire du 2e ordre)

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Considérons l'**équation différentielle**

$$(\mathcal{E}) : \quad u''(t) + \omega^2 u(t) = g(t), \quad t \in I$$

On introduit l'**application linéaire** Φ entre les $\mathbb{R}$-e.v. $E = \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions réelles respectivement de classe $\mathcal{C}^2$ et continues sur I définie par

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f'' + \omega^2 f \end{aligned}$$

- $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$ est l'ensemble des solutions de l'**équation homogène associée** à $(\mathcal{E})$:

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

  C'est le **plan vectoriel** des fonctions $t \longmapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Puis, l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrivant $\Phi(f) = g$, en notant u_p une solution particulière de $(\mathcal{E})$, son ensemble de solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \mathrm{Ker}\,(\Phi) + u_p = \{u + u_p,\ u \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)\}$$

  On retrouve de nouveau un **principe de superposition**.

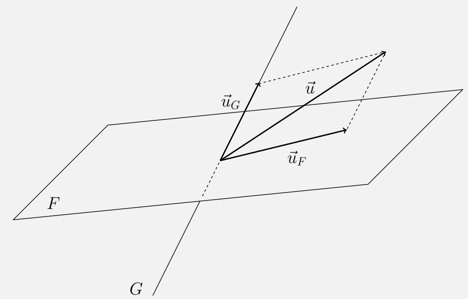
Proposition 2.10 (Image d'une famille de vecteurs)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E.
Notons $f(\mathcal{F}) = \big(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)\big)$ la famille-image de $\mathcal{F}$ par f.

1. *Si $\mathcal{F}$ est **liée** alors $f(\mathcal{F})$ est **liée**.*
2. *Supposons la famille $\mathcal{F}$ **libre** dans E.*
   *Si f est **injective** alors $f(\mathcal{F})$ est **libre** dans F.*
3. *Supposons la famille $\mathcal{F}$ **génératrice** de E.*
   *Si f est **surjective** alors $f(\mathcal{F})$ est une famille **génératrice** de F.*
4. *Si $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ alors $f(G) = \mathrm{Vect}\big(f(\mathcal{F})\big)$.*
   *En particulier pour $G = E$, si $\mathcal{F}$ est une **base** de E, alors $f(\mathcal{F})$ est une famille **génératrice** de $\mathrm{Im}\,(f)$.*

Définition 3.1 (Projection)

Soit F et G deux s.e.v. supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.
*Tout vecteur $\vec{u} \in E$ se décomposant de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ où $\vec{u}_F \in F$ et $\vec{u}_G \in G$, on appelle **projection vectorielle sur F parallèlement à G**, l'application $p : E \longrightarrow E$ définie par $p(\vec{u}) = \vec{u}_F$.*



Théorème 3.2 (Propriétés)

*Soit p la **projection vectorielle** sur F parallèlement à G dans $E = F \oplus G$.*
Alors :

1. *p est un endomorphisme de E et $p \circ p = p$ (on dit que p est **idempotent**).*
2. *$F = \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(p)$.*
   *F est l'ensemble des vecteurs **invariants** par p : $F = \{\vec{u} \in E : p(\vec{u}) = \vec{u}\}$.*

On a la réciproque suivante.

Théorème 3.3 (Caractérisation)

*Tout endomorphisme **idempotent** p de E est la **projection vectorielle** sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$, sous-espaces alors supplémentaires dans E :*

$$E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E)$$

Remarque 3.4

En revanche, il ne suffit pas d'avoir $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$ pour dire que f est une projection.

Exemple 3.5 (Détermination d'une projection)

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère le plan vectoriel P d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et la droite vectorielle D de vecteur directeur $(1, 1, 1)$. D a pour équations $x = y = z$.

Déterminons la **projection vectorielle** p sur le plan P parallèlement à la droite D.

1. On vérifie tout d'abord que P et D sont supplémentaires dans E : ceci est dû à $P \cap D = \{(0, 0, 0)\}$ et $\dim(P) + \dim(D) = \dim(E)$.
2. Pour tout vecteur (x, y, z) de E, notons (x', y', z') son image par p : $(x', y', z') = p(x, y, z)$.
3. Le vecteur (x', y', z') est caractérisé par les deux conditions

$$\begin{cases} (x', y', z') \in P \\ (x, y, z) - (x', y', z') \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x' - 2y' + 3z' = 0 \\ x' - y' = x - y \\ x' - z' = x - z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + 2y - 3z) \\ y = \frac{1}{2}(-x + 4y - 3z) \\ z = \frac{1}{2}(-x + 2y - z) \end{cases}$$

