INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Limites et continuité
Comparaison de fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1er cycle, 1re année

Sommaire

Sommaire

Définition 1.1 (Valeur absolue)

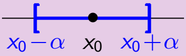
*On appelle **valeur absolue** d'un réel x, le nombre réel noté $|x|$ défini par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

*Sur la droite représentant les nombres réels, $|x|$ est la **distance** entre le point d'abscisse x et l'origine.*

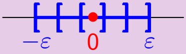
Proposition 1.2 (Propriétés)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x \times y| = |x| \times |y|,\ \ |x^n| = |x|^n$ *et, si* $y \neq 0,\ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} |x \pm y| \leqslant |x| + |y| & \textit{(1}^{re}\textit{ inégalité triangulaire)} \\ \big||x| - |y|\big| \leqslant |x \mp y| & \textit{(2}^{e}\textit{ inégalité triangulaire)} \end{cases}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} |x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \\ |x - x_0| \leqslant \alpha \iff x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha \end{cases}$



5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \left[\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| \leqslant \varepsilon\right) \iff x = 0\right]$

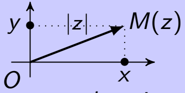
   Autre formulation : $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$



Définition 1.3 (Module)

*On appelle **module** d'un complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x = \Re\mathrm{e}(z)$ et $y = \Im\mathrm{m}(z)$, le nombre réel noté $|z|$ défini par :*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



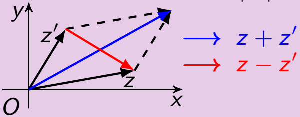
*Dans le plan représentant les nombres complexes, $|z|$ est la **distance** entre le point de coordonnées (x, y) (ou d'**affixe** z) et l'origine.*

Proposition 1.4 (Propriétés (facultatif))

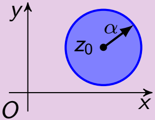
① $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \iff z = 0$

② $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |z \times z'| = |z| \times |z'|,\ |z^n| = |z|^n$ *et, si* $z' \neq 0,\ \left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

③ $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'| \\ ||z| - |z'|| \leqslant |z \mp z'| \end{cases}$ *inégalités triangulaires*

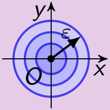


④ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (z, z_0) \in \mathbb{C}^2,\ |z - z_0| \leqslant \alpha \iff M(z) \in \mathcal{D}_{M(z_0),\alpha}$



⑤ $\forall z \in \mathbb{C},\ \left[\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |z| \leqslant \varepsilon\right) \iff z = 0\right]$

Autre formulation : $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{O,\varepsilon} = \{O\}$



Définition 1.5 (Majorant/Minorant)

1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.*
   *On dit que α est un **majorant** de A ou que α **majore** A si $\forall x \in A,\ x \leqslant \alpha$.*
   *On dit que α est un **minorant** de A ou que α **minore** A si $\forall x \in A,\ x \geqslant \alpha$.*
2. *Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui admet (au moins) un majorant (resp. un minorant), on dit qu'elle est **majorée** (resp. **minorée**).*
3. *Si A est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**, ce qui équivaut à : $\exists M > 0,\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant M$.*
4. *On dit que A admet un **plus grand élément** (resp. un **plus petit élément**) α lorsque α est **à la fois** un majorant (resp. un minorant) de A **et** un élément de A. S'il existe, α s'appelle aussi le **maximum** (resp. le **minimum**) de A et se note $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).*

Remarque 1.6 (Cas des complexes)

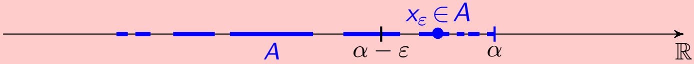
On peut étendre la notion d'ensemble borné au cas des nombres complexes en remplaçant la **valeur absolue** par le **module :**
Soit A une partie non vide de $\mathbb{C}$. On dit que A est **bornée** lorsque

$$\exists M > 0,\ \forall z \in A,\ |z| \leqslant M.$$

Théorème-définition 1.7 (Borne supérieure/inférieure)

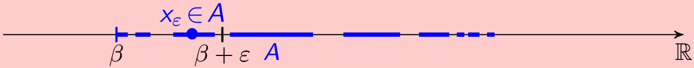
1. *Pour toute partie* ***non vide et majorée*** *A de $\mathbb{R}$, il existe un* ***unique*** *réel α qui est* ***le plus petit des majorants*** *de A ; ce réel s'appelle la* ***borne supérieure*** *de A et on le note $\sup(A)$. Autrement dit :*

$$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A, \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant \alpha \end{cases}$$



2. *Pour toute partie* ***non vide et minorée*** *A de $\mathbb{R}$, il existe un* ***unique*** *réel β qui est* ***le plus grand des minorants*** *de A ; ce réel s'appelle la* ***borne inférieure*** *de A et on le note $\inf(A)$. Autrement dit :*

$$\beta = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, \quad \beta \leqslant x \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A, \quad \beta \leqslant x_\varepsilon < \beta + \varepsilon \end{cases}$$



Par convention,

- *si A est une partie* ***non vide non majorée****, on pose $\sup(A) = +\infty$;*
- *si A est une partie* ***non vide non minorée****, on pose $\inf(A) = -\infty$;*
- *on pose également $\sup(\varnothing) = -\infty$ et $\inf(\varnothing) = +\infty$.*

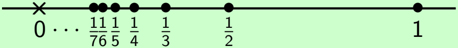
Exemple 1.8

1. Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont **ni majorés ni minorés**, ils admettent $-\infty$ et $+\infty$ pour borne inférieure et borne supérieure.

2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

   - Les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ sont **bornés** et admettent tous a pour borne inférieure et b pour borne supérieure.
   - L'intervalle $[a, b]$ admet a pour plus petit élément et b pour plus grand élément, alors que l'intervalle $]a, b[$ n'admet ni plus petit ni plus grand élément.
   - Les intervalles $[a, +\infty[$ et $]a, +\infty[$ sont **minorés** mais **pas majorés,** ils admettent a pour borne inférieure et $+\infty$ pour borne supérieure.

3. Soit $A = \left\{ \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.



   - L'ensemble A est non vide, majoré par 1 et minorée par 0.
   - On a $1 \in A$ donc $\sup(A) = \max(A) = 1$.
   - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} > 0$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ (choisir un naturel $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$). Donc $\inf(A) = 0$. Or $0 \notin A$, donc A n'a pas de plus petit élément.

Définition 1.9 (Bornes sup/inf d'une fonction)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- *On dit que f est **majorée** (resp. **minorée**) sur D si*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad f(x) \leqslant \alpha \quad (\textit{resp. } f(x) \geqslant \alpha).$$

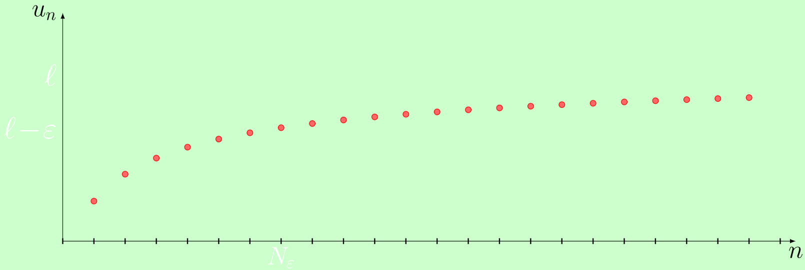
- *Si f est **majorée** sur D alors* $\sup\{f(x), x \in D\}$ *est un nombre **fini** et se note* $\sup\limits_{x \in D} f(x)$.
- *Si f est **minorée** sur D alors* $\inf\{f(x), x \in D\}$ *est un nombre **fini** et se note* $\inf\limits_{x \in D} f(x)$.
- *Si f est une fonction **non majorée**, on pose par convention* $\sup\limits_{x \in D} f(x) = +\infty$.
- *Si f est une fonction **non minorée**, on pose par convention* $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -\infty$.
- *De manière analogue, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, on note*

$$\sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \quad \textit{et} \quad \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

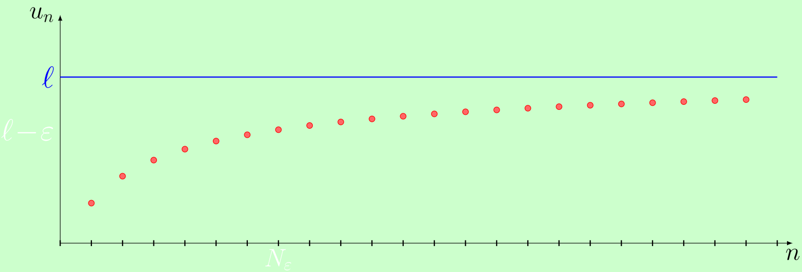
1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



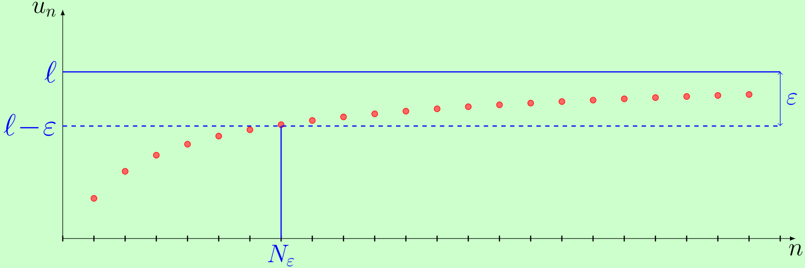
Le nombre ℓ est caractérisé par

$$[\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \leqslant \ell]$$

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

❶ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



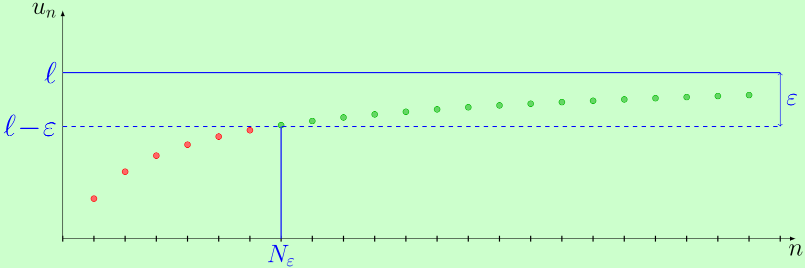
Le nombre ℓ est caractérisé par

$$[\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \leqslant \ell] \quad \text{et} \quad [\forall \varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad u_{N_\varepsilon} > \ell-\varepsilon].$$

