

# Limites et continuité Comparaison de fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques  
1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année

## Sommaire

- 1 Propriétés dans l'ensemble des réels
  - Valeur absolue
  - Majorant, minorant
  - Borne supérieure et borne inférieure
  - Borne supérieure/inférieure et limite
- 2 Limites d'une fonction
  - Voisinages dans  $\mathbb{R}$
  - Limite en l'infini, limite en un réel
  - Limite à gauche, limite à droite
  - Lien entre fonctions et suites
  - Opérations sur les limites
  - Branches infinies
  - Ordre et limites
- 3 Continuité d'une fonction
  - Continuité en un point
  - Prolongement par continuité
  - Opérations
  - Continuité sur un intervalle
  - Fonctions trigonométriques réciproques
- 4 Comparaison locale de deux fonctions
  - Problématique
  - Outil de comparaison
  - Négligeabilité d'une fonction devant une autre
  - Équivalence de fonctions

## 1. Propriétés dans l'ensemble des réels | a) Valeur absolue

### Définition 1.1 (Valeur absolue)

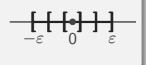
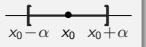
On appelle **valeur absolue** d'un réel  $x$ , le nombre réel noté  $|x|$  défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Sur la droite représentant les nombres réels,  $|x|$  est la **distance** entre le point d'abscisse  $x$  et l'origine.

### Proposition 1.2 (Propriétés)

- 1  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$
- 2  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |x \times y| = |x| \times |y|, |x^n| = |x|^n$  et, si  $y \neq 0, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- 3  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} |x \pm y| \leq |x| + |y| & \text{(1<sup>re</sup> inégalité triangulaire)} \\ ||x| - |y|| \leq |x \mp y| & \text{(2<sup>e</sup> inégalité triangulaire)} \end{cases}$
- 4  $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} |x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha \\ |x - x_0| \leq \alpha \iff x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \end{cases}$
- 5  $\forall x \in \mathbb{R}, [(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| \leq \epsilon) \iff x = 0]$   
Autre formulation :  $\bigcap_{\epsilon > 0} [-\epsilon, \epsilon] = \{0\}$

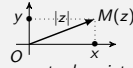


## 1. Complément : cas des complexes | a) Module

### Définition 1.3 (Module)

On appelle **module** d'un complexe  $z = x + iy$  avec  $x = \Re(z)$  et  $y = \Im(z)$ , le nombre réel noté  $|z|$  défini par :

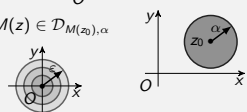
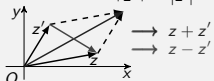
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Dans le plan représentant les nombres complexes,  $|z|$  est la **distance** entre le point de coordonnées  $(x, y)$  (ou d'**affixe**  $z$ ) et l'origine.

### Proposition 1.4 (Propriétés (facultatif))

- 1  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \iff z = 0$
- 2  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |z \times z'| = |z| \times |z'|, |z^n| = |z|^n$  et, si  $z' \neq 0, \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- 3  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} |z \pm z'| \leq |z| + |z'| \\ ||z| - |z'|| \leq |z \mp z'| \end{cases}$  *inégalités triangulaires*
- 4  $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (z, z_0) \in \mathbb{C}^2, |z - z_0| \leq \alpha \iff M(z) \in D_{M(z_0), \alpha}$
- 5  $\forall z \in \mathbb{C}, [(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, |z| \leq \epsilon) \iff z = 0]$   
Autre formulation :  $\bigcap_{\epsilon > 0} D_{0, \epsilon} = \{0\}$



## 1. Propriétés dans l'ensemble des réels | b) Majorant, minorant d'une partie

### Définition 1.5 (Majorant/Minorant)

- 1 Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha$  un réel.  
On dit que  $\alpha$  est un **majorant** de  $A$  ou que  $\alpha$  **major**e  $A$  si  $\forall x \in A, x \leq \alpha$ .  
On dit que  $\alpha$  est un **minorant** de  $A$  ou que  $\alpha$  **minore**  $A$  si  $\forall x \in A, x \geq \alpha$ .
- 2 Si  $A$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  qui admet (au moins) un majorant (resp. un minorant), on dit qu'elle est **majorée** (resp. **minorée**).
- 3 Si  $A$  est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**, ce qui équivaut à :  $\exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leq M$ .
- 4 On dit que  $A$  admet un **plus grand élément** (resp. un **plus petit élément**)  $\alpha$  lorsque  $\alpha$  est à la fois un majorant (resp. un minorant) de  $A$  et un élément de  $A$ . S'il existe,  $\alpha$  s'appelle aussi le **maximum** (resp. le **minimum**) de  $A$  et se note  $\max(A)$  (resp.  $\min(A)$ ).

### Remarque 1.6 (Cas des complexes)

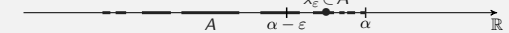
On peut étendre la notion d'ensemble borné au cas des nombres complexes en remplaçant la **valeur absolue** par le **module** :  
Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{C}$ . On dit que  $A$  est **bornée** lorsque  
 $\exists M > 0, \forall z \in A, |z| \leq M$ .

## 1. Propriétés dans l'ensemble des réels | c) Borne supérieure et borne inférieure

### Théorème-définition 1.7 (Borne supérieure/inférieure)

- 1 Pour toute partie **non vide et majorée**  $A$  de  $\mathbb{R}$ , il existe un **unique** réel  $\alpha$  qui est le **plus petit des majorants** de  $A$ ; ce réel s'appelle la **borne supérieure** de  $A$  et on le note  $\sup(A)$ . Autrement dit :

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A, \alpha - \epsilon < x_\epsilon \leq \alpha \end{cases}$$



- 2 Pour toute partie **non vide et minorée**  $A$  de  $\mathbb{R}$ , il existe un **unique** réel  $\beta$  qui est le **plus grand des minorants** de  $A$ ; ce réel s'appelle la **borne inférieure** de  $A$  et on le note  $\inf(A)$ . Autrement dit :

$$\beta = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A, \beta \leq x_\epsilon < \beta + \epsilon \end{cases}$$



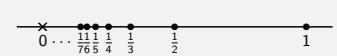
Par convention,

- si  $A$  est une partie **non vide non majorée**, on pose  $\sup(A) = +\infty$ ;
- si  $A$  est une partie **non vide non minorée**, on pose  $\inf(A) = -\infty$ ;
- on pose également  $\sup(\emptyset) = -\infty$  et  $\inf(\emptyset) = +\infty$ .

## 1. Propriétés dans l'ensemble des réels | c) Borne supérieure et borne inférieure

### Exemple 1.8

- 1 Les ensembles  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  ne sont **ni majorés ni minorés**, ils admettent  $-\infty$  et  $+\infty$  pour borne inférieure et borne supérieure.
- 2 Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .
  - Les intervalles  $[a, b], [a, b[, ]a, b]$  et  $]a, b]$  sont **bornés** et admettent tous  $a$  pour borne inférieure et  $b$  pour borne supérieure.
  - L'intervalle  $]a, b[$  admet  $a$  pour plus petit élément et  $b$  pour plus grand élément, alors que l'intervalle  $]a, b]$  n'admet ni plus petit ni plus grand élément.
  - Les intervalles  $[a, +\infty[$  et  $]a, +\infty[$  sont **minorés** mais **pas majorés**, ils admettent  $a$  pour borne inférieure et  $+\infty$  pour borne supérieure.
- 3 Soit  $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .
  - L'ensemble  $A$  est non vide, majoré par 1 et minoré par 0.
  - On a  $1 \in A$  donc  $\sup(A) = \max(A) = 1$ .
  - On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$  et  $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} < \epsilon$  (choisir un naturel  $n > \frac{1}{\epsilon}$ ).  
Donc  $\inf(A) = 0$ . Or  $0 \notin A$ , donc  $A$  n'a pas de plus petit élément.