4. En conclusion, p est définie analytiquement par

$$\begin{aligned} p : \quad E &\longrightarrow E \\ (x, y, z) &\longmapsto \big(\tfrac{1}{2}(x + 2y - 3z), \tfrac{1}{2}(-x + 4y - 3z), \tfrac{1}{2}(-x + 2y - z)\big) \end{aligned}$$

Exemple 3.6 (Identification d'une projection)

Considérons l'endomorphisme p du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ suivant :

$$\begin{aligned} p : \quad E &\longrightarrow E \\ (x, y, z) &\longmapsto (3x - 2y + 8z, -x + 2y - 4z, -x + y - 3z) \end{aligned}$$

1. On vérifie que $p \circ p = p$ donc p est une **projection vectorielle** de E.
2. Déterminons le noyau de p. Soit $(x, y, z) \in E$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,(p) \iff \begin{cases} 3x - 2y + 8z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

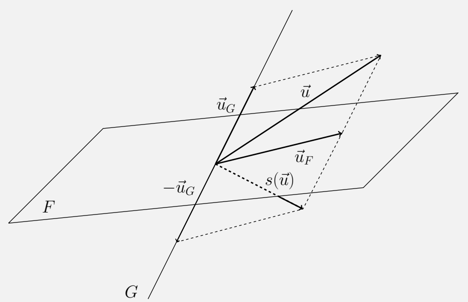
   Donc $\mathrm{Ker}\,(p) = \{(-2\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   C'est la **droite vectorielle** D engendrée par le vecteur $(-2, 1, 1)$.
3. Déterminons les **invariants** de p. Soit $(x, y, z) \in E$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} 3x - 2y + 8z = x \\ -x + 2y - 4z = y \\ -x + y - 3z = z \end{cases} \iff x - y + 4z = 0$$

   Donc
   $\mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E) = \{(x, y, z) \in E : x - y + 4z = 0\} = \{(\lambda, \lambda + 4\mu, \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
   C'est le **plan vectoriel** P engendré par $(1, 1, 0)$ et $(0, 4, 1)$.
4. En conclusion, p est la **projection vectorielle sur P parallèlement à D.**

Définition 3.7 (Symétrie)

Soit F et G deux s.e.v. supplémentaires dans E.
*Tout vecteur $\vec{u} \in E$ se décomposant de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ où $\vec{u}_F \in F$ et $\vec{u}_G \in G$, on appelle **symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G**, l'application $s : E \longrightarrow E$ définie par $s(\vec{u}) = \vec{u}_F - \vec{u}_G$.*



Théorème 3.8 (Propriétés)

Soit s la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G dans $E = F \oplus G$.
Alors :

1. *s est un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (on dit que s est **involutif**) et $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, p étant la projection sur F parallèlement à G.*
2. *$F = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.*
   *F et G sont les ensembles des vecteurs **invariants** et **anti-invariants** par s :*

$$F = \{\vec{u} \in E : s(\vec{u}) = \vec{u}\} \quad \text{et} \quad G = \{\vec{u} \in E : s(\vec{u}) = -\vec{u}\}$$

On a la réciproque suivante.

Théorème 3.9 (Caractérisation)

*Tout endormorphisme **involutif** s de E est la **symétrie vectorielle** par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$, sous-espaces alors supplémentaires dans E :*

$$E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$$

Théorème 4.1 (Image d'une base)

*On suppose E de **dimension finie** n et F de dimension quelconque.*
*Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une **base** de E.*
Notons $\varphi(\mathcal{B}) = \big(\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n)\big)$ la famille-image de $\mathcal{B}$ par φ.
Alors :

1. *la famille $\varphi(\mathcal{B})$ est **libre** dans F ssi φ est **injective** ;*
2. *la famille $\varphi(\mathcal{B})$ est **génératrice** dans F ssi φ est **surjective** ;*
3. *la famille $\varphi(\mathcal{B})$ est une **base** de F ssi φ est un **isomorphisme**.*
   *Dans ce cas, on dit que E et F sont **isomorphes**.*

Corollaire 4.2 (Injectivité/surjectivité et dimension)

*On suppose E et F de **dimensions finies**. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$*
Alors :

1. *si φ est **injective** alors $\dim F \geqslant \dim E$.*
   *Par contraposition : si $\dim F < \dim E$, alors φ est **non injective** ;*
2. *si φ est **surjective** alors $\dim F \leqslant \dim E$.*
   *Par contraposition : si $\dim F > \dim E$, alors φ est **non surjective** ;*
3. *s'il existe un **isomorphisme** de E sur F alors $\dim F = \dim E$.*