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



Le nombre ℓ est caractérisé par

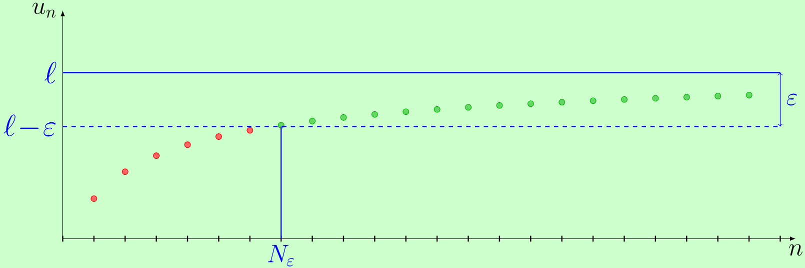
$$[\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \leqslant \ell] \quad \text{et} \quad [\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad u_{N_\varepsilon} > \ell-\varepsilon].$$

Par croissance, on a $\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad [n>N_\varepsilon \Longrightarrow \ell-\varepsilon<u_n\leqslant\ell]$.

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



Le nombre ℓ est caractérisé par

$$[\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \leqslant \ell] \quad \text{et} \quad [\forall \varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad u_{N_\varepsilon} > \ell-\varepsilon].$$

Par croissance, on a $\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad [n>N_\varepsilon \Longrightarrow \ell-\varepsilon<u_n\leqslant\ell]$.

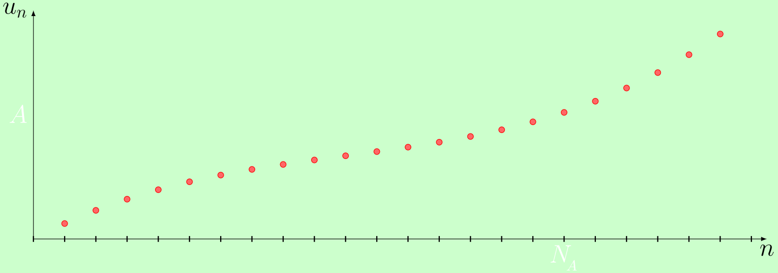
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** et admet ℓ pour limite.

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

❷ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell = +\infty$ (par convention).

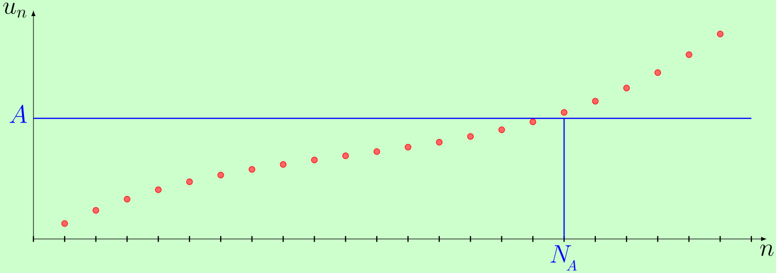


On a

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

❷ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell = +\infty$ (par convention).



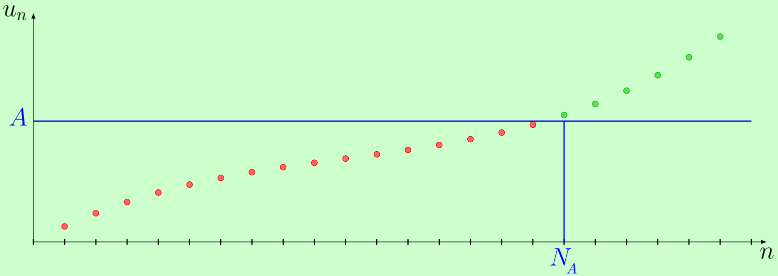
On a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad u_{N_A} > A.$$

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell = +\infty$ (par convention).



On a

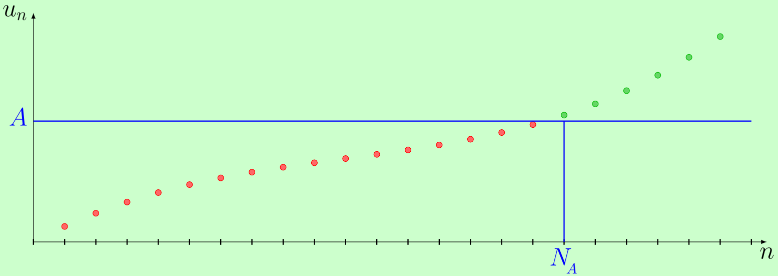
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad u_{N_A} > A.$$

Par croissance, on a $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [n > N_A \Longrightarrow u_n > A]$.

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

❷ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est **pas majorée**, alors $\ell = +\infty$ (par convention).



On a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad u_{N_A} > A.$$

Par croissance, on a $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [n > N_A \Longrightarrow u_n > A]$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** et admet $+\infty$ pour limite.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 1.11 (Théorème de la limite monotone)

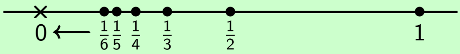
1. *Toute suite* ***croissante*** *et* ***majorée*** *est* ***convergente****.*
   Toute suite ***croissante*** *et* ***non majorée*** *est* ***divergente*** *de limite* $+\infty$*.*
2. *Toute suite* ***décroissante*** *et* ***minorée*** *est* ***convergente****.*
   Toute suite ***décroissante*** *et* ***non minorée*** *est* ***divergente*** *de limite* $-\infty$*.*

De manière unifiée :

- *si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle* ***croissante****, alors* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *;*
- *si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle* ***décroissante****, alors* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$*.*

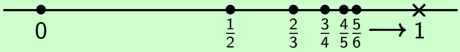
Exemple 1.12 (Suite des inverses)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$.



   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante et minorée** e.g. par 0.
   Elle est donc **convergente** et l'on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = 0$.

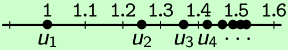
2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.



   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante et majorée** e.g. par 1.
   Elle est donc **convergente** et l'on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = 1$.

Exemple 1.13 (Deux séries de Riemann)

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.



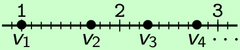
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante.**
- On a $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,

  donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 2 - \frac{1}{n} < 2$.

  Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée.**

En conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente.**

2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.



- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante.**
- On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$,

  donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$.

  Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas **majorée.**

En conclusion, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = +\infty$.

Sommaire

Un peu de vocabulaire qui sera utilisé dans la suite :

Définition 2.1 (Notion de voisinage)

1. *On dit qu'une propriété dépendant d'un réel x est vraie* ***au voisinage de x_0*** *lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$ (ce qui ne l'empêche pas d'être éventuellement vraie pour x_0 également).*
2. *On dit qu'une propriété est vraie* ***au voisinage de $+\infty$*** *(resp. $-\infty$) lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme $I =]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) avec $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x \in I$.*

Définition 2.2 (Droite réelle achevée)

On appelle ***droite réelle achevée*** *l'ensemble des réels auquel on adjoint $+\infty$ et $-\infty$. Cet ensemble est noté $\overline{\mathbb{R}}$. Formellement :*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

Dans toute la suite, sauf mention contraire, f désignera une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Définition 2.3 (Limite finie en l'infini)

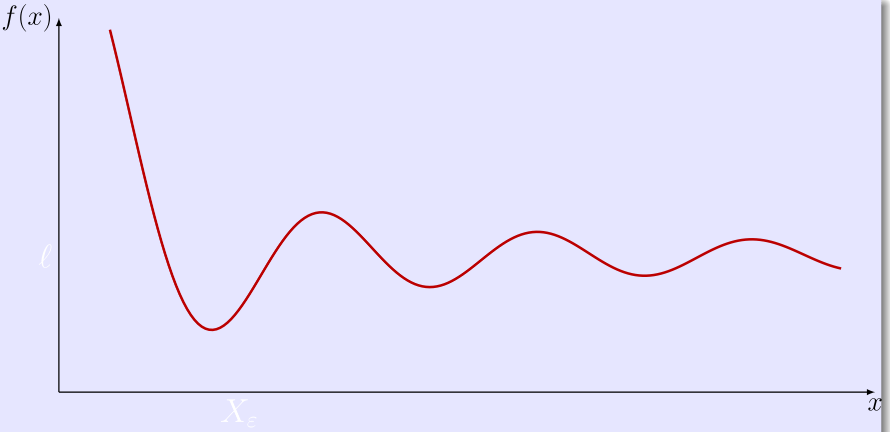
1. *Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.*

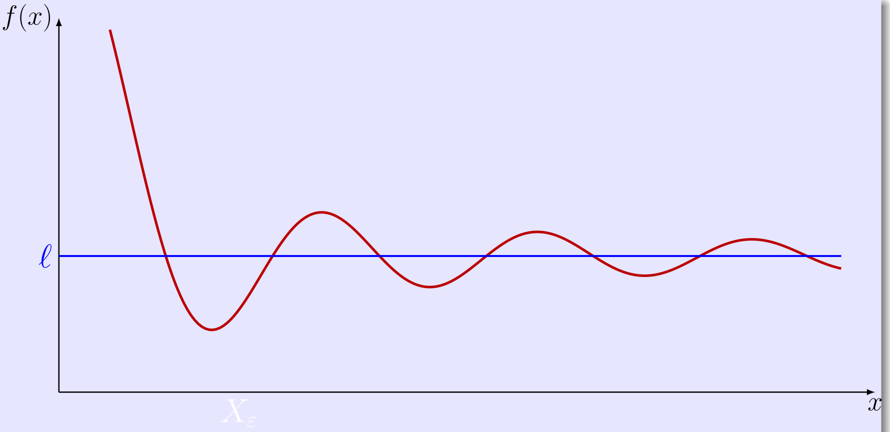
   *On dit que f **admet pour limite un réel ℓ en $+\infty$** lorsque*
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x > X_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
   *Si une telle limite existe, alors elle est **unique.***