## 1. Propriétés dans l'ensemble des réels | c) Borne supérieure et borne inférieure

### Définition 1.9 (Bornes sup/inf d'une fonction)

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

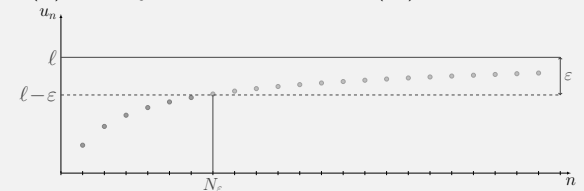
- On dit que  $f$  est **majorée** (resp. **minorée**) sur  $D$  si  
 $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq \alpha$  (resp.  $f(x) \geq \alpha$ ).
- Si  $f$  est **majorée** sur  $D$  alors  $\sup\{f(x), x \in D\}$  est un nombre **fini** et se note  $\sup_{x \in D} f(x)$ .
- Si  $f$  est **minorée** sur  $D$  alors  $\inf\{f(x), x \in D\}$  est un nombre **fini** et se note  $\inf_{x \in D} f(x)$ .
- Si  $f$  est une fonction **non majorée**, on pose par convention  $\sup_{x \in D} f(x) = +\infty$ .
- Si  $f$  est une fonction **non minorée**, on pose par convention  $\inf_{x \in D} f(x) = -\infty$ .
- De manière analogue, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle, on note  
 $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

## 1. Propriétés dans l'ensemble des réels | d) De la borne sup/inf vers la limite

### Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle **croissante**. Posons  $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

- 1 Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée**, alors  $\ell$  est un nombre réel (**fini**).



Le nombre  $\ell$  est caractérisé par

$$[\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell] \text{ et } [\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, u_{N_\epsilon} > \ell - \epsilon].$$

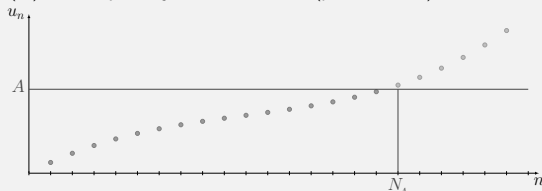
Par croissance, on a  $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n > N_\epsilon \implies \ell - \epsilon < u_n \leq \ell]$ .

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente** et admet  $\ell$  pour limite.

**Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle **croissante**. Posons  $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

• Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée, alors  $\ell = +\infty$  (par convention).



On a  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, u_{N_A} > A$ .

Par croissance, on a  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n > N_A \implies u_n > A]$ .

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **divergente** et admet  $+\infty$  pour limite.

On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Un peu de vocabulaire qui sera utilisé dans la suite :

**Définition 2.1 (Notion de voisinage)**

• On dit qu'une propriété dépendant d'un réel  $x$  est vraie **au voisinage de  $x_0$**  lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme  $I = ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que la propriété soit vraie pour tout  $x \in I \setminus \{x_0\}$  (ce qui ne l'empêche pas d'être éventuellement vraie pour  $x_0$  également).

• On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage de  $+\infty$**  (resp.  $-\infty$ ) lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme  $I = ]A, +\infty[$  (resp.  $]-\infty, A]$  avec  $A \in \mathbb{R}$  tel que la propriété soit vraie pour tout  $x \in I$ .

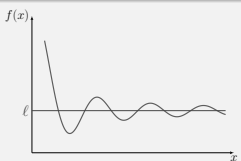
**Définition 2.2 (Droite réelle achevée)**

On appelle **droite réelle achevée** l'ensemble des réels auquel on adjoint  $+\infty$  et  $-\infty$ . Cet ensemble est noté  $\mathbb{R}$ . Formellement :

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

**Définition 2.4 (Asymptote horizontale)**

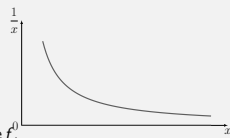
Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \ell$ , on dit que la droite d'équation  $y = \ell$  est une **asymptote (horizontale)** à la courbe représentative de  $f$ .



**Exemple 2.5 (Fonction « inverse »)**

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ , donc l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de  $f$ .

**Théorème 1.11 (Théorème de la limite monotone)**

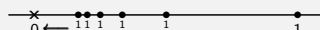
- 1. Toute suite **croissante et majorée est convergente**.  
Toute suite **croissante et non majorée est divergente de limite  $+\infty$** .
- 2. Toute suite **décroissante et minorée est convergente**.  
Toute suite **décroissante et non minorée est divergente de limite  $-\infty$** .

De manière unifiée :

- si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle **croissante**, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  ;
- si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle **décroissante**, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

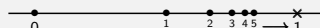
**Exemple 1.12 (Suite des inverses)**

1. Soit  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$ .



La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante et minorée** e.g. par 0. Elle est donc **convergente** et l'on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = 0$ .

2. Soit  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 1 - \frac{1}{n}$ .



La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante et majorée** e.g. par 1. Elle est donc **convergente** et l'on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} v_n = 1$ .

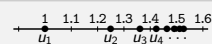
Dans toute la suite, sauf mention contraire,  $f$  désignera une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble de définition  $D_f$  est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

**Définition 2.3 (Limite finie en l'infini)**

- 1. Soit une fonction  $f$  définie au voisinage de  $+\infty$ .  
On dit que  $f$  **admet pour limite un réel  $\ell$  en  $+\infty$**  lorsque  $\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > X_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ .  
Si une telle limite existe, alors elle est **unique**.  
On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell$ , ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$  ou  $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ .
- 2. Soit une fonction  $f$  définie au voisinage de  $-\infty$ .  
On dit que  $f$  **admet pour limite un réel  $\ell$  en  $-\infty$**  lorsque  $\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < X_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ .  
On note alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \ell$ , ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$  ou  $f \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ .

**Exemple 1.13 (Deux séries de Riemann)**

• Soit  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$ .

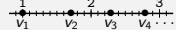


- On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ , donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante**.
- On a  $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ,  
donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée**.

En conclusion, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente**.

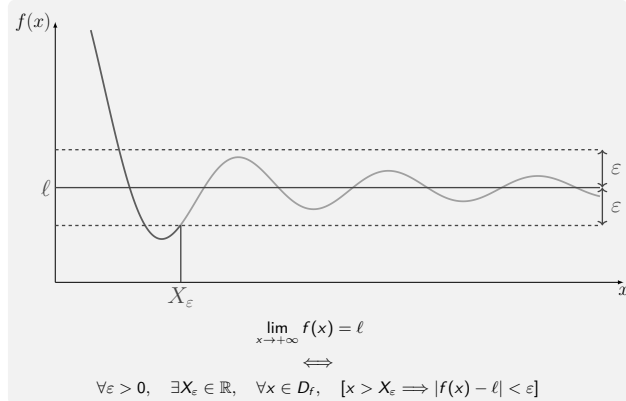
• Soit  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .



- On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ , donc la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante**.
- On a  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ ,  
donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$ .

Ainsi, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas **majorée**.

En conclusion, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **divergente** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} v_n = +\infty$ .



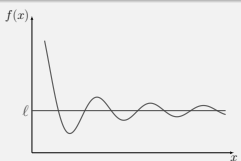
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

$\iff$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, [x > X_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$

**Définition 2.4 (Asymptote horizontale)**

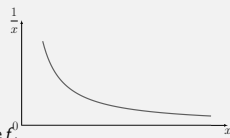
Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \ell$ , on dit que la droite d'équation  $y = \ell$  est une **asymptote (horizontale)** à la courbe représentative de  $f$ .



**Exemple 2.5 (Fonction « inverse »)**

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ , donc l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de  $f$ .

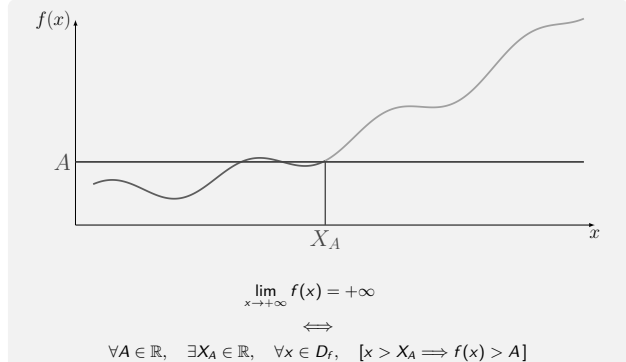
**Définition 2.6 (Limite infinie en l'infini)**

Soit une fonction  $f$  définie au voisinage de  $+\infty$ .

- 1. On dit que  $f$  **admet pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$**  lorsque  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists X_A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > X_A \implies f(x) > A$ .  
On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ , ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  ou  $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- 2. On dit que  $f$  **admet pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$**  lorsque  $\forall B \in \mathbb{R}, \exists X_B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > X_B \implies f(x) < B$ .  
On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$ , ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$  ou  $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ .

**Remarque 2.7**

Les définitions précédentes s'adaptent aisément au cas d'une fonction définie au voisinage de  $-\infty$  et qui peut donc avoir pour limite  $-\infty$  ou  $+\infty$ .



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$\iff$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists X_A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, [x > X_A \implies f(x) > A]$$

Définition 2.8 (Limite d'une suite)

1 On dit qu'une suite réelle ou complexe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers un nombre  $\ell$  (ou **tend vers  $\ell$** ) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et on dit aussi que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente**. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

2 On dit qu'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **a pour limite  $+\infty$**  (ou **tend vers  $+\infty$** ) si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N_A \implies u_n > A.$$

3 On dit qu'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **a pour limite  $-\infty$**  (ou **tend vers  $-\infty$** ) si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N_B \implies u_n < B.$$

Définition 2.9 (Limite infinie en un réel)

Soit  $x_0$  un réel tel que :  $x_0 \in D_f$  ou  $x_0$  est une borne de  $D_f$ .

1 On dit que  $f$  **admet pour limite  $+\infty$  en  $x_0$**  lorsque :

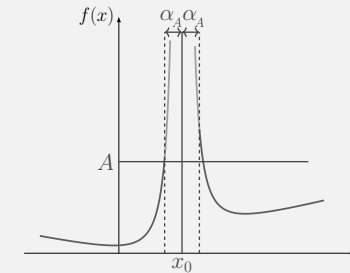
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha_A \implies f(x) > A$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ou  $\lim f = +\infty$ , ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  ou  $f \xrightarrow{x_0} +\infty$ .

2 On dit que  $f$  **admet pour limite  $-\infty$  en  $x_0$**  lorsque :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha_B > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha_B \implies f(x) < B$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  ou  $\lim f = -\infty$ , ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$  ou  $f \xrightarrow{x_0} -\infty$ .



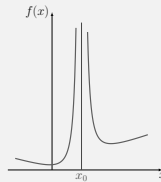
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$\iff$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0, \forall x \in D_f, [|x - x_0| < \alpha_A \implies f(x) > A]$$

Définition 2.10 (Asymptote verticale)

Lorsque  $\lim_{x_0} f = +\infty$  ou  $\lim f = -\infty$ , on dit que la droite d'équation  $x = x_0$  est une **asymptote (verticale)** à la courbe représentative de  $f$ .

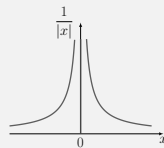


Exemple 2.11 (Fonction « inverse absolue »)

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{|x|}.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$ , donc l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de  $f$ .



Définition 2.12 (Limite finie en un réel)

Soit  $x_0$  un réel tel que :  $x_0 \in D_f$  ou  $x_0$  est une borne de  $D_f$ .

On dit que  $f$  **admet le réel  $\ell$  pour limite en  $x_0$**  lorsque

• première formulation :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon;$$

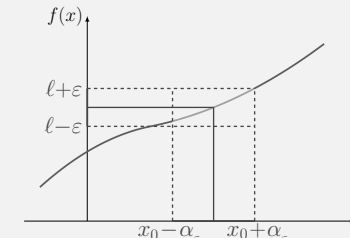
• deuxième formulation :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, x \in ]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[ \implies f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[;$$

• troisième formulation :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, f(]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[ \cap D_f) \subset ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  ou  $\lim f = \ell$ , ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$  ou  $f \xrightarrow{x_0} \ell$ .



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$\iff$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, [|x - x_0| < \alpha_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$

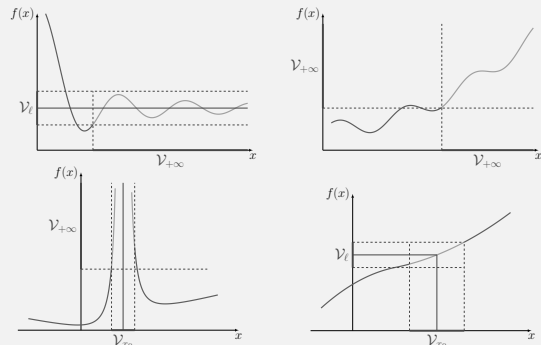
ou encore  $x \in ]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[ \implies f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$   
ou encore  $f(]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[ \cap D_f) \subset ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Définition 2.13 (Unification des quatre cas)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $x_0 \in D_f$  ou  $x_0$  est une borne de  $D_f$ , et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  **admet  $\ell$  pour limite en  $x_0$**  lorsque :

pour tout voisinage  $\mathcal{V}_\ell$  de  $\ell$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{x_0}$  de  $x_0$  tel que  $f(\mathcal{V}_{x_0} \cap D_f) \subset \mathcal{V}_\ell$ .



Proposition 2.14 (Unicité/continuité)

- Si  $f$  admet une limite en  $x_0$  alors cette limite est **unique**.
- Si  $f$  admet une limite finie en  $x_0$  alors  $f$  est **bornée** au voisinage de  $x_0$ .
- Si  $x_0 \in D_f$  et si  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $x_0$  alors  $\ell = f(x_0)$ .  
On dit alors que  $f$  est **continue** en  $x_0$  (cf. § 3).

Remarque 2.15 ((facultatif))

1 Lorsque  $x_0 \in D_f$  on définit parfois  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} f(x) = \ell$  par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \alpha_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On peut définir de même  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} f(x) = +\infty$ .

2 Les définitions 2.3 et 2.12 peuvent s'étendre au cas d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  (et même de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  pour la 2.12...) en remplaçant les **valeurs absolues** par des **modules**. On a alors le résultat ci-dessous.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , telle que  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\ell_1 + i\ell_2 \in \mathbb{C}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 + i\ell_2 \iff \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \ell_2 \right).$$

Définition 2.16

1 On dit que  $f$  **admet le réel  $\ell$  pour limite à gauche en  $x_0$**  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, x_0 - \alpha_\varepsilon < x < x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ .

2 On dit que  $f$  **admet  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) pour limite à gauche en  $x_0$**  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0, \forall x \in D_f, x_0 - \alpha_A < x < x_0 \implies f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < A).$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ .

On définit de la même manière la notion de **limite à droite** : il suffit, dans les définitions ci-dessus, de remplacer  $x_0 - \alpha_\varepsilon < x < x_0$  par  $x_0 < x < x_0 + \alpha_\varepsilon$ .

Proposition 2.17

- Si  $x_0 \notin D_f$ ,  $f$  admet une limite en  $x_0$  ssi  $f$  admet une **limite à droite** et une **limite à gauche** en  $x_0$  et si ces limites sont **égales**.
- Si  $x_0 \in D_f$ , il faut de plus que :  $\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$ , ce qui revient à dire que  $f$  est **continue** en  $x_0$  (cf. § 3).

Proposition 2.18 (Lien fonctions-suites)

Soit  $a, \ell \in \mathbb{R}$ . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- 1  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .
- 2 Pour toute suite de réels  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$ .

Corollaire 2.19 (Un critère de divergence)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . S'il existe deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

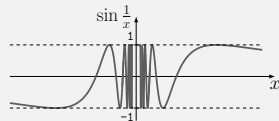
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x_0$  et les suites-images par  $f : (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  admettent des limites différentes, alors  $f$  n'admet pas de limite en  $x_0$ .

Exemple 2.20 (Fonction « sinus inverse »)

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ . Examinons si elle admet une limite en  $x_0 = 0$ .

- Posons  $u_n = \frac{1}{n\pi}$  et  $v_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ .
- On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  et  $f(u_n) = 0$  et  $f(v_n) = 1$ .
- Les suites  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  admettent des limites différentes.

Ainsi  $f$  n'admet pas de limite en 0.



Proposition 2.25 (Composition)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0, \ell, \ell' \in \mathbb{R}$ .

• Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et  $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = \ell'$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$ .

• Application à  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{g(x) \ln f(x)})$  lorsque  $f > 0$  au voisinage de  $x_0$  :

$\lim_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell > 1$ ou $+\infty$	$\ell \in ]0, 1[$	$+\infty$	$+\infty$	$0^+$	$0^+$	1
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$\ell' > 0$ ( $\ell' < 0$ )	0	$\ell' > 0$ ou $+\infty$ $\ell' < 0$ ou $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} f^{g(x)}$	$\ell^{\ell'}$	$+\infty$ ( $0^+$ )	$0^+$ ( $+\infty$ )	$+\infty$ ( $0^+$ )	?	$0^+$ ( $+\infty$ )	?	?