Théorème 4.3 (Détermination d'une application linéaire)

*On suppose E de **dimension finie** n et F de dimension quelconque.*
Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Alors :

1. *si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie $\varphi(\vec{e}_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors φ est l'application **nulle ;***
2. *si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifient $\varphi(\vec{e}_i) = \psi(\vec{e}_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $\varphi = \psi$. Autrement dit, si φ et ψ **coïncident sur une base** alors elles sont **égales ;***
3. *soit $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ des vecteurs de F. Alors, il existe une **unique application linéaire** $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.*

On peut résumer ce résultat en une phrase :
*si l'espace de départ est de **dimension finie**, une application linéaire est **entièrement déterminée** par la donnée des **images d'une base**.*

Théorème 4.4 (Représentation analytique)

*On suppose E et F de **dimensions finies** respectives n et m.*
Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$ une base de F et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Notons pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i$.

Si le vecteur $\vec{u} \in E$ a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à $\mathcal{B}_E$, alors son image par φ est le vecteur $\varphi(\vec{u}) \in F$ de coordonnées $(y_1, \dots, y_m)$ par rapport à $\mathcal{B}_F$ où pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Cela s'écrit explicitement :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

*Le système précédent s'appelle la **représentation analytique** de φ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.*

Corollaire 4.5 (Applications linéaires canoniques)

*Les applications linéaires des $\mathbb{K}$-e.v. **canoniques** $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont de la forme*

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \right) \in \mathbb{K}^m \text{ où les } a_{ij} \text{ sont des scalaires de } \mathbb{K}.$$

*Il est parfois commode d'écrire la correspondance sous la forme abusive (cf. le cours de calcul différentiel de 2[e] année, calcul de matrice **jacobienne**)*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 4.6 (Applications linéaires canoniques entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)

Les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$, et de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ sont de la forme

- $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (ax + by, cx + dy, ex + fy) \in \mathbb{R}^3$
- $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (ax + by + cz, dx + ey + fz) \in \mathbb{R}^2$

où les a, b, c, d, e, f sont des scalaires réels.

Définition 4.7 (Matrice d'une application linéaire)

On suppose E et F de **dimensions finies** respectives n et m.
Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$ une base de F et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$**, le tableau de nombres à m lignes et n colonnes, noté $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ (ou $[\varphi]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$), obtenu en écrivant en **colonnes** les coordonnées des vecteurs $\varphi(\vec{e}_j)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, dans la base $\mathcal{B}_F$.

Ainsi, si pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i$,

$$\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(\vec{e}_1) & \cdots & \varphi(\vec{e}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{array}$$

On note cette matrice plus concisément $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
Usuellement, i est l'indice de **ligne** et j est l'indice de **colonne**.
On dit que c'est une matrice de **taille** (ou **dimension**) (m, n) ou encore de **type** $m \times n$.
Cette **matrice** contient toute l'information de l'application linéaire φ.

Définition 4.7 (Matrice d'une application linéaire)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs génériques de E et F respectivement :

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{f}_i$$

Définissons également les **matrices-colonnes** des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relativement aux bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$:

$$X = \mathcal{M}(\vec{u}, \mathcal{B}_E) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \mathcal{M}(\vec{v}, \mathcal{B}_F) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Posons

$$A = \mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Au regard de la **représentation analytique** de φ, on définit le **produit matriciel** de A par X selon

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

La relation $\vec{v} = \varphi(\vec{u})$ s'écrit alors de manière concise $\boxed{Y = AX}$.

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (début))

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.
On rappelle que $\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$ et $\vec{f}_1 = (1, 0, 0), \vec{f}_2 = (0, 1, 0), \vec{f}_3 = (0, 0, 1)$.
Considérons les applications linéaires φ et ψ définies par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, x - y, x + 2y) \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - y - z) \end{array}$$

1. On a

$$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi(1, 0) = (2, 1, 1) = 2\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$$
$$\varphi(\vec{e}_2) = \varphi(0, 1) = (1, -1, 2) = \vec{f}_1 - \vec{f}_2 + 2\vec{f}_3$$

et

$$\psi(\vec{f}_1) = \psi(1, 0, 0) = (1, 1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$
$$\psi(\vec{f}_2) = \psi(0, 1, 0) = (1, -1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$
$$\psi(\vec{f}_3) = \psi(0, 0, 1) = (1, -1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

On obtient alors les **matrices** de φ et ψ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$:

$$\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(\psi, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (début))

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.
On rappelle que $\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$ et $\vec{f}_1 = (1, 0, 0), \vec{f}_2 = (0, 1, 0), \vec{f}_3 = (0, 0, 1)$.
Considérons les applications linéaires φ et ψ définies par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, x - y, x + 2y) \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - y - z) \end{array}$$

1. ***Remarque :*** il est judicieux de réécrire (abusivement) φ et ψ sous la forme

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x + & y \\ x - & y \\ x + & 2y \end{pmatrix} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y - z \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient alors directement les **matrices** de φ et ψ à l'aide des coefficients apparaissant devant les variables x, y pour φ et x, y, z pour ψ.