   On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$, ou encore $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

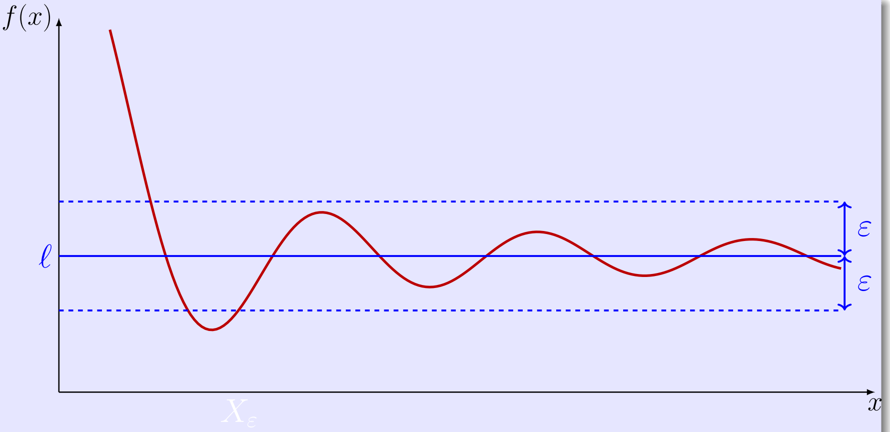
2. *Soit une fonction f définie au voisinage de $-\infty$.*

   *On dit que f **admet pour limite un réel ℓ en $-\infty$** lorsque*
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x < X_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
   On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$, ou encore $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $f \underset{-\infty}{\longrightarrow} \ell$.


$f(x)$
ℓ
X_ε
x



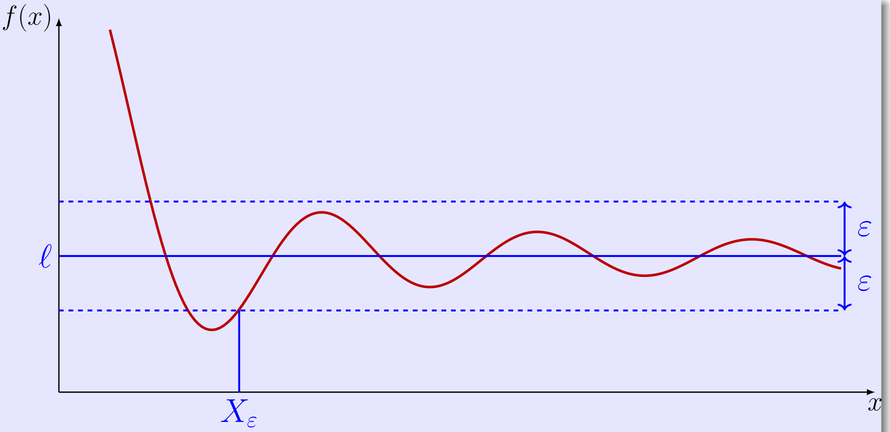
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

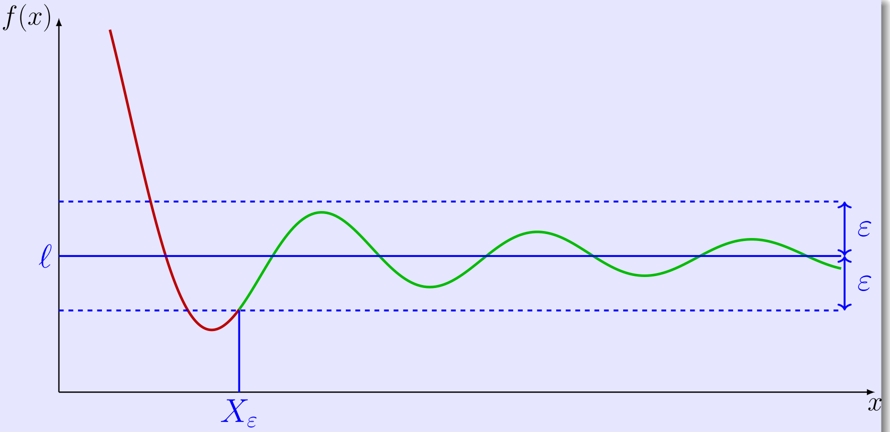
$\forall \varepsilon > 0,$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

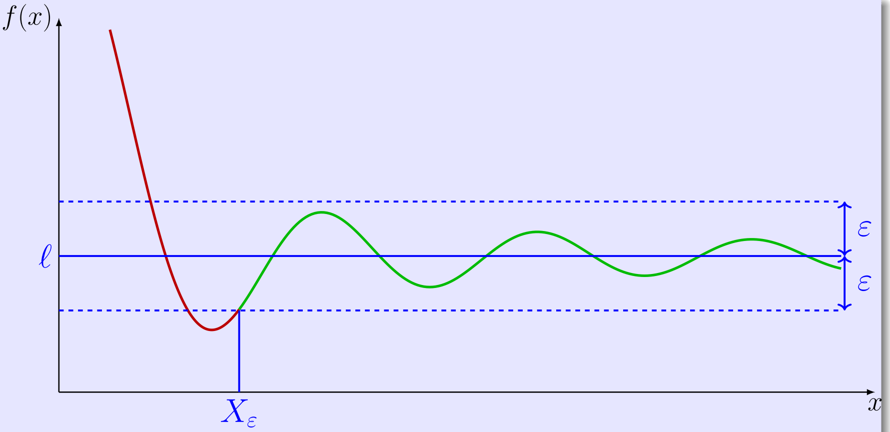
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R},$



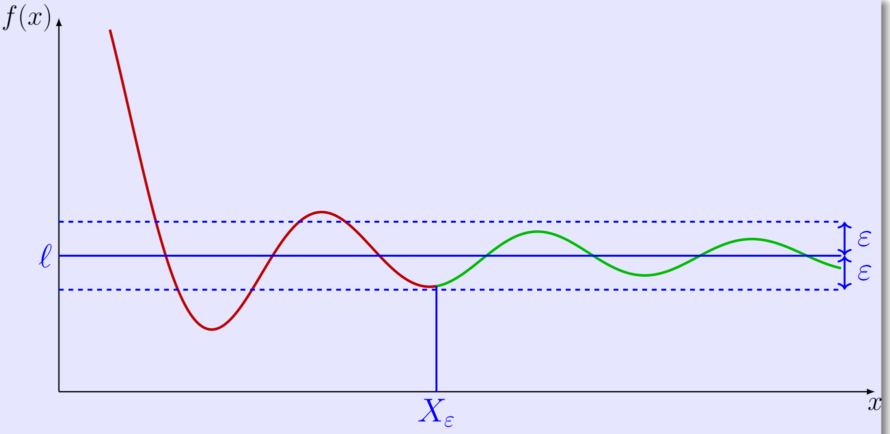
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

$$\iff$$

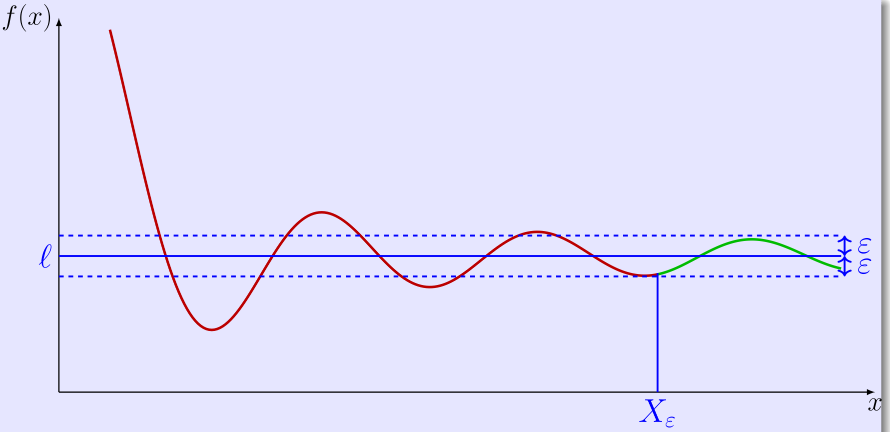
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad [x > X_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$



Le réel X_ε dépend naturellement de ε.



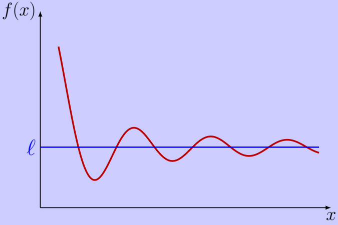
Le réel X_ε dépend naturellement de ε.



Le réel X_ε dépend naturellement de ε.

Définition 2.4 (Asymptote horizontale)

Lorsque $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$, *on dit que la droite d'équation* $y = \ell$ *est une* ***asymptote (horizontale)*** *à la courbe représentative de* f .

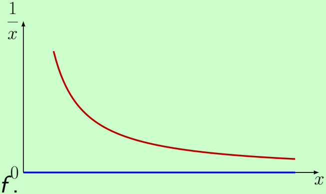


Exemple 2.5 (Fonction « inverse »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

On a $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, donc l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f.



Définition 2.6 (Limite infinie en l'infini)

Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.