Les formes indéterminées que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme  $\bullet \infty^0 \bullet 0^0 \bullet 1^\infty$

Exemple 2.26 (Exponentielle)

À l'aide de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  (cf. exemple 2.36), on voit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Théorème 2.29 (Théorème de la limite monotone)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels ou  $\pm\infty$  tels que  $a < b$  et  $I = ]a, b[$ .

1 Soit  $f$  une fonction croissante sur  $I$ .

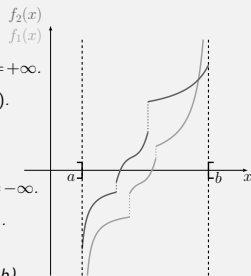
- Si  $f$  est majorée sur  $I$ , alors  $f$  admet une limite à gauche finie en  $b$ .
- Si  $f$  n'est pas majorée sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ .

Dans les deux cas, on a  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in ]a, b[} f(x)$ .

- Si  $f$  est minorée sur  $I$ , alors  $f$  admet une limite à droite finie en  $a$ .
- Si  $f$  n'est pas minorée sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ .

Dans les deux cas, on a  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in ]a, b[} f(x)$ .

2 On a des résultats similaires pour les fonctions décroissantes (en échangeant les rôles de  $a$  et  $b$ ).



Proposition 2.21 (Addition/multiplication)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\ell, \ell'$  deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$-\infty$
$\lim_{x_0} (f+g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	?

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} (f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (+)	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (+)	?

Les formes indéterminées que l'on rencontre lors de ces opérations sont de la forme

- $0 \times -\infty$
- $0 \times \infty$

Exemple 2.22 (Polynômes en  $\pm\infty$ )

La limite en  $\pm\infty$  d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré : si  $a_p \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{k=0}^p a_k x^k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_p x^p = \pm\infty$  si  $p \geq 1$  (signe à préciser).

Proposition 2.25 (Composition)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0, \ell, \ell' \in \mathbb{R}$ .

• Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et  $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = \ell'$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$ .

• Application à  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{g(x) \ln f(x)})$  lorsque  $f > 0$  au voisinage de  $x_0$  :

$\lim_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell > 1$ ou $+\infty$	$\ell \in ]0, 1[$	$+\infty$	$+\infty$	$0^+$	$0^+$	1
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$\ell' > 0$ ( $\ell' < 0$ )	0	$\ell' > 0$ ou $+\infty$ $\ell' < 0$ ou $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} f^{g(x)}$	$\ell^{\ell'}$	$+\infty$ ( $0^+$ )	$0^+$ ( $+\infty$ )	$+\infty$ ( $0^+$ )	?	$0^+$ ( $+\infty$ )	?	?

Les formes indéterminées que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme  $\bullet \infty^0 \bullet 0^0 \bullet 1^\infty$

Exemple 2.26 (Exponentielle)

À l'aide de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  (cf. exemple 2.36), on voit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Théorème 2.29 (Théorème de la limite monotone)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels ou  $\pm\infty$  tels que  $a < b$  et  $I = ]a, b[$ .

1 Soit  $f$  une fonction croissante sur  $I$ .

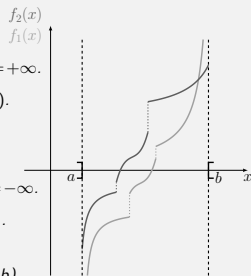
- Si  $f$  est majorée sur  $I$ , alors  $f$  admet une limite à gauche finie en  $b$ .
- Si  $f$  n'est pas majorée sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ .

Dans les deux cas, on a  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in ]a, b[} f(x)$ .

- Si  $f$  est minorée sur  $I$ , alors  $f$  admet une limite à droite finie en  $a$ .
- Si  $f$  n'est pas minorée sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ .

Dans les deux cas, on a  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in ]a, b[} f(x)$ .

2 On a des résultats similaires pour les fonctions décroissantes (en échangeant les rôles de  $a$  et  $b$ ).



Définition 2.27 (Asymptote oblique/ Branche parabolique)

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $+\infty$ .

1 S'il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0,$$

on dit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote (oblique) à la courbe représentative de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

Dans ce cas, les nombres  $a$  et  $b$  sont donnés par

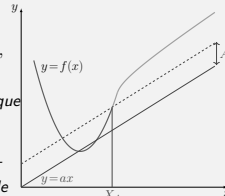
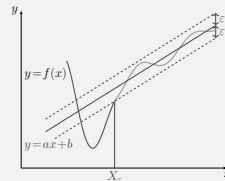
$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

2 S'il existe un réel  $a$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty,$$

on dit que la courbe représentative de  $f$  admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation  $y = ax$  en  $+\infty$ .

3 Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ , on dit que la courbe représentative de  $f$  admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées en  $+\infty$ .



Proposition 2.23 (Division)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\ell, \ell'$  deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$ ( $\ell' < 0$ )	$\ell' > 0$ ( $\ell' < 0$ )	$\pm\infty$	$0^+$ ( $0^-$ )	$0^+$ ( $0^-$ )	0
$\lim_{x_0} \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ (-)	$-\infty$ (+)	?	$+\infty$ (-)	$-\infty$ (+)	?

Les formes indéterminées que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme

- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

Exemple 2.24 (Fractions rationnelles en  $\pm\infty$ )

La limite en  $\pm\infty$  d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

si  $a_p \neq 0$  et  $b_q \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sum_{k=0}^p a_k x^k}{\sum_{k=0}^q b_k x^k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } p > q \text{ (signe à préciser)} \\ 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_p} & \text{si } p = q \end{cases}$

Proposition 2.25 (Composition)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0, \ell, \ell' \in \mathbb{R}$ .

• Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et  $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = \ell'$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$ .

• Application à  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{g(x) \ln f(x)})$  lorsque  $f > 0$  au voisinage de  $x_0$  :

$\lim_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell > 1$ ou $+\infty$	$\ell \in ]0, 1[$	$+\infty$	$+\infty$	$0^+$	$0^+$	1
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$\ell' > 0$ ( $\ell' < 0$ )	0	$\ell' > 0$ ou $+\infty$ $\ell' < 0$ ou $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} f^{g(x)}$	$\ell^{\ell'}$	$+\infty$ ( $0^+$ )	$0^+$ ( $+\infty$ )	$+\infty$ ( $0^+$ )	?	$0^+$ ( $+\infty$ )	?	?

Les formes indéterminées que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme  $\bullet \infty^0 \bullet 0^0 \bullet 1^\infty$

Exemple 2.26 (Exponentielle)

À l'aide de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  (cf. exemple 2.36), on voit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Proposition 2.23 (Division)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\ell, \ell'$  deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$ ( $\ell' < 0$ )	$\ell' > 0$ ( $\ell' < 0$ )	$\pm\infty$	$0^+$ ( $0^-$ )	$0^+$ ( $0^-$ )	0
$\lim_{x_0} \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ (-)	$-\infty$ (+)	?	$+\infty$ (-)	$-\infty$ (+)	?

Les formes indéterminées que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme

- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

Exemple 2.24 (Fractions rationnelles en  $\pm\infty$ )

La limite en  $\pm\infty$  d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

si  $a_p \neq 0$  et  $b_q \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sum_{k=0}^p a_k x^k}{\sum_{k=0}^q b_k x^k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } p > q \text{ (signe à préciser)} \\ 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_p} & \text{si } p = q \end{cases}$

Proposition 2.25 (Composition)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0, \ell, \ell' \in \mathbb{R}$ .

• Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et  $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = \ell$

Proposition 2.32 (Ordre et limites)

- 1 Soit  $f$  et  $g$  des fonctions telles que  $f \leq g$  au voisinage de  $x_0$ 
  - Si  $f$  et  $g$  admettent des limites finies  $l$  et  $l'$  en  $x_0$  alors  $l \leq l'$ .
  - Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .
  - Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .
- 2 Si  $f$  et  $g$  admettent resp.  $l$  et  $l'$  comme limites en  $x_0$  et si  $l < l'$ , alors  $f < g$  au voisinage de  $x_0$ .
- 3 Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  et si  $l > \alpha$  alors  $f > \alpha$  au voisinage de  $x_0$ .  
En particulier, si  $l > 0$  alors  $f > 0$  au voisinage de  $x_0$ .