Composition et matrices

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n, p, q,
$\mathcal{B}_E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, $\mathcal{B}_F = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p\}$, $\mathcal{B}_G = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q\}$ des bases de E, F, G.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(F, G)$, $\psi \in \mathcal{L}(E, F)$. On sait que $\varphi \circ \psi \in \mathcal{L}(E, G)$.
La situation est schématisée par le diagramme suivant dans lequel on a mis en indice les dimensions des espaces vectoriels :

$$(E_n, \mathcal{B}_E) \xrightarrow{\psi} (F_p, \mathcal{B}_F) \xrightarrow{\varphi} (G_q, \mathcal{B}_G)$$
$$\underset{\varphi \circ \psi}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}}$$

On va exprimer la **matrice** de $\varphi \circ \psi$ à l'aide des **matrices** de φ et ψ.
Introduisons les **matrices** de $\varphi, \psi, \varphi \circ \psi$ relatives aux bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$:

$$A = \mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \qquad \varphi(\vec{f}_k) = \sum_{i=1}^{q} a_{ik} \vec{g}_i, \quad 1 \leqslant k \leqslant p$$

$$B = \mathcal{M}(\psi; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \qquad \psi(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} \vec{f}_k, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$C = \mathcal{M}(\varphi \circ \psi; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = (c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \qquad (\varphi \circ \psi)(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{q} c_{ij} \vec{g}_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

Composition et matrices

On a alors

$$(\varphi \circ \psi)(\vec{e}_j) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj} \vec{f}_k \right) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} \varphi(\vec{f}_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} \left(\sum_{i=1}^{q} a_{ik} \vec{g}_i \right) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right) \vec{g}_i$$

d'où l'on tire

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{array}}$$

La relation ci-dessus définit une matrice C appelée **produit** des matrices A et B qui est notée $A \times B$ ou encore AB.
On a ainsi obtenu la **matrice** de la **composée** de deux applications linéaires.

Proposition 4.9 (Matrice d'une composée)

*Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **dimension finie** et $\varphi \in \mathcal{L}(F, G), \psi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a*

$$\mathcal{M}(\varphi \circ \psi; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \times \mathcal{M}(\psi; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$$

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (suite))

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{e}_2=(0,1)$ et $\vec{f}_1=(1,0,0)$, $\vec{f}_2=(0,1,0)$, $\vec{f}_3=(0,0,1)$.

Considérons les applications linéaires φ et ψ définies par

$$\varphi:\begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&F\\(x,y)&\longmapsto&(2x+y,x-y,x+2y)\end{array}\qquad\psi:\begin{array}{rcl}F&\longrightarrow&E\\(x,y,z)&\longmapsto&(x+y+z,x-y-z)\end{array}$$

❷ Déterminons les **composées** $\psi\circ\varphi\in\mathcal{L}(E)$ et $\varphi\circ\psi\in\mathcal{L}(F)$:

Méthode analytique :

- $(\psi\circ\varphi)(x,y)=\psi(2x+y,x-y,x+2y)=(4x+2y,0)$
  $(\varphi\circ\psi)(x,y,z)=\varphi(3x+y+z,x-y-z)=(3x+y+z,2y+2z,3x-y-z)$
- En réécrivant (abusivement) $\psi\circ\varphi$ et $\varphi\circ\psi$ sous la forme

$$\psi\circ\varphi:\begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&F\\(x,y)&\longmapsto&\begin{pmatrix}4x+2y\\0\end{pmatrix}\end{array}\qquad\varphi\circ\psi:\begin{array}{rcl}F&\longrightarrow&E\\(x,y,z)&\longmapsto&\begin{pmatrix}3x+y+z\\2y+2z\\3x-y-z\end{pmatrix}\end{array}$$

  on obtient leur **matrice** :

$$\mathcal{M}(\psi\circ\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E)=\begin{pmatrix}4&2\\0&0\end{pmatrix}\qquad\mathcal{M}(\varphi\circ\psi,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_F)=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&2\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (suite))

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{e}_2=(0,1)$ et $\vec{f}_1=(1,0,0)$, $\vec{f}_2=(0,1,0)$, $\vec{f}_3=(0,0,1)$.