1. *On dit que f* ***admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$*** *lorsque*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists X_A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x > X_A \Rightarrow f(x) > A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$*, ou encore* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *ou* $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. *On dit que f* ***admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$*** *lorsque*

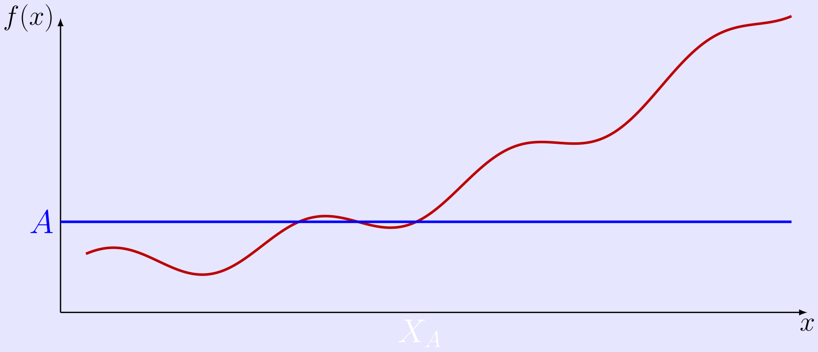
$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists X_B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad x > X_B \Rightarrow f(x) < B.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$*, ou encore* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *ou* $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque 2.7

Les définitions précédentes s'adaptent aisément au cas d'une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et qui peut donc avoir pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

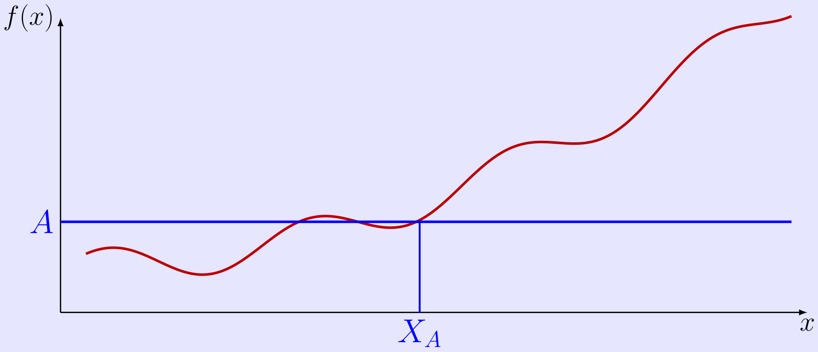
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

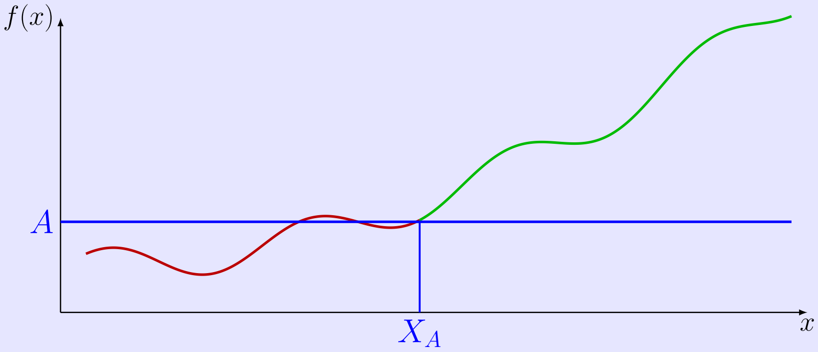
$\forall A \in \mathbb{R}$,



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists X_A \in \mathbb{R},$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists X_A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D_f, \quad [x > X_A \Longrightarrow f(x) > A]$$

Définition 2.8 (Limite d'une suite)

1. *On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un nombre $\boldsymbol{\ell}$ (ou **tend vers $\boldsymbol{\ell}$**) lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

   *On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.*
   *Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.*

2. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **a pour limite $+\infty$** (ou **tend vers $+\infty$**) si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N_A \Longrightarrow u_n > A.$$

3. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **a pour limite $-\infty$** (ou **tend vers $-\infty$**) si*

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists N_B \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N_B \Longrightarrow u_n < B.$$

Définition 2.9 (Limite infinie en un réel)

Soit x_0 un réel tel que : $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f.

1. *On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en x_0** lorsque :*

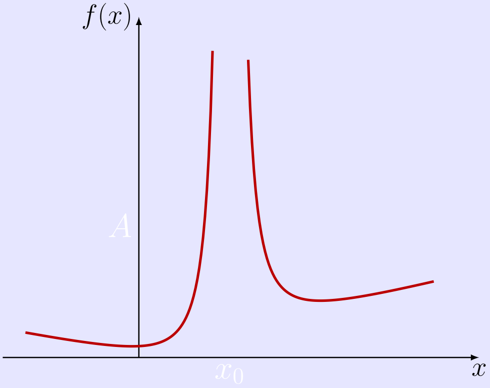
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha_A > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha_A \Longrightarrow f(x) > A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$*, ou encore* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ *ou* $f \underset{x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

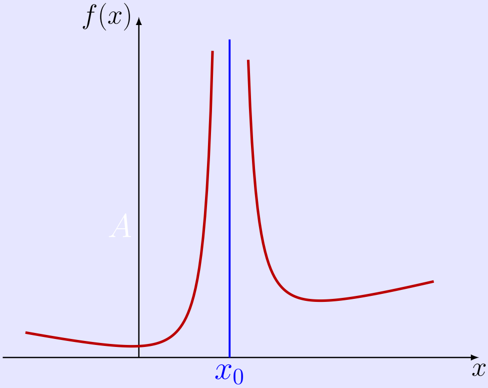
2. *On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en x_0** lorsque :*

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha_B > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha_B \Longrightarrow f(x) < B$$

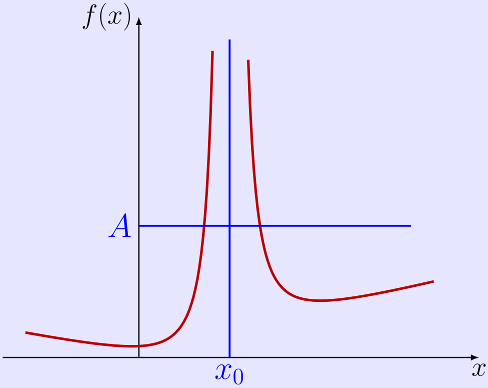
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$*, ou encore* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$ *ou* $f \underset{x_0}{\longrightarrow} -\infty$.



$f(x)$
A
x_0
x



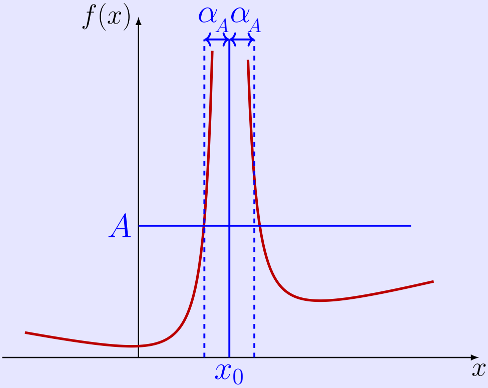
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

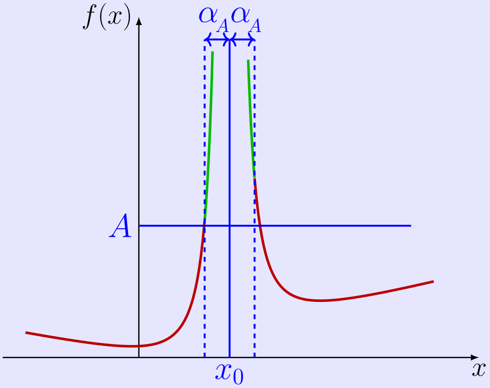
$\forall A \in \mathbb{R},$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

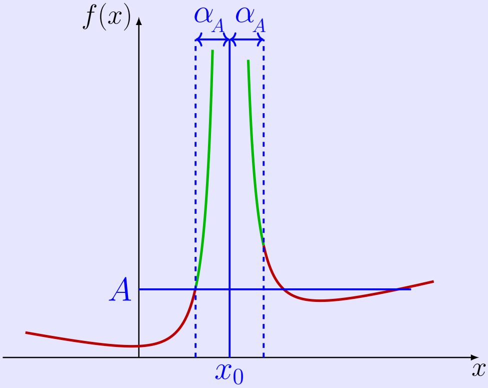
$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha_A > 0,$



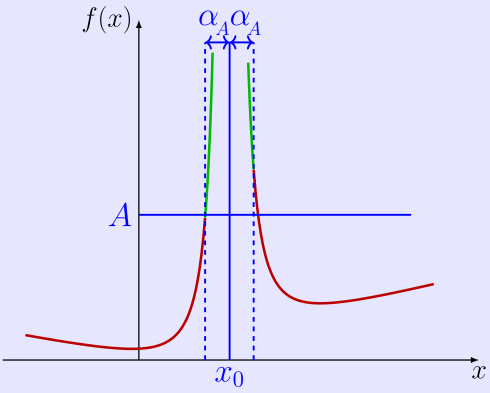
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\iff$$

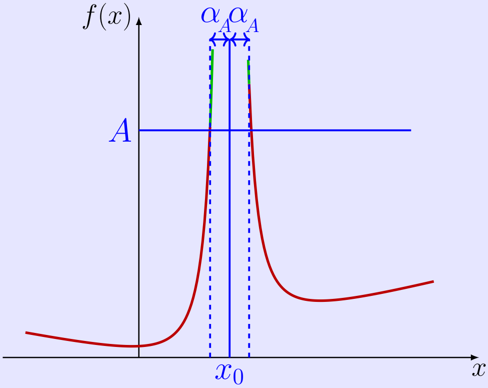
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha_A > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad [|x - x_0| < \alpha_A \Longrightarrow f(x) > A]$$



Le réel α_A dépend naturellement de A.



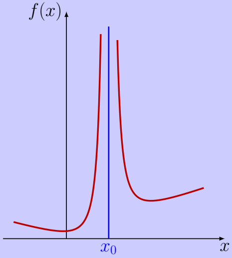
Le réel α_A dépend naturellement de A.



Le réel α_A dépend naturellement de A.