Remarque 2.33 (Inégalités strictes/larges)

On prendra garde aux inégalités strictes et larges : si  $f$  et  $g$  sont des fonctions telles que  $f < g$  au voisinage de  $x_0$  et admettent des limites  $l$  et  $l'$  en  $x_0$ , on n'a pas nécessairement  $l < l'$  et l'on peut avoir  $l = l'$ .

Ex. :  $f(x) = 0$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$  en  $+\infty$ . On a  $f < g$  sur  $]0, +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

Théorème 2.34 (Théorème de l'encadrement)

Soit  $f, g$  et  $h$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0, l \in \mathbb{R}$ .  
Si les fonctions  $f, g$  et  $h$  vérifient  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  au voisinage de  $x_0$ , et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

Exemple 2.35 (Fonction « sinus cardinal »)

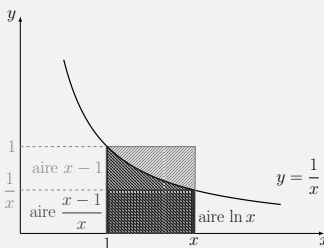
Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

- 1 Étude en 0
  - De l'encadrement géométrique  
 $\forall x \in ]0, \pi/2[, \sin x < x < \tan x$   
(l'angle  $x$  étant mesuré en radians), on obtient  $\forall x \in ]0, \pi/2[, \cos x < f(x) < 1$  duquel on déduit  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ .
  - Avec  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , on tire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ .
  - Avec  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ , on tire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .
- 2 Étude en  $\pm\infty$ 
  - De l'encadrement  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1$ , on tire  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{1}{|x|}$  duquel on déduit  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .



Exemple 2.36 (Fonctions logarithme/exponentielle)

- De l'encadrement géométrique  
 $\forall x \in ]1, +\infty[, \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$   
on obtient  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ .  
Par symétrie, on tire  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ .
- Par changements de variables, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .



Exemple 2.37 (Fonctions hyperboliques)

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}x}{x} = 1$     •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{th}x}{x} = 1$     •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch}x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

Définition 3.1 (Continuité)

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in D_f$ .  
1 On dit que  $f$  est **continue en  $x_0$**  lorsque  $f$  admet une limite en  $x_0$ , et cette limite est alors nécessairement  $f(x_0)$  (d'après proposition 2.14). Autrement dit :  
 $f$  continue en  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$   
 $\iff (\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$ .

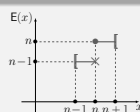
2 On dit que  $f$  est **continue à gauche** (resp. **à droite**) en  $x_0$  lorsque  
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ).

Proposition 3.2

$f$  est continue en  $x_0$  ssi  $f$  est continue à gauche et à droite en  $x_0$ .

Exemple 3.3 (Fonction « partie entière »)

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Au voisinage de  $n$ , on a  
 $E(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [n, n+1[ \\ n-1 & \text{si } x \in [n-1, n[ \end{cases}$   
donc  $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n = E(n)$  et  $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n-1 \neq E(n)$ .  
La fonction partie entière est **continue à droite** en  $n$  mais **pas à gauche**.



Remarque 3.4 (Discontinuité)

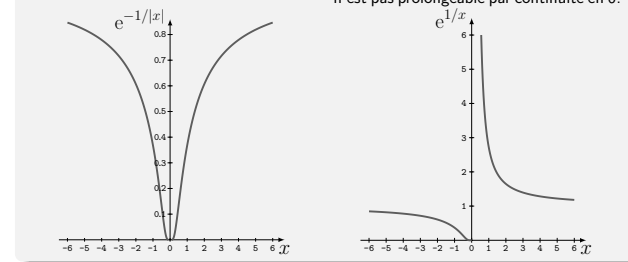
- 1 Pour une fonction  $f$ , il existe deux types de discontinuité en  $x_0 \in D_f$  :
  - **discontinuité de première espèce** :  $f$  admet une limite à droite et une limite à gauche en  $x_0$ , mais l'une au moins de ces deux limites n'est pas égale à  $f(x_0)$ .
  - **discontinuité de deuxième espèce** :  $f$  n'admet pas de limite à droite et/ou à gauche en  $x_0$ .
- 2 Si  $x_0 \notin D_f$  et si  $f$  admet pour limite le réel  $l$  en  $x_0$ , on peut prolonger  $f$  en posant :  
 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$   
La fonction  $\tilde{f}$  ainsi obtenue est continue en  $x_0$  : on dit qu'on a **prolongé  $f$  par continuité en  $x_0$** .

Exemple 3.5 (Prolongement par continuité)

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ .  
• On a  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  et  $\forall x \in D_f, f(x) = x + 1$ .  
• Donc  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  et l'on peut prolonger ainsi construit s'écrit simplement :  
la fonction  $f$  par continuité en 2 en posant  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x + 1$   
 $\tilde{f}(2) = 3$ .

Exemple 3.6 (Exponentielle-inverse)

- 1 Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto e^{-1/|x|}$
  - 2 Soit  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto e^{1/x}$
- La fonction  $f$  admet une limite finie en 0 qui vaut 0. Elle est donc **prolongeable** par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ .  
La fonction  $g$  admet une limite à gauche finie en 0 qui vaut 0 et une limite à droite infinie en 0. Elle présente donc une **discontinuité de deuxième espèce** et n'est pas prolongeable par continuité en 0.



Proposition 3.7 (Opérations)

- 1 **Opérations**  
Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continues en  $x_0$  et si  $\lambda$  est un réel, alors les fonctions  $f + g, \lambda f$  et  $fg$  sont continues en  $x_0$ .  
Si de plus  $g(x_0) \neq 0$  alors  $\frac{f}{g}$  est continue en  $x_0$ .
- 2 **Composition**  
Si  $f$  est continue en  $x_0$  et si  $g$  est continue en  $f(x_0)$  alors  $(g \circ f)$  est continue en  $x_0$ .
- 3 **Inégalités**  
Si  $f$  est continue en  $x_0$  alors  $f$  est bornée au voisinage de  $x_0$ .  
Si  $f$  est continue en  $x_0$  et si  $f(x_0) > 0$  alors  $f(x) > 0$  au voisinage de  $x_0$ .

Remarque 3.8 (Extension aux fonctions à valeurs complexes (facultatif))

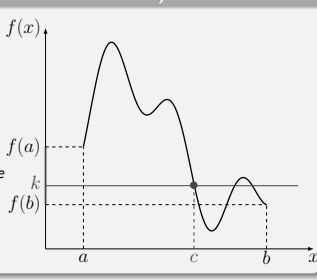
Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , telle que  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  
la fonction  $f$  est continue en  $x_0 \in \mathbb{R}$  ssi les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont continues en  $x_0$ .

Définition 3.9 (Continuité sur un intervalle)

La fonction  $f$  est dite **continue sur l'intervalle  $I$**  lorsque  $f$  est continue en tout  $x_0$  de  $I$ .

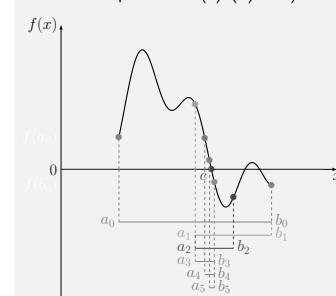
Théorème 3.10 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ .  
• Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  dans l'intervalle  $[a, b]$  tel que  $f(c) = k$ .  
• En particulier, si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés, alors il existe au moins un réel  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .



Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

- Soit  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que  $f(a)$  et  $f(b)$  soient de signes opposés (ou de manière équivalente  $f(a)f(b) < 0$ ).
- Posons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .  
On a  $f(a_0)f(b_0) < 0$ , donc  $f$  admet un zéro dans  $[a_0, b_0]$ .
  - Posons  $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$  et  $b_1 = b_0$ .  
On a  $f(a_1)f(b_1) < 0$ , donc  $f$  admet un zéro dans  $[a_1, b_1]$ .
  - Posons  $a_2 = a_1$  et  $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ .  
On a  $f(a_2)f(b_2) < 0$ , donc  $f$  admet un zéro dans  $[a_2, b_2]$ .
  - Posons  $a_3 = a_2$  et  $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ .  
On a  $f(a_3)f(b_3) < 0$ , donc  $f$  admet un zéro dans  $[a_3, b_3]$ .
  - Posons  $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$  et  $b_4 = b_3$ .  
On a  $f(a_4)f(b_4) < 0$ , donc  $f$  admet un zéro dans  $[a_4, b_4]$ .
  - Posons  $a_5 = \frac{a_4+b_4}{2}$  et  $b_5 = b_4$ .  
On a  $f(a_5)f(b_5) < 0$ , donc  $f$  admet un zéro dans  $[a_5, b_5]$ .



Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

On construit ainsi de proche en proche deux suites de points  $a_0, a_1, a_2, \dots$  et  $b_0, b_1, b_2, \dots$  dans  $[a, b]$  telles que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , l'intervalle  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  est l'une des deux "moitiés" de  $[a_n, b_n]$  et  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ .

On a donc une suite d'intervalles **fermés emboîtés**  $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$  de longueurs  $\ell_0 = b_0 - a_0, \ell_1 = \ell_0/2, \ell_2 = \ell_0/2^2, \dots$

En conséquence, les deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient :

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$ .

On a donc affaire à deux suites **adjacentes** (cf. cours du 2<sup>nd</sup> semestre). Elles sont **convergentes** et admettent la **même limite**  $c \in [a, b]$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c \quad (\text{ou encore } \bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] = \{c\}).$$

Par continuité, on en tire

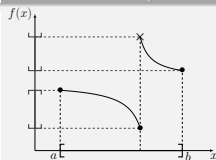
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c).$$

Enfin, la propriété  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$  entraîne  $f(c)^2 \leq 0$  soit  $f(c) = 0$ . L'algorithme de dichotomie conduit donc à un zéro de la fonction  $f$ .

Corollaire 3.12 (Image d'un intervalle)

L'image d'un **intervalle** par une fonction **continue** est un **intervalle**.

Remarque 3.13 (Discontinuité)



Si la fonction présente au moins une discontinuité, son image peut **ne pas** être un intervalle.

Exemple 3.14 (Fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$  (facultatif))

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

La fonction  $f$  prend les deux seules valeurs 0 et 1. On a  $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$  et plus généralement, pour tous réels  $a, b$  tels que  $a < b$ , il existe un **rationnel** et un **irrationnel** entre  $a$  et  $b$  (on dit que  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont **denses** dans  $\mathbb{R}$ ), donc  $f([a, b]) = \{0, 1\}$ . La fonction  $f$  n'est donc **continue sur aucun intervalle** (non réduit à un point) de  $\mathbb{R}$ .

Théorème 3.15 (Image d'un fermé borné : théorème des valeurs extrêmes)

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle **fermé borné**  $[a, b]$ .

Alors  $f$  est **bornée** sur  $[a, b]$  et **atteint** ses bornes inférieure et supérieure  $m$  et  $M$  :  $f(x)$

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

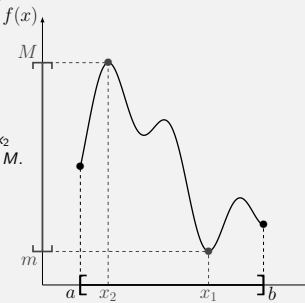
$$\text{et } M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Autrement dit : il existe deux réels  $x_1$  et  $x_2$  dans  $[a, b]$  tels que  $f(x_1) = m$  et  $f(x_2) = M$ .

De plus,

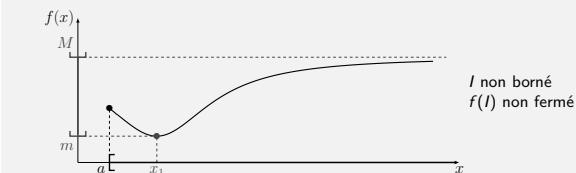
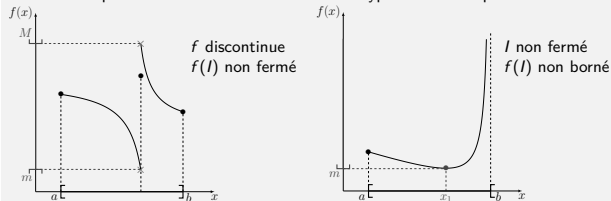
$$f([a, b]) = [m, M].$$

L'image d'un intervalle **fermé borné** par une fonction **continue** est encore un intervalle **fermé borné**.



Remarque 3.16 (Contre-exemples)

Le théorème peut être mis en défaut si l'une des hypothèses n'est pas satisfaite.

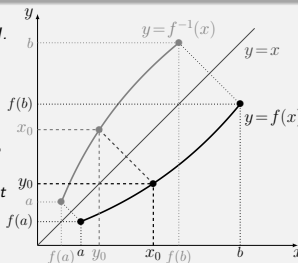


Théorème 3.17 (Théorème de la bijection)

Soit  $f$  une fonction **continue et strictement monotone** sur un **intervalle**  $I$ .

- $f(I)$  est un **intervalle** dont les bornes sont les limites de  $f$  aux bornes de  $I$ .
- $f$  réalise une **bijection** de  $I$  sur  $f(I)$ .
- $f^{-1}$  est **continue et strictement monotone** sur  $f(I)$ , de même sens de variation que  $f$ .

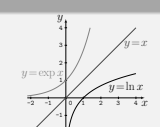
**Rappel** : les courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$  dans un repère orthonormal du plan sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .



Exemple 3.18 (Logarithme/exponentielle)

La fonction  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est **continue, strictement croissante** de limites  $-\infty$  et  $+\infty$  en  $0^+$  et  $+\infty$  respectivement.

Elle est donc **bijective**. Sa réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$ .



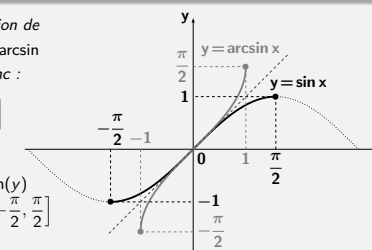
Proposition-définition 3.19 (Fonction arcsin)

La fonction **sin** réalise une **bijection** de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$  et l'on note **arcsin** sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \mapsto \arcsin(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



Proposition 3.20

**arcsin** est **continue, strictement croissante et impaire** sur  $[-1, 1]$ .

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x \end{cases}$$

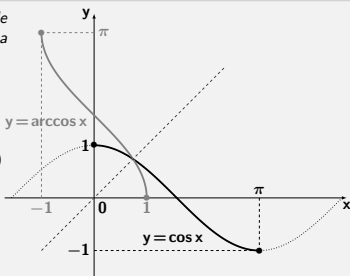
Proposition-définition 3.21 (Fonction arccos)

La fonction **cos** réalise une **bijection** de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$  et l'on note **arccos** sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$



Proposition 3.22

$$\begin{cases} \arccos \text{ est continue, strictement décroissante sur } [-1, 1]. \\ \forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x \\ \forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

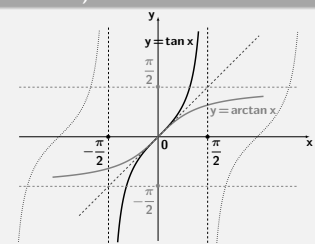
Proposition-définition 3.23 (Fonction arctan)

La fonction **tan** réalise une **bijection** de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$  et l'on note **arctan** sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x \mapsto \arctan(x)$$

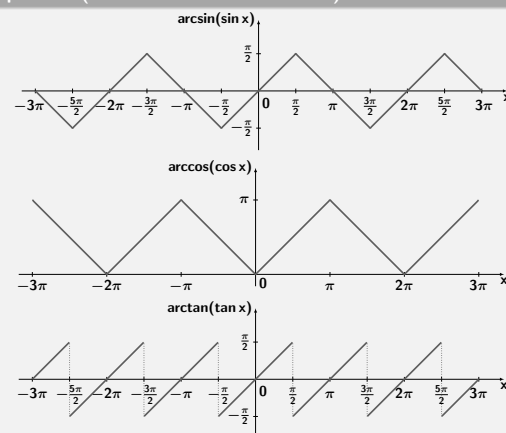
$$\text{et } \begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \end{cases}$$



Proposition 3.24

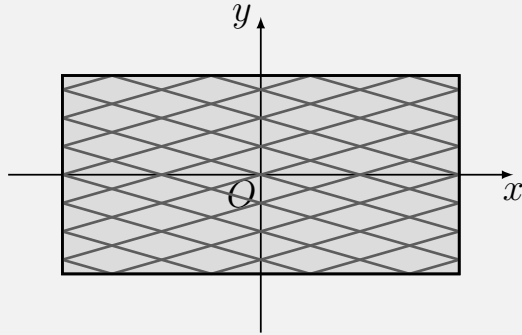
$$\begin{cases} \arctan \text{ est continue, strictement croissante et impaire sur } \mathbb{R}. \\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

Exemple 3.25 (Courbes en « dents de scie »)



Exemple 3.26 (Billard rectangulaire (facultatif))

$$\text{Courbe paramétrée } \begin{cases} x(t) = 2 \arcsin(\sin(7t)) \\ y(t) = \arcsin(\sin(4t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

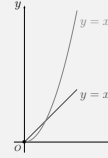


Problématique

Comparaison d'« ordre de grandeur » de deux fonctions au voisinage d'un point.