Considérons les applications linéaires φ et ψ définies par

$$\varphi:\begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&F\\(x,y)&\longmapsto&(2x+y,x-y,x+2y)\end{array}\qquad\psi:\begin{array}{rcl}F&\longrightarrow&E\\(x,y,z)&\longmapsto&(x+y+z,x-y-z)\end{array}$$

❷ Déterminons les **composées** $\psi\circ\varphi\in\mathcal{L}(E)$ et $\varphi\circ\psi\in\mathcal{L}(F)$:

Méthode matricielle :

- Par **produit matriciel** :

$$\mathcal{M}(\psi\circ\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E)=\mathcal{M}(\psi,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E)\times\mathcal{M}(\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(\varphi\circ\psi,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_F)=\mathcal{M}(\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\times\mathcal{M}(\psi,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E)=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&2\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (suite))

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{e}_2=(0,1)$ et $\vec{f}_1=(1,0,0)$, $\vec{f}_2=(0,1,0)$, $\vec{f}_3=(0,0,1)$.

Considérons les applications linéaires φ et ψ définies par

$$\varphi:\begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&F\\(x,y)&\longmapsto&(2x+y,x-y,x+2y)\end{array}\qquad\psi:\begin{array}{rcl}F&\longrightarrow&E\\(x,y,z)&\longmapsto&(x+y+z,x-y-z)\end{array}$$

❷ Déterminons les **composées** $\psi\circ\varphi\in\mathcal{L}(E)$ et $\varphi\circ\psi\in\mathcal{L}(F)$:

Méthode matricielle :

- Par **produit matriciel** :

$$\mathcal{M}(\psi\circ\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E)\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+2y\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(\varphi\circ\psi,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_F)\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&2\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y+z\\2y+2z\\3x-y-z\end{pmatrix}$$

  on retrouve les expressions **analytiques** :

$$(\psi\circ\varphi)(x,y)=(4x+2y,0)$$
$$(\varphi\circ\psi)(x,y,z)=(3x+y+z,2y+2z,3x-y-z)$$

Proposition-définition 4.10 (Rang d'une application linéaire)

*On suppose E de **dimension finie** n, F de dimension quelconque et $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$.*

*Alors $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est de **dimension finie**. Sa dimension est appelée le **rang** de φ et notée $\mathrm{rg}(\varphi)$.*

*Ainsi, si $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E, puisque $\mathrm{Im}\,(\varphi)=\mathrm{Vect}\big(\varphi(\vec{e}_1),\dots,\varphi(\vec{e}_n)\big)$, $\mathrm{rg}(\varphi)$ est le **rang** de la famille de vecteurs $(\varphi(\vec{e}_1),\dots,\varphi(\vec{e}_n))$:*

$$\mathrm{rg}(\varphi)=\mathrm{rg}\big(\varphi(\vec{e}_1),\dots,\varphi(\vec{e}_n)\big)$$

Proposition 4.11 (Propriétés immédiates)

*On suppose E de **dimension finie**, F de dimension quelconque et $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$.*

❶ $\mathrm{rg}(\varphi)\leqslant\dim E$, *avec égalité ssi φ est **injective**.*

❷ $\mathrm{rg}(\varphi)\leqslant\dim F$, *avec égalité ssi φ est **surjective**.*

❸ $\mathrm{rg}(\varphi)=\dim E=\dim F$ *ssi φ est un **isomorphisme**.*

Proposition 4.12 (Composition et rang)

*Soit E, F des $\mathbb{K}$-e.v. de **dimensions finies** et G un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque.*

Soit $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\psi\in\mathcal{L}(F,G)$.

Alors :

$$\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi)\leqslant\min(\mathrm{rg}(\varphi),\mathrm{rg}(\psi)).$$

De plus :

❶ *si φ est **surjective** alors $\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi)=\mathrm{rg}(\psi)$;*

❷ *si ψ est **injective** alors $\mathrm{rg}(\psi\circ\varphi)=\mathrm{rg}(\varphi)$.*

Corollaire 4.13 (Composition par un isomorphisme)

*On **ne modifie pas le rang** d'une application linéaire en composant celle-ci avec un **isomorphisme**.*

Théorème 4.14 (Théorème du rang)

*On suppose E de **dimension finie**, F de dimension quelconque et $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$.*

Si G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ dans E alors $\varphi_{|G}:G\longrightarrow\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est un isomorphisme.