Définition 2.10 (Asymptote verticale)

Lorsque $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$*, on dit que la droite d'équation* $x = x_0$ *est une* ***asymptote (verticale)*** *à la courbe représentative de* f*.*

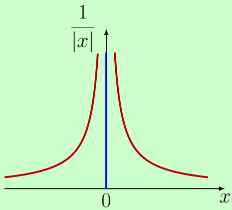


Exemple 2.11 (Fonction « inverse absolue »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{|x|}.$$

On a $\lim\limits_{0} f = +\infty$, donc l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.



Définition 2.12 (Limite finie en un réel)

Soit x_0 un réel tel que : $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f.

*On dit que f **admet le réel ℓ pour limite en x_0** lorsque*

- *première formulation :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon;$$

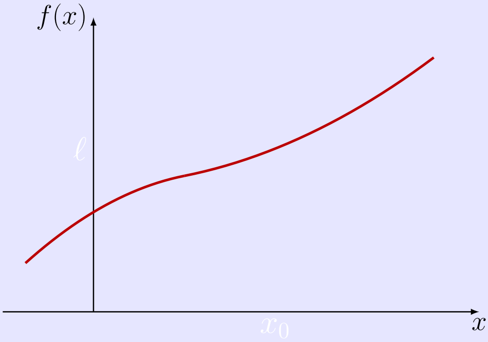
- *deuxième formulation :*

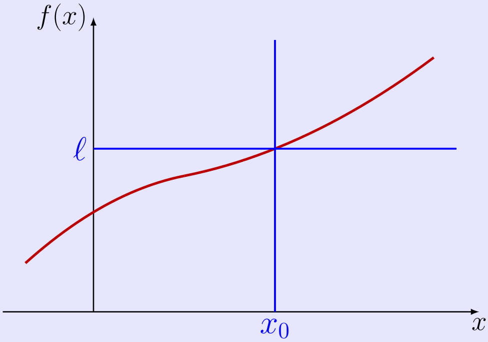
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad x \in]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[;$$

- *troisième formulation :*

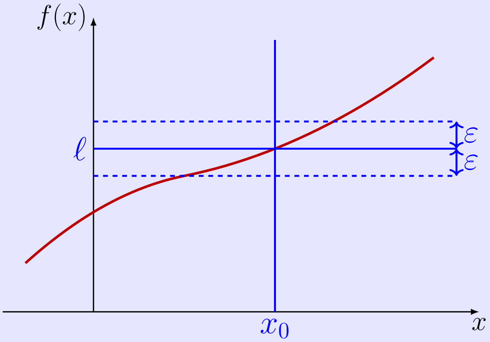
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_\varepsilon > 0, \quad f(]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[\cap D_f) \subset]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$, ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ ou $f \underset{x_0}{\longrightarrow} \ell$.


$f(x)$
ℓ
x_0
x



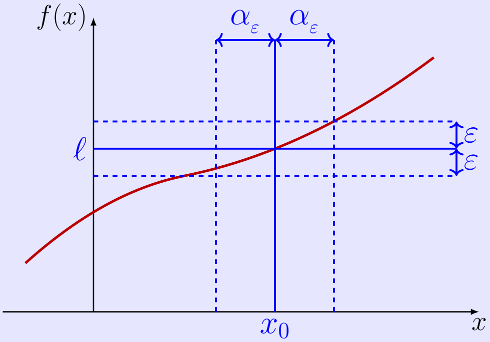
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

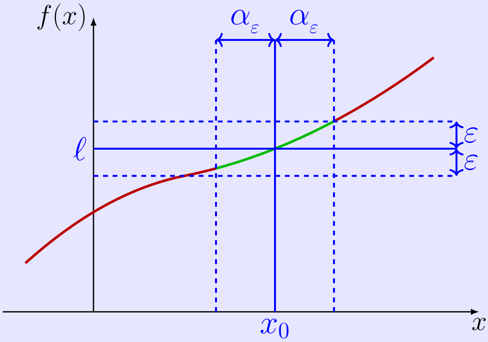
$\forall \varepsilon > 0,$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\iff$$

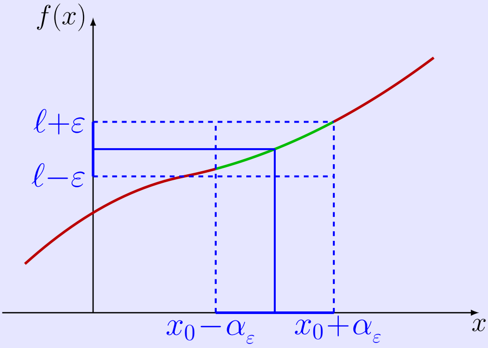
$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_\varepsilon > 0,$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad [|x - x_0| < \alpha_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

$$\iff$$

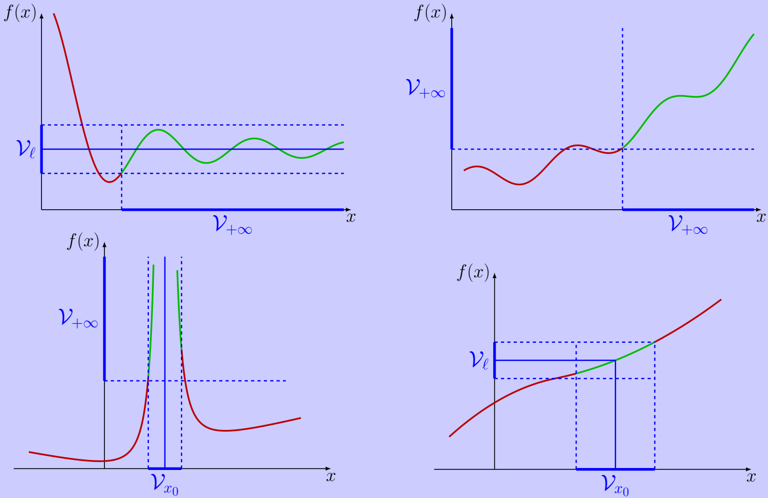
$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\alpha_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad [|x - x_0| < \alpha_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$

ou encore $x \in]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[\implies f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

ou encore $f(]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[\cap D_f) \subset]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Définition 2.13 (Unification des quatre cas)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
La fonction f ***admet ℓ pour limite en x_0*** *lorsque :*
pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 tel que $f(\mathcal{V}_{x_0} \cap \mathcal{D}_f) \subset \mathcal{V}_\ell$.



Proposition 2.14 (Unicité/continuité)

1. *Si f admet une limite en x_0 alors cette limite est **unique**.*
2. *Si f admet une limite **finie** en x_0 alors f est **bornée** au voisinage de x_0.*
3. *Si $x_0 \in D_f$ et si f admet pour limite ℓ en x_0 alors $\ell = f(x_0)$.*
   *On dit alors que f est **continue** en x_0 (cf. § 3).*

Remarque 2.15 ((facultatif))

1. Lorsque $x_0 \in D_f$ on définit parfois $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$ par

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad \mathbf{0 <} |x - x_0| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

   On peut définir de même $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = +\infty$.

2. Les définitions 2.3 et 2.12 peuvent s'étendre au cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (et même de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ pour la 2.12...) en remplaçant les **valeurs absolues** par des **modules.** On a alors le résultat ci-dessous.

   Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\ell_1 + \mathrm{i}\ell_2 \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 + \mathrm{i}\ell_2 \Longleftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \ell_1 \quad \textbf{et} \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \ell_2 \right).$$

Définition 2.16

1. *On dit que f* ***admet le réel $\boldsymbol{\ell}$ pour limite à gauche en $\boldsymbol{x_0}$*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad x_0 - \alpha_\varepsilon < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

2. *On dit que f* ***admet*** $+\infty$ *(resp. $-\infty$)* ***pour limite à gauche en $\boldsymbol{x_0}$*** *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0, \forall x \in D_f, x_0 - \alpha_A < x < x_0 \Longrightarrow f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < A).$$

On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

On définit de la même manière la notion de **limite à droite** : il suffit, dans les définitions ci-dessus, de remplacer $x_0 - \alpha_\varepsilon < x < x_0$ par $x_0 < x < x_0 + \alpha_\varepsilon$.

Proposition 2.17

1. *Si $x_0 \notin D_f$, f admet une limite en x_0 ssi f admet une limite* ***à droite*** *et une limite* ***à gauche*** *en x_0 et si ces limites sont* ***égales.***

2. *Si $x_0 \in D_f$, il faut de plus que :* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, *ce qui revient à dire que f est* ***continue*** *en x_0 (cf. § 3).*

Proposition 2.18 (Lien fonctions–suites)

Soit $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les deux énoncés suivants sont ***équivalents :***

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
2. *Pour toute suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.*

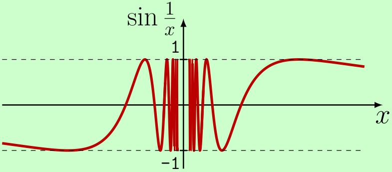
Corollaire 2.19 (Un critère de divergence)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. S'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x_0$ et les suites-images par f : $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites ***différentes,*** *alors f* ***n'****admet* ***pas*** *de limite en x_0.*

Exemple 2.20 (Fonction « sinus inverse »)

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$. Examinons si elle admet une limite en $x_0 = 0$.

- Posons $u_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$.
- Les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites **différentes**.



Ainsi f n'admet pas de limite en 0.

Proposition 2.21 (Addition/multiplication)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$\lim\limits_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$
$\lim\limits_{x_0}(f+g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	**?**

$\lim\limits_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x_0}(f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	**?**

*Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de ces opérations sont de la forme*

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$

Exemple 2.22 (Polynômes en $\pm\infty$)

La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré : si $a_p \neq 0$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_p x^p = \pm\infty$ si $p \geqslant 1$ (signe à préciser).