Exemple 1 : comparaison des fonctions identité et carré

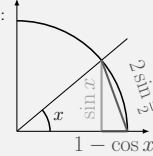
- $x^2$  est « beaucoup plus grand » que  $x$  lorsque  $x$  est « grand » ;
- $x^2$  est « beaucoup plus petit » que  $x$  lorsque  $x$  est « petit ».



Exemple 2 : comparaison des fonctions cosinus et sinus

Dans le triangle ci-contre, lorsque l'angle  $x$  est « petit » :

- les trois côtés sont « petits »,
- le côté vertical ( $\sin x$ ) et l'hypoténuse ( $2 \sin \frac{x}{2}$ ) sont du « même ordre de grandeur »,
- alors que le côté horizontal ( $1 - \cos x$ ) est « beaucoup plus petit ».



Outil de comparaison

Un outil mathématique pour comparer les « ordres de grandeur » de deux fonctions  $f$  et  $g$  au voisinage d'un point  $x_0 \in \mathbb{R}$  est la limite du rapport de  $f$  par  $g$ .

Trois cas de figure se présentent :

- soit la limite de  $\frac{f}{g}$  en  $x_0$  est finie non nulle, c'est donc un réel non nul  $\ell$ .  
Dans ce cas, la limite de  $\frac{f}{\ell g}$  en  $x_0$  vaut 1 ;
- soit la limite de  $\frac{f}{g}$  en  $x_0$  est infinie ou nulle.  
Lorsqu'elle est infinie, la limite de  $\frac{g}{f}$  en  $x_0$  est alors nulle ;
- soit la limite de  $\frac{f}{g}$  en  $x_0$  n'existe pas. (Cette situation ne sera pas considérée ici.)

Les deux premiers cas conduisent à deux situations génériques : on va développer deux notions de comparaisons associées aux cas où la limite de  $\frac{f}{g}$  en  $x_0$  vaut 0 ou 1.

Formellement :

- lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$ , on introduira la notion de « négligeabilité locale (ou asymptotique) » ;
- lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1$ , on introduira la notion d'« équivalence locale (ou asymptotique) ».

Définition 4.1 (Négligeabilité)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .  
On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $x_0$  lorsqu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x_0$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors  $f = o(g)$  ou encore  $f(x) = o(g(x))$  (notation de Landau).

Remarque : il s'agit d'une notation abusive, on devrait noter  $f \in o(g)$ .

Proposition 4.2 (Formulation simple)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ ,  $g$  ne s'annulant pas au voisinage de  $x_0$ . Alors  $f = o(g) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$ .

En particulier :  $f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$ .

Exemple 4.3 (Croissances comparées (cf. proposition 2.31))

- Si  $\alpha > \beta$ , alors  $x^\alpha = o(x^\beta)$  et  $x^\beta = o(x^\alpha)$ .
- Pour tous  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  :  $x^\alpha = o(e^{\beta x})$  et  $e^{\beta x} = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$   
 $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$  et  $|\ln x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$

Proposition 4.4 (Opérations)

Soit  $f, g, h$  et  $k$  quatre fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

$$\text{1 Transitivité : } \begin{cases} f = o(g) \\ g = o(h) \end{cases} \implies f = o(h).$$

2 Opérations :

- Multiplication par un réel :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f = o(g) \implies \alpha f = o(g)$ .

$$\text{Addition : } \begin{cases} f = o(h) \\ g = o(h) \end{cases} \implies f + g = o(h).$$

$$\text{Multiplication : } \begin{cases} f = o(h) \\ g = o(k) \end{cases} \implies f \times g = o(hk).$$

$$\text{Puissances : } f = o(h) \implies \begin{cases} \forall \alpha > 0, & |f|^\alpha = o(|h|^\alpha) \\ \forall \alpha < 0, & |h|^\alpha = o(|f|^\alpha) \end{cases}$$

Définition 4.5 (Équivalence)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .  
On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $x_0$  lorsqu'il existe une fonction  $\varphi$  définie sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x_0$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1.$$

On note alors  $f \sim g$  ou encore  $f(x) \sim g(x)$  (notation de Landau).

Proposition 4.6 (Formulation simple)

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

- Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $x_0$ , alors

$$f \sim g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- On a  $f \sim 0 \iff f$  est nulle au voisinage de  $x_0$ .

Remarque 4.7

$f \sim g$  n'implique pas nécessairement l'existence d'une limite en  $x_0$  pour  $f$  et  $g$ .  
Mais si ces limites existent, alors elles sont égales.

Proposition 4.8 (Relation d'équivalence)

Soit  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

- Réflexivité :  $f \sim f$ .
- Symétrie :  $f \sim g \iff g \sim f$ .
- Transitivité :  $\left[ \begin{matrix} f \sim g \\ g \sim h \end{matrix} \right] \implies f \sim h$ .

Proposition 4.9 (Limites et équivalence)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

- $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff f \sim \ell$ .
- $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \right] \implies f \sim g$ .
- $\forall \ell \in \mathbb{R}, \quad \left[ f \sim g \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \right] \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

Remarque 4.10

Lorsque  $f$  admet une limite nulle ou infinie en  $x_0$ , la notion d'équivalence est non-triviale... Dans ce cas, un problème intéressant est de rechercher une fonction simple  $g$  tel que  $f \sim g$ .

Proposition 4.11 (Équivalence et négligeabilité)

- $f \sim g \iff (f - g) = o(g)$  (et aussi  $o(f)$ ). On écrit alors  $g = f + o(f)$ .
- Si  $\left[ \begin{matrix} f \sim g \\ g = o(h) \end{matrix} \right]$  ou si  $\left[ \begin{matrix} f = o(g) \\ g \sim h \end{matrix} \right]$ , alors  $f = o(h)$ .
- Si  $f \sim g$  et si  $g$  est non nulle au voisinage de  $x_0$ , alors  $f$  et  $g$  sont de même signe au voisinage de  $x_0$ .

Remarque 4.12 (Notion relative/absolue)

On fera attention de ne pas confondre  $f \sim g$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g) = 0$ . En effet :

$$f \sim g \iff f = g + o(g) \quad \text{alors que} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f - g) = 0 \iff f = g + o(1).$$

- Contre-exemple :  $x^2 + x \sim x^2$  alors que  $(x^2 + x) - x^2 = x \not\sim 0$ .  
 $(x^2 - x) \rightarrow 0$  alors que  $x^2 \not\sim x$ .

Proposition 4.13 (Multiplication/division/puissances)

Soit  $f, g, h, k$  des fonctions définies au voisinage de  $x_0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Si  $f \sim h$  et  $g \sim k$ , alors :
- $f \times g \sim h \times k$
  - $\frac{f}{g} \sim \frac{h}{k}$
  - $|f|^\alpha \sim |h|^\alpha$

Définition 4.14 (Dérivabilité)

Soit  $f$  une application d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point situé à l'intérieur de  $I$ .

- On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si l'application  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite finie en  $x_0$ .
- On note alors cette limite  $f'(x_0)$  et on l'appelle le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Proposition 4.15 (Dérivabilité et comparaison)

Supposons la fonction  $f$  dérivable en  $x_0$ . Alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Cette relation fournit un développement limité d'ordre 1 en  $x_0$ .

En conséquence :

- Si  $f'(x_0) \neq 0$  alors :  $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0)$ .
- Si  $f'(x_0) = 0$  alors :  $f(x) - f(x_0) = o(x - x_0)$ .