En particulier :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}\,(\varphi)\big)+\mathrm{rg}(\varphi)=\dim(E).$$

Corollaire 4.15 (Équivalence injectivité/surjectivité)

*On suppose E et F de **même dimension finie** et $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

$$\varphi \text{ est } \textbf{injective} \iff \varphi \text{ est } \textbf{surjective} \iff \varphi \text{ est un } \textbf{isomorphisme}$$

*En particulier, ces équivalences sont vérifiées pour tout **endomorphisme** φ de E.*

Théorème 4.16 (Espaces isomorphes)

*Deux e.v. de **dimension finie** sont **isomorphes** ssi ils ont la **même dimension**.*

*Ainsi, tous les $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension finie n** sont **isomorphes à $\mathbb{K}^n$**.*

Démonstration du théorème du rang

- On part d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ que l'on complète en une base $\mathcal{B}'$ de E :
  en posant $p=\dim\big(\mathrm{Ker}\,(\varphi)\big)$ et $n=\dim(E)$, on note $\mathcal{B}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p)$, puis
  $$\mathcal{B}'=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-p})$$
- Alors la famille $\varphi(\mathcal{B}')$ est **génératrice** de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$:
  $$\varphi(\mathcal{B}')=\big(\varphi(\vec{u}_1),\dots,\varphi(\vec{u}_p),\varphi(\vec{v}_1),\dots,\varphi(\vec{v}_{n-p})\big)$$
  et elle reste génératrice si on lui retire les vecteurs nuls correspondant à $\varphi(\mathcal{B})$: $\varphi(\vec{u}_1)=\dots=\varphi(\vec{u}_p)=\vec{0}_F$.
- On obtient donc une famille $\mathcal{B}''$ **génératrice** de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$:
  $$\mathcal{B}''=\big(\varphi(\vec{v}_1),\dots,\varphi(\vec{v}_{n-p})\big)$$
- Enfin la famille $\mathcal{B}''$ est **libre** : si $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-p}$ sont des scalaires,
  $$\alpha_1\varphi(\vec{v}_1)+\dots+\alpha_{n-p}\varphi(\vec{v}_{n-p})=\vec{0}_F\implies\varphi(\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_{n-p}\vec{v}_{n-p})=\vec{0}_F$$
  $$\implies\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_{n-p}\vec{v}_{n-p}\in\mathrm{Ker}\,(\varphi)$$
  Le vecteur $\vec{v}$ est donc combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$: il existe alors des scalaires $\beta_1,\dots,\beta_p$ tels que $\beta_1\vec{u}_1+\dots+\beta_p\vec{u}_p=\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_{n-p}\vec{v}_{n-p}$.
  On dispose ainsi d'une combinaison linéaire entre les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$, ses coefficients sont alors tous nuls, et en particulier : $\alpha_1=\dots=\alpha_{n-p}=0$.
- En conséquence, la famille $\mathcal{B}''$ est une **base** de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ de cardinal $n-p=\dim(E)-\dim\big(\mathrm{Ker}\,(\varphi)\big)$ qui coïncide ainsi avec le **rang** de φ : $\mathrm{rg}(\varphi)=n-p$.

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (fin))

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{e}_2=(0,1)$ et $\vec{f}_1=(1,0,0)$, $\vec{f}_2=(0,1,0)$, $\vec{f}_3=(0,0,1)$.

Considérons les applications linéaires φ et ψ définies par

$$\varphi:\begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&F\\(x,y)&\longmapsto&(2x+y,x-y,x+2y)\end{array}\qquad\psi:\begin{array}{rcl}F&\longrightarrow&E\\(x,y,z)&\longmapsto&(x+y+z,x-y-z)\end{array}$$

❸ Déterminons les **noyaux** de φ et ψ :

- $$(x,y)\in\mathrm{Ker}\,(\varphi)\iff(2x+y,x-y,x+2y)=(0,0,0)$$
  $$\iff(x,y)=(0,0)$$
  Donc $\mathrm{Ker}\,(\varphi)=\{(0,0)\}$ et φ est **injective**.
- $$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}\,(\psi)\iff(x+y+z,x-y-z)=(0,0)$$
  $$\iff x=0 \text{ et } y+z=0$$
  $$\iff(x,y,z)=(0,y,-y)=y(0,1,-1)$$
  Donc $\mathrm{Ker}\,(\psi)=\mathrm{Vect}\big((0,1,-1)\big)\neq\{(0,0)\}$ et ψ **n'est pas injective**.