Proposition 2.23 (Division)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$\lim\limits_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$ $(\ell' < 0)$	$\ell' > 0$ $(\ell' < 0)$	$\pm\infty$	0^+ (0^-)	0^+ (0^-)	0
$\lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	**?**	$+\infty$ $(-\infty)$	$-\infty$ $(+\infty)$	**?**

*Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme*

- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\dfrac{0}{0}$

Exemple 2.24 (Fractions rationnelles en $\pm\infty$)

La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

$$\text{si } a_p \neq 0 \text{ et } b_q \neq 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{q} b_k x^k} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } p > q \text{ (signe à préciser)} \\ 0 & \text{si } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_p} & \text{si } p = q \end{cases}$$

Proposition 2.25 (Composition)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0, \ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{y \to \ell} g(y) = \ell'$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$.
- *Application à* $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)^{g(x)} \right) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(e^{g(x) \ln f(x)} \right)$ *lorsque* $f > 0$ *au voisinage de* x_0 :

$\lim\limits_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell > 1$ *ou* $+\infty$	$\ell \in [0, 1[$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	0^+	1
$\lim\limits_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ $(-\infty)$	$+\infty$ $(-\infty)$	$\ell' > 0$ $(\ell' < 0)$	0	$\ell' > 0$ *ou* $+\infty$ $\ell' < 0$ *ou* $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x_0} f^g$	$\ell^{\ell'}$	$+\infty$ (0^+)	0^+ $(+\infty)$	$+\infty$ (0^+)	**?**	0^+ $(+\infty)$	**?**	**?**

*Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme*

$$\bullet\ \infty^0 \qquad \bullet\ 0^0 \qquad \bullet\ 1^\infty$$

Exemple 2.26 (Exponentielle)

À l'aide de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (cf. exemple 2.36), on voit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x.$$

Définition 2.27 (Asymptote oblique/Branche parabolique)

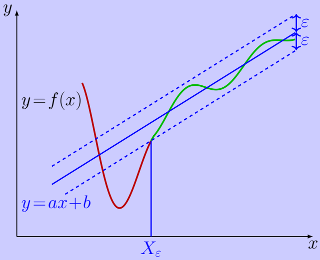
Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

1. *S'il existe des réels a et b tels que*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0,$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote (oblique)*** *à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.*
Dans ce cas, les nombres a et b sont donnés par

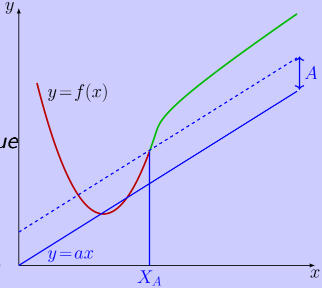
$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax).$$



2. *S'il existe un réel a tel que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty,$$

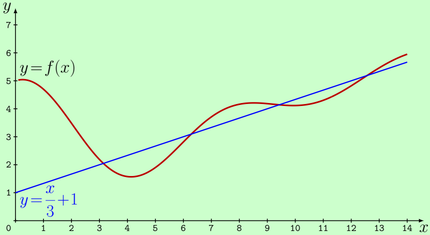
on dit que la courbe représentative de f admet une ***branche parabolique*** *de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$.*



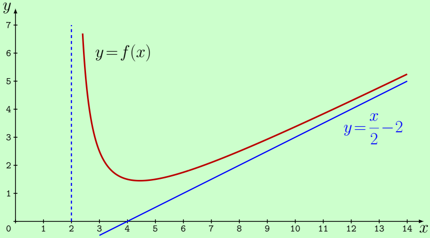
3. *Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet une* ***branche parabolique*** *de direction asymptotique l'axe des ordonnées en $+\infty$.*

Exemple 2.28 (Asymptote oblique)

1. Soit f la fonction définie au voisinage de $+\infty$ par
$$f(x) = \frac{x}{3} + 1 + 4\frac{\sin x}{x}.$$
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (cf. exemple 2.35) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{x}{3} - 1\right) = 0$.
La courbe représentative de f admet une **asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = \frac{x}{3} + 1$.



2. Soit g la fonction définie au voisinage de $+\infty$ par
$$g(x) = \frac{x^2 - 6x + 14}{2x - 4}.$$
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x) - \frac{x}{2}\right) = -2$.
La courbe représentative de g admet une **asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = \frac{x}{2} - 2$.



Théorème 2.29 (Théorème de la limite monotone)

Soit a et b deux réels ou $\pm\infty$ tels que $a < b$ et $I =]a, b[$.

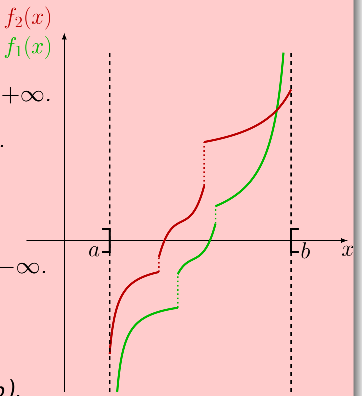
1. *Soit f une fonction **croissante** sur I.*
   - *Si f est **majorée** sur I, alors f admet une **limite à gauche finie** en b.*
   - *Si f n'est **pas majorée** sur I alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.*

   Dans les deux cas, on a $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$.

   - *Si f est **minorée** sur I, alors f admet une **limite à droite finie** en a.*
   - *Si f n'est **pas minorée** sur I alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.*

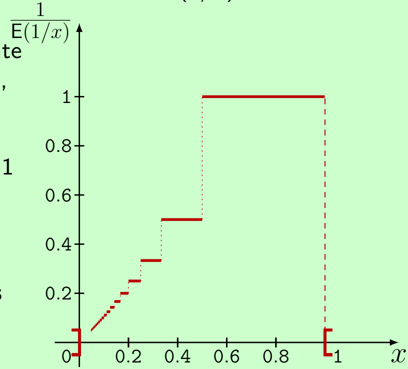
   Dans les deux cas, on a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$.

2. *On a des résultats similaires pour les fonctions **décroissantes** (en échangeant les rôles de a et b).*



Exemple 2.30 (Partie entière et inverse)

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{E}(1/x)}$.



- La fonction « partie entière » étant croissante et la fonction « inverse » étant décroissante, par composition, f est **croissante.**
- Pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{1}{x} > 1$ donc $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqslant 1$ puis $f(x) \in]0,1]$.
  Ainsi la fonction f est **bornée** sur $]0,1[$.
- En conséquence, f admet des **limites finies** en 0 à droite et en 1 à gauche.
  En fait, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

Partant de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, à l'aide de changements de variable on déduit les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ que l'on peut généraliser :

Proposition 2.31 (Croissances comparées (cf. exemple 4.3))

1. *Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,*

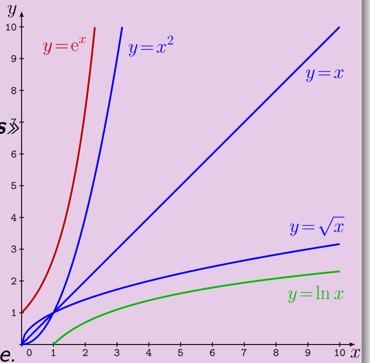
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad et \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0.$$

*Les puissances du logarithme sont «**négligeables**» devant les fonctions puissances **positives.***

2. *Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

*Les fonctions puissances sont «**négligeables**» devant les puissances **positives** de l'exponentielle.*



Proposition 2.32 (Ordre et limites)

1. *Soit f et g des fonctions telles que $f \leqslant g$ au voisinage de x_0*
   - *Si f et g admettent des limites finies ℓ et ℓ' en x_0 alors $\ell \leqslant \ell'$.*
   - *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*
   - *Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*
2. *Si f et g admettent resp. ℓ et ℓ' comme limites en x_0 et si $\ell < \ell'$, alors $f < g$ au voisinage de x_0.*
3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si $\ell > \alpha$ alors $f > \alpha$ au voisinage de x_0.*

   En particulier, si $\ell > 0$ alors $f > 0$ au voisinage de x_0.

Remarque 2.33 (Inégalités strictes/larges)

On prendra garde aux inégalités **strictes** et **larges** : si f et g sont des fonctions telles que $f < g$ au voisinage de x_0 et admettent des limites ℓ et ℓ' en x_0, on **n'a pas nécessairement** $\ell < \ell'$ et l'on peut avoir $\ell = \ell'$.

Ex. : $f(x) = 0$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$. On a $f < g$ sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Théorème 2.34 (Théorème de l'encadrement)

Soit f, g et h des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si les fonctions f, g et h vérifient $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de x_0, et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

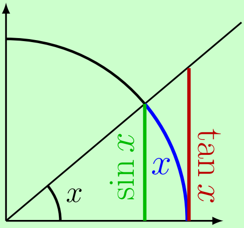
Exemple 2.35 (Fonction « sinus cardinal »)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1 Étude en 0

- De l'encadrement géométrique
$$\forall x \in]0, \pi/2[, \ \sin x < x < \tan x$$
(l'angle x étant mesuré en **radians**), on obtient $\forall x \in]0, \pi/2[, \ \cos x < f(x) < 1$ duquel on déduit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

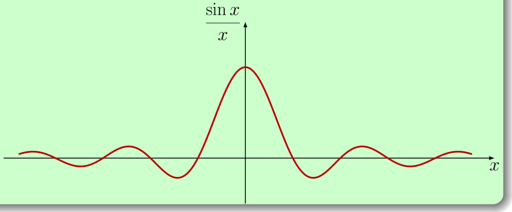
Par parité, on a
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



- Avec $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, on tire
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$
- Avec $1 - \cos x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$, on tire
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2 Étude en $\pm\infty$

- De l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin x| \leqslant 1$, on tire $\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|x|}$ duquel on déduit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.