Ce résultat permet d'établir la plupart des équivalents usuels à connaître :

Exemple 4.16 (Équivalents usuels)

1 Fonctions exponentielle/logarithme/puissance :

$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$     $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$     $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$

2 Fonctions trigonométriques :

$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$     $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$     $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$   
 $\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$     $\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

3 Fonctions hyperboliques :

$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$     $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$     $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$   
 $\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$     $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$

En règle générale, on n'ajoute pas d'équivalents, c'est-à-dire :

$(f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2) \text{ n'implique pas } f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2.$

On a toutefois les résultats suivants :

Proposition 4.17 (Somme et équivalence)

- 1 Si  $f \underset{x_0}{\sim} g$  et  $h = o(g)$  alors  $f + h \underset{x_0}{\sim} g$ .
- 2 Si  $f = o(g)$  alors  $f + g \underset{x_0}{\sim} g$ .
- 3 Soit  $f_1, f_2$  et  $g$  trois fonctions définies au voisinage de  $x_0$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  deux réels tels que

$f_1 \underset{x_0}{\sim} \alpha_1 g$  et  $f_2 \underset{x_0}{\sim} \alpha_2 g.$

Il y a alors deux cas à distinguer pour la somme  $f_1 + f_2$  :

- Si  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$  alors  $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} (\alpha_1 + \alpha_2)g.$
- Si  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  alors  $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} o(g).$

Exemple 4.18 (Fonctions polynômes / fractions rationnelles)

1 Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $m \leq n$ ,  $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$  des réels tels que  $a_m \neq 0$  et  $a_n \neq 0$ , et  $P$  la fonction polynôme définie pour tout réel  $x$  par  $P(x) = \sum_{k=m}^n a_k x^k$ . Alors :

$P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_m x^m$  et  $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$

Exemple : pour  $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$ , on a  $P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$  et  $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} 3x^4.$

2 Soit  $P$  une fonction polynôme non nulle et  $\alpha$  une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $\mu$ . Alors :

$P(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} (x - \alpha)^\mu.$

Exemple : pour  $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$ , on a  $P(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 2(x - 1)^2.$

3 Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels,  $a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, \dots, a_0$  et  $b_q, b_{q-1}, b_{q-2}, \dots, b_0$  des réels tels que  $a_p \neq 0$  et  $b_q \neq 0$ , et  $P$  et  $Q$  les fonctions polynômes définies pour tout réel  $x$  par  $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$  et  $Q(x) = \sum_{k=0}^q b_k x^k$ . Alors :

$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}.$

Exemple 4.19 (Une fonction hyperbolique)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \operatorname{sh} x + \alpha \operatorname{th} x$ .

1 Analyse en 0 : on a  $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

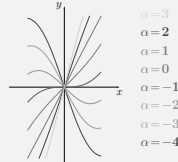
- Si  $\alpha \neq -1$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (\alpha + 1)x$ .
- Si  $\alpha = -1$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} o(x)$ .

Dans ce cas :

$f(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{th} x = \operatorname{th} x (\operatorname{ch} x - 1).$

Or  $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ .

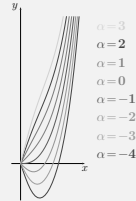
On obtient alors  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{2}$ .



2 Analyse en +∞ : on a  $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$  et  $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

Or  $1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{e^x}{2}\right)$ .

On en déduit que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ .



Exemple 4.20 (Un calcul de limite/asymptote)

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Analyse en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - cx$ .

1 On a  $x^2 + ax + b \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  puis  $\sqrt{x^2 + ax + b} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

• Si  $c \neq 1$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (1-c)x$ ,

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ .

• Si  $c = 1$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o(x)$ .

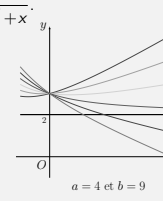
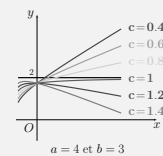
Dans ce cas,  $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - x = \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 + ax + b} + x}$ .

Or  $\sqrt{x^2 + ax + b} + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$ .

On obtient alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$

(on a  $f(x) = 0$  lorsque  $a = b = 0$  et  $c = 1$ )

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{2}$ .



Exemple 4.20 (Un calcul de limite/asymptote)

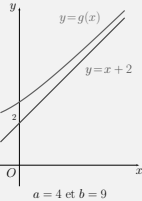
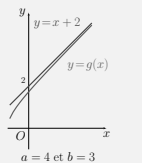
Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Analyse en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - cx$ .

2 Application : considérons la fonction  $g$  définie par

$g(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$ .

• En choisissant  $c = 1$  dans  $f$ , on voit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x + \frac{a}{2})] = 0$  donc  $\mathcal{C}_g$  admet une asymptote  $\mathcal{D}$  en  $+\infty$  d'équation  $y = x + \frac{a}{2}$ .

• Puis  $g(x) - (x + \frac{a}{2}) = \frac{b - \frac{a^2}{4}}{\sqrt{x^2 + ax + b} + (x + \frac{a}{2})}$   
 $\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b - \frac{a^2}{4}}{2x}$  si  $b \neq \frac{a^2}{4}$   
 (on a  $g(x) = x + \frac{a}{2}$  lorsque  $b = \frac{a^2}{4}$ ).  
 On en déduit que  $\mathcal{C}_g$  est au-dessus (resp. au-dessous) de  $\mathcal{D}$  au voisinage de  $+\infty$  lorsque  $b > \frac{a^2}{4}$  (resp.  $b < \frac{a^2}{4}$ ).



Proposition 4.21 (Composition « à droite »)

Soit  $x_0$  et  $t_0$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$  et  $\varphi$  une fonction telle que  $f \circ \varphi$  et  $g \circ \varphi$  existent au voisinage de  $t_0$ .

Si  $f \underset{x_0}{\sim} g$  et  $\lim_{t_0} \varphi = x_0$ , alors  $f \circ \varphi \underset{t_0}{\sim} g \circ \varphi$ .

Remarque 4.22 (Composition « à gauche »)

Il n'y a pas de règle générale pour la composition « à gauche » :

En général, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$  et  $\psi$  une fonction telle que  $\psi \circ f$  et  $\psi \circ g$  existent au voisinage de  $x_0$ ,

$f \underset{x_0}{\sim} g \not\Rightarrow \psi \circ f \underset{x_0}{\sim} \psi \circ g.$

Contre-exemple : • On a  $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  mais  $e^{x^2+x} \not\sim e^{x^2}$ .

• On a  $1 + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$  mais  $\ln(1 + x^2) \not\sim \ln(1 + x)$ .

Proposition 4.23 (Cas de l'exponentielle et du logarithme (facultatif))

1 Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $x_0$ .

$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g \iff \lim_{x_0} (f - g) = 0.$

2 Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et strictement positives au voisinage de  $x_0$ .

Si  $f \underset{x_0}{\sim} g$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in [0, +\infty[ \setminus \{1\}$ , alors :  $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$ .

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

**Continuité**  
**Discontinuité**

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/\\_alalach/diaporamas/diaporama\\_continuite/continuite0.html](http://math.univ-lyon1.fr/_alalach/diaporamas/diaporama_continuite/continuite0.html)

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

**Dérivabilité**

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/\\_alalach/diaporamas/diaporama\\_lhopital/Lhopital0.html](http://math.univ-lyon1.fr/_alalach/diaporamas/diaporama_lhopital/Lhopital0.html)

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

**Suites récurrentes**

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/\\_alalach/diaporamas/diaporama\\_suites\\_recurrentes/suites\\_recurrentes0.html](http://math.univ-lyon1.fr/_alalach/diaporamas/diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html)

Notions à retenir

- Maîtrise de la valeur absolue
- Borne supérieure/inférieure
  - \* Identification et détermination
- Limites
  - \* Maîtrise des techniques de calculs
  - \* Théorème de la limite monotone
  - \* Recherche d'asymptote
  - \* Limites usuelles à connaître...
- Continuité ponctuelle
  - \* Prolongement par continuité
  - \* Opérations
  - \* Théorèmes fondamentaux (TVI/TVE/théorème de la bijection)
- Fonctions trigonométriques réciproques
  - \* Graphes et quelques propriétés à connaître
  - \* Maîtrise de la réciprocity



## Notions à retenir

- Notions de négligeabilité et d'équivalence asymptotiques
  - \* Comparaison locale de fonctions, ordre de grandeur local
  - \* Exemples usuels à connaître
  - \* Détermination d'équivalents par opérations diverses
  - \* Utilisation pour les calculs de limites
  - \* Étude de l'allure locale d'une courbe
  - \* Détermination de branches infinies, d'asymptotes