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (fin))

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{e}_2=(0,1)$ et $\vec{f}_1=(1,0,0)$, $\vec{f}_2=(0,1,0)$, $\vec{f}_3=(0,0,1)$.

Considérons les applications linéaires φ et ψ définies par

$$\varphi:\begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&F\\(x,y)&\longmapsto&(2x+y,x-y,x+2y)\end{array}\qquad\psi:\begin{array}{rcl}F&\longrightarrow&E\\(x,y,z)&\longmapsto&(x+y+z,x-y-z)\end{array}$$

❸ Déterminons les **images** de φ et ψ :

- $$\mathrm{Im}\,(\varphi)=\mathrm{Vect}\big(\varphi(\vec{e}_1),\varphi(\vec{e}_2)\big)=\mathrm{Vect}\big((2,1,1),(1,-1,2)\big)$$
  Les vecteurs de F : $(2,1,1)$ et $(1,-1,2)$ ne sont pas colinéaires, donc $\dim\big(\mathrm{Im}\,(\varphi)\big)=2<\dim(F)$, ce qui entraîne que $\mathrm{Im}\,(\varphi)\neq F$ d'où φ **n'est pas surjective**.
- $$\mathrm{Im}\,(\psi)=\mathrm{Vect}\big(\psi(\vec{f}_1),\psi(\vec{f}_2),\psi(\vec{f}_3)\big)$$
  $$=\mathrm{Vect}\big((1,1),(1,-1),(1,-1)\big)=\mathrm{Vect}\big((1,1),(1,-1)\big)$$
  Les vecteurs de E : $(1,1)$ et $(1,-1)$ **ne** sont **pas colinéaires**, donc $\dim\big(\mathrm{Im}\,(\psi)\big)=2=\dim(E)$, ce qui entraîne que $\mathrm{Im}\,(\psi)=E$ d'où ψ est **surjective**.

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (fin))

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ et $\vec{f}_1 = (1,0,0), \vec{f}_2 = (0,1,0), \vec{f}_3 = (0,0,1)$.
Considérons les applications linéaires φ et ψ définies par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y, x+2y) \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y-z) \end{array}$$

❸ Vérifions le **théorème du rang** pour φ et ψ :

- Pour φ : $\dim(E) = 2$, $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 0$, $\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 2$ et l'on a bien
$$\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) + \operatorname{rg}(\varphi) = \dim(E)$$
- Pour ψ : $\dim(F) = 3$, $\dim(\operatorname{Ker}(\psi)) = 1$, $\operatorname{rg}(\psi) = \dim(\operatorname{Im}(\psi)) = 2$ et l'on a bien
$$\dim(\operatorname{Ker}(\psi)) + \operatorname{rg}(\psi) = \dim(F)$$

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (fin))

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ et $\vec{f}_1 = (1,0,0), \vec{f}_2 = (0,1,0), \vec{f}_3 = (0,0,1)$.
Rappelons les composées $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ définies par

$$\psi \circ \varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+2y, 0) \end{array} \qquad \varphi \circ \psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+z, 2y+2z, 3x-y-z) \end{array}$$

❹ Déterminons les **noyaux** de $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$:

- $$\begin{aligned} (x,y) \in \operatorname{Ker}(\psi \circ \varphi) &\iff (4x+2y, 0) = (0,0) \\ &\iff 2x + y = 0 \\ &\iff (x,y) = x(1,-2) \end{aligned}$$
Donc $\operatorname{Ker}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{Vect}((1,-2)) \neq \{(0,0)\}$ et $\psi \circ \varphi$ **n'est pas injective**.
- $$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(\varphi \circ \psi) &\iff (3x+y+z, 2y+2z, 3x-y-z) = (0,0,0) \\ &\iff x = 0 \text{ et } y + z = 0 \\ &\iff (x,y,z) = (0,y,-y) = y(0,1,-1) \end{aligned}$$
Donc $\operatorname{Ker}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{Vect}((0,1,-1)) \neq \{(0,0)\}$ et $\varphi \circ \psi$ **n'est pas injective**.
Remarque **:** on constate que $\operatorname{Ker}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{Ker}(\psi)$.