Exemple 2.36 (Fonctions logarithme/exponentielle)

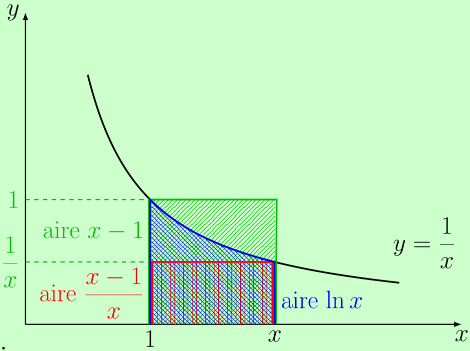
- De l'encadrement géométrique

$$\forall x \in]1, +\infty[, \ \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$$

on obtient $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

Par symétrie, on tire

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$



- Par changements de variables, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exemple 2.37 (Fonctions hyperboliques)

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{sh} x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{th} x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

Sommaire

Définition 3.1 (Continuité)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.

1. *On dit que f est **continue en x_0** lorsque f admet une limite en x_0, et cette limite est alors nécessairement $f(x_0)$ (d'après proposition 2.14). Autrement dit :*

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\iff (\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

2. *On dit que f est continue **à gauche** (resp. **à droite**) **en x_0** lorsque*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \left(\textit{resp. } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)\right).$$

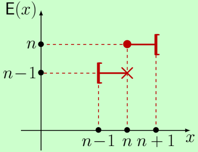
Proposition 3.2

*f est continue en x_0 ssi f est continue **à gauche et à droite** en x_0.*

Exemple 3.3 (Fonction « partie entière »)

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Au voisinage de n, on a

$$\mathrm{E}(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [n, n+1[\\ n-1 & \text{si } x \in [n-1, n[\end{cases}$$



donc $\lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} \mathrm{E}(x) = n = \mathrm{E}(n)$ et $\lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} \mathrm{E}(x) = n - 1 \neq \mathrm{E}(n)$.

La fonction partie entière est **continue à droite** en n mais **pas à gauche.**

Remarque 3.4 (Discontinuité)

1. Pour une fonction f, il existe deux types de discontinuité en $x_0 \in D_f$:
   - **discontinuité de première espèce** : f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0, mais l'une au moins de ces deux limites n'est pas égale à $f(x_0)$.
   - **discontinuité de deuxième espèce** : f n'admet pas de limite à droite et/ou à gauche en x_0.
2. Si $x_0 \notin D_f$ et si f admet pour limite le réel ℓ en x_0, on peut prolonger f en posant :
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$
La fonction $\tilde{f}$ ainsi obtenue est continue en x_0 : on dit qu'on a **prolongé f par continuité en x_0**.

Exemple 3.5 (Prolongement par continuité)

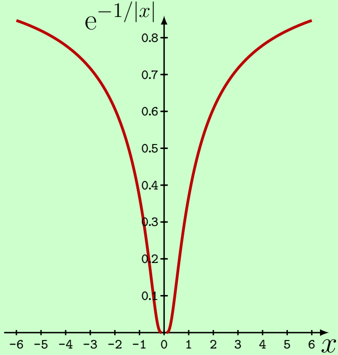
Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

- On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{2\}$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = x + 1$.
- Donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ et l'on peut prolonger la fonction f par continuité en 2 en posant $\tilde{f}(2) = 3$.
- Le prolongement par continuité ainsi construit s'écrit simplement :
$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

Exemple 3.6 (Exponentielle-inverse)

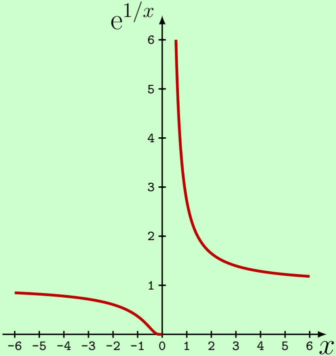
❶ Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-1/|x|} \end{array}$

La fonction f admet une limite **finie** en 0 qui vaut 0. Elle est donc **prolongeable** par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.



❷ Soit $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{1/x} \end{array}$

La fonction g admet une limite à gauche **finie** en 0 qui vaut 0 et une limite à droite **infinie** en 0. Elle présente donc une **discontinuité de deuxième espèce** et n'est pas prolongeable par continuité en 0.



Proposition 3.7 (Opérations)

1. ***Opérations***
   *Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **continues** en x_0 et si λ est un réel, alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont **continues** en x_0.*

   *Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est **continue** en x_0.*
2. ***Composition***
   *Si f est **continue** en x_0 et si g est **continue** en $f(x_0)$ alors $(g \circ f)$ est continue en x_0.*
3. ***Inégalités***
   *Si f est **continue** en x_0 alors f est **bornée** au voisinage de x_0.*
   *Si f est **continue** en x_0 et si $f(x_0) > 0$ alors $f(x) > 0$ au voisinage de x_0.*

Remarque 3.8 (Extension aux fonctions à valeurs complexes (facultatif))

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors
*la fonction f est **continue** en $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi les fonctions f_1 et f_2 sont **continues** en x_0.*

Définition 3.9 (Continuité sur un intervalle)

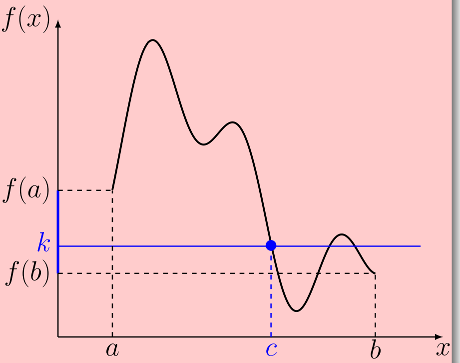
La fonction f est dite ***continue sur l'intervalle I*** *lorsque f est continue en tout x_0 de I.*

Théorème 3.10 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction ***continue*** *sur $[a, b]$.*

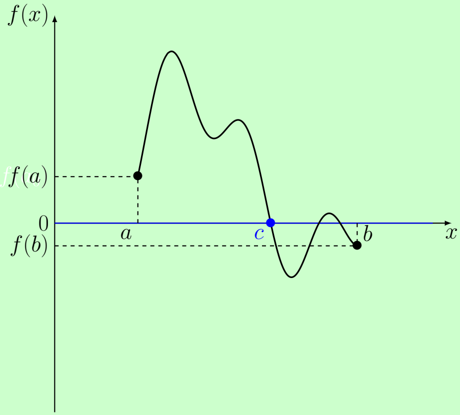
- *Pour tout réel k* ***compris*** *entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.*

- *En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de* ***signes opposés****, alors il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*



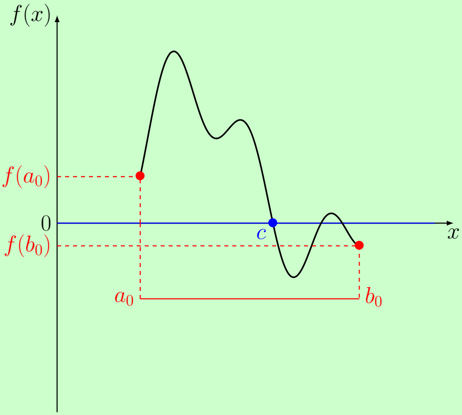
Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

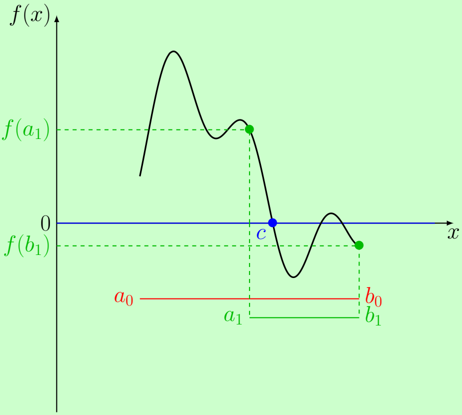
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

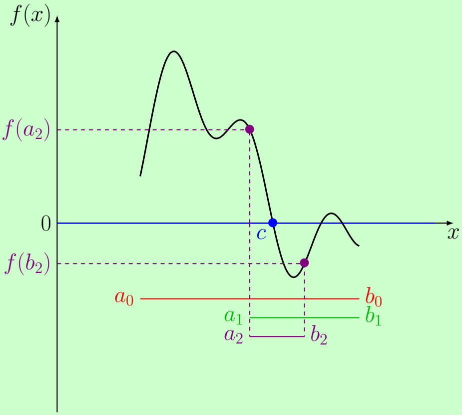
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
  On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

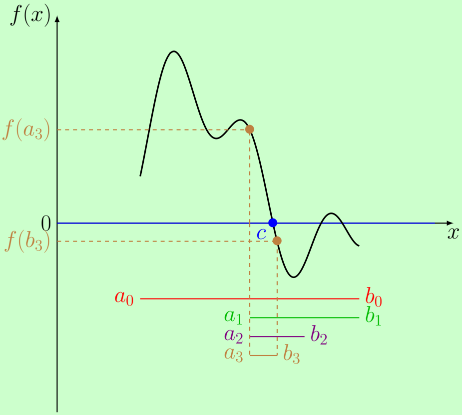
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
  On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
  On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

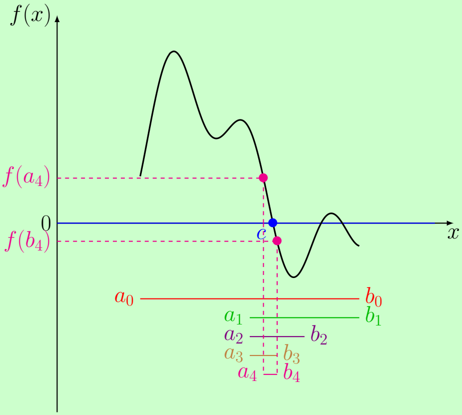
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
  On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
  On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
  On a $f(a_3)f(b_3) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

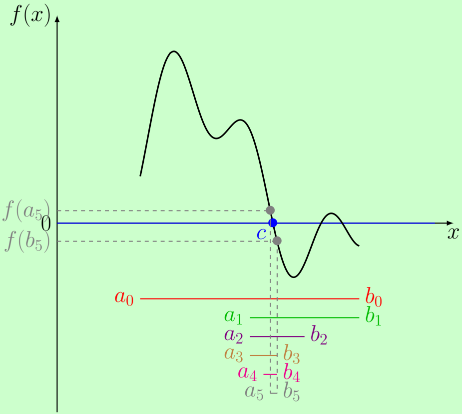
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
  On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
  On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
  On a $f(a_3)f(b_3) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.
- Posons $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ et $b_4 = b_3$.
  On a $f(a_4)f(b_4) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_4, b_4]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

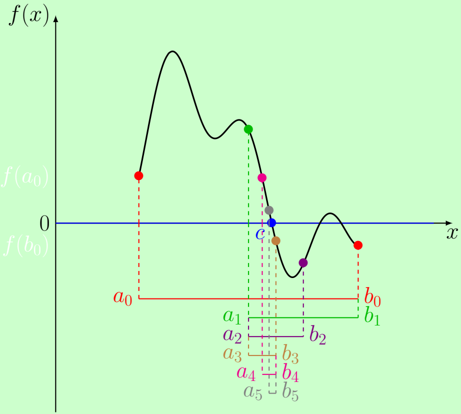
Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
  On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
  On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
  On a $f(a_3)f(b_3) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.
- Posons $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ et $b_4 = b_3$.
  On a $f(a_4)f(b_4) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_4, b_4]$.
- Posons $a_5 = \frac{a_4+b_4}{2}$ et $b_5 = b_4$.
  On a $f(a_5)f(b_5) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_5, b_5]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$.)