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (fin))

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ et $\vec{f}_1 = (1,0,0), \vec{f}_2 = (0,1,0), \vec{f}_3 = (0,0,1)$.
Rappelons les composées $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ définies par

$$\psi \circ \varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+2y, 0) \end{array} \qquad \varphi \circ \psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+z, 2y+2z, 3x-y-z) \end{array}$$

❹ Déterminons les **images** de $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$:

- $\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{Vect}((\psi \circ \varphi)(\vec{e}_1), (\psi \circ \varphi)(\vec{e}_2)) = \operatorname{Vect}((4,0),(2,0)) = \operatorname{Vect}((1,0))$
On a $\dim(\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi)) = 1 < \dim(E)$, ce qui entraîne que $\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi) \neq E$
d'où $\psi \circ \varphi$ **n'est pas surjective**.
- $$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\varphi \circ \psi) &= \operatorname{Vect}((\varphi \circ \psi)(\vec{f}_1), (\varphi \circ \psi)(\vec{f}_2), (\varphi \circ \psi)(\vec{f}_3)) \\ &= \operatorname{Vect}((3,0,3),(1,2,-1),(1,2,-1)) = \operatorname{Vect}((3,0,3),(1,2,-1)) \end{aligned}$$
Les vecteurs de E : $(3,0,3)$ et $(1,2,-1)$ **ne** sont **pas colinéaires**,
donc $\dim(\operatorname{Im}(\varphi \circ \psi)) = 2 < \dim(F)$, ce qui entraîne que $\operatorname{Im}(\varphi \circ \psi) \neq F$
d'où ψ **n'est pas surjective**.

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (fin))

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ et $\vec{f}_1 = (1,0,0), \vec{f}_2 = (0,1,0), \vec{f}_3 = (0,0,1)$.
Rappelons les composées $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ définies par

$$\psi \circ \varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+2y, 0) \end{array} \qquad \varphi \circ \psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+z, 2y+2z, 3x-y-z) \end{array}$$

❹ Déterminons les **images** de $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$:

- ***Remarque*** **:** on a trouvé
$$\operatorname{Im}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{Vect}((3,0,3),(1,2,-1))$$
Rappelons que $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}((2,1,1),(1,-1,2))$ et observons que
$$\begin{aligned} (2,1,1) + (1,-1,2) &= (3,0,3) \\ (2,1,1) - (1,-1,2) &= (1,2,-1) \end{aligned}$$
prouvant ainsi l'inclusion $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \operatorname{Im}(\varphi \circ \psi)$.
Par ailleurs, les deux s.e.v. $\operatorname{Im}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi \circ \psi)$ ayant même dimension,
on constate que $\operatorname{Im}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{Im}(\varphi)$.

Exemple 4.8 (Applications linéaires entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (fin))

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ les $\mathbb{R}$-e.v. rapportés à leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

On rappelle que $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ et $\vec{f}_1 = (1,0,0), \vec{f}_2 = (0,1,0), \vec{f}_3 = (0,0,1)$.
Rappelons les composées $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ définies par

$$\psi \circ \varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+2y, 0) \end{array} \qquad \varphi \circ \psi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+z, 2y+2z, 3x-y-z) \end{array}$$

❹ Vérifions le **théorème du rang** pour $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$:

- Pour $\psi \circ \varphi$: $\dim(E) = 2$, $\dim(\operatorname{Ker}(\psi \circ \varphi)) = 1$, $\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \dim(\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi)) = 1$ et l'on a bien
$$\dim(\operatorname{Ker}(\psi \circ \varphi)) + \operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \dim(E)$$
- Pour $\varphi \circ \psi$: $\dim(F) = 3$, $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi \circ \psi)) = 1$, $\operatorname{rg}(\varphi \circ \psi) = \dim(\operatorname{Im}(\varphi \circ \psi)) = 2$ et l'on a bien
$$\dim(\operatorname{Ker}(\varphi \circ \psi)) + \operatorname{rg}(\varphi \circ \psi) = \dim(F)$$

Exemple 4.17 (Dérivation/intégration)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-e.v. des polynômes à coefficients réels de degré au plus n et $F = \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}$.
Considérons l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & (P', P(0)) \end{array}$$

❶ Déterminons le **noyau** de φ :
$$P \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff P' = 0 \text{ et } P(0) = 0 \iff P = 0$$
Donc φ est **injective**.

❷ Comme les e.v. E et F sont de **même dimension finie** $n+1$, φ est aussi **surjective,** c'est donc un **isomorphisme.**

❸ Son **isomorphisme réciproque** s'écrit
$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ (Q,a) & \longmapsto & \int_0^{\cdot} Q + a \end{array}$$

Notions à retenir

- Applications linéaires
  - Caractérisation
  - Représentation analytique
  - Matrice
  - Noyau, image ; lien avec l'injectivité, la surjectivité ; isomorphisme
  - Image d'une famille de vecteurs
  - Théorème du rang
  - Exemples géométriques : homothéties, projections, symétries