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  On a $f(a_0)f(b_0) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
  On a $f(a_1)f(b_1) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
  On a $f(a_2)f(b_2) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
  On a $f(a_3)f(b_3) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.
- Posons $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ et $b_4 = b_3$.
  On a $f(a_4)f(b_4) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_4, b_4]$.
- Posons $a_5 = \frac{a_4+b_4}{2}$ et $b_5 = b_4$.
  On a $f(a_5)f(b_5) < 0$,
  donc f admet un zéro dans $[a_5, b_5]$.

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

On construit ainsi de proche en proche deux suites de points $a_0, a_1, a_2, \ldots$ et $b_0, b_1, b_2, \ldots$ dans $[a, b]$ telles que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est l'une des deux "moitiés" de $[a_n, b_n]$ et $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$.

On a donc une suite d'intervalles **fermés emboîtés** $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ de longueurs $\ell_0 = b_0 - a_0$, $\ell_1 = \ell_0/2$, $\ell_2 = \ell_0/2^2 \ldots$

En conséquence, les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.

On a donc affaire à deux suites **adjacentes** (cf. cours du 2nd semestre).
Elles sont **convergentes** et admettent la **même** limite $c \in [a, b]$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c \quad \left(\text{ou encore } \bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] = \{c\}\right).$$

Par continuité, on en tire

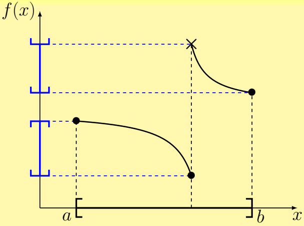
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c).$$

Enfin, la propriété $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ entraîne $f(c)^2 \leqslant 0$ soit $f(c) = 0$. L'algorithme de dichotomie conduit donc à un zéro de la fonction f.

Corollaire 3.12 (Image d'un intervalle)

*L'image d'un **intervalle** par une fonction **continue** est un **intervalle.***

Remarque 3.13 (Discontinuité)



Si la fonction présente au moins une discontinuité, son image peut **ne pas** être un intervalle.

Exemple 3.14 (Fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ (facultatif))

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

La fonction f prend les deux seules valeurs 0 et 1. On a $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ et plus généralement, pour tous réels a, b tels que $a < b$, il existe un **rationnel** et un **irrationnel** entre a et b (on dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$), donc $f([a, b]) = \{0, 1\}$.

La fonction f **n'est donc continue sur aucun intervalle** (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.15 (Image d'un fermé borné : théorème des valeurs extrêmes)

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle **fermé borné** $[a, b]$.*

*Alors f est **bornée** sur $[a, b]$ et **atteint** ses bornes inférieure et supérieure m et M :*

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

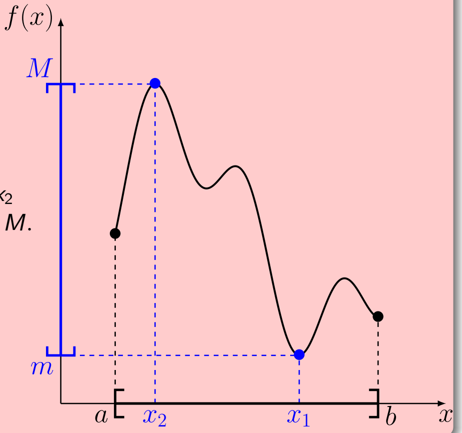
$$\text{et} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Autrement dit : il existe deux réels x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

De plus,

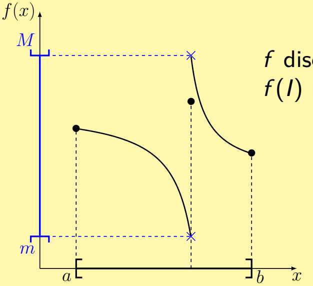
$$f([a, b]) = [m, M].$$

*L'image d'un intervalle **fermé borné** par une fonction **continue** est encore un intervalle **fermé borné.***

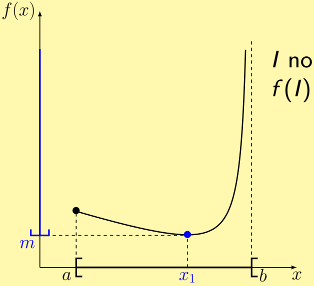


Remarque 3.16 (Contre-exemples)

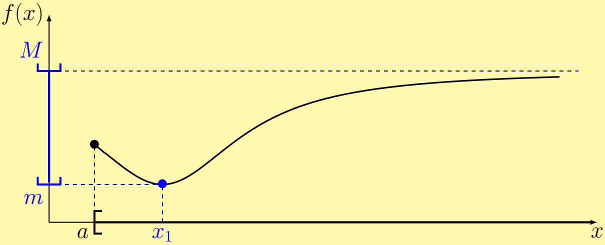
Le théorème peut être mis en défaut si l'une des hypothèses n'est pas satisfaite.



f discontinue
$f(I)$ non fermé



I non fermé
$f(I)$ non borné



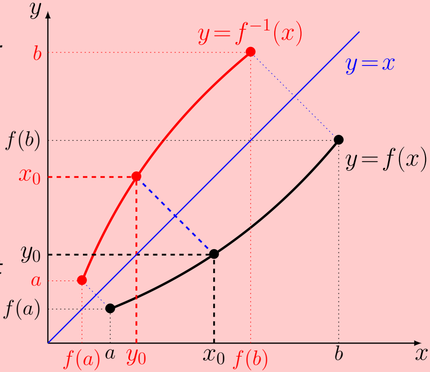
I non borné
$f(I)$ non fermé

Théorème 3.17 (Théorème de la bijection)

*Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un **intervalle** I.*

1. *$f(I)$ est un **intervalle** dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.*
2. *f réalise une **bijection** de I sur $f(I)$.*
3. *f^{-1} est **continue** et **strictement monotone** sur $f(I)$, de même sens de variation que f.*

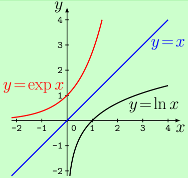
***Rappel :** les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormal du plan sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.*



Exemple 3.18 (Logarithme/exponentielle)

La fonction ln : $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue, strictement croissante** de limites $-\infty$ et $+\infty$ en 0^+ et $+\infty$ respectivement.

Elle est donc **bijective.** Sa réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée exp : $\mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$.

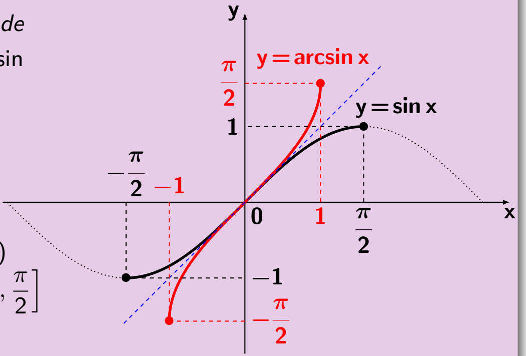


Proposition-définition 3.19 (Fonction arcsin)

La fonction sin *réalise une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1, 1]$ *et l'on note* arcsin *sa fonction réciproque. On a donc :*

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

et $\begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$



Proposition 3.20

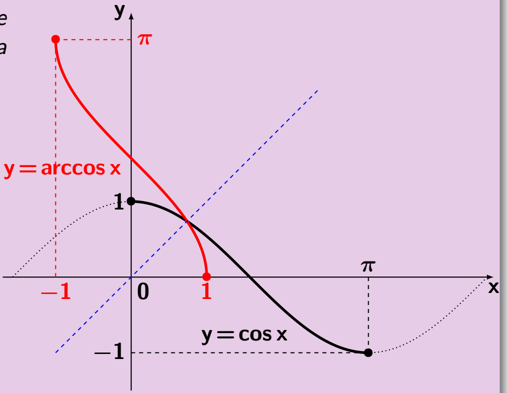
1. arcsin *est* ***continue***, ***strictement croissante*** *et* ***impaire*** *sur* $[-1, 1]$.
2. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \sin(\arcsin(x)) = x \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \arcsin(\sin(x)) = x \end{cases}$
3. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in]-1,1[, & \tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

Proposition-définition 3.21 (Fonction arccos)

La fonction cos *réalise une bijection de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, 1]$ *et l'on note* arccos *sa fonction réciproque. On a donc :*

$$\begin{array}{rccl} \text{arccos} : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \text{arccos}(x) \end{array}$$

et $\begin{cases} y = \text{arccos}(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$



Proposition 3.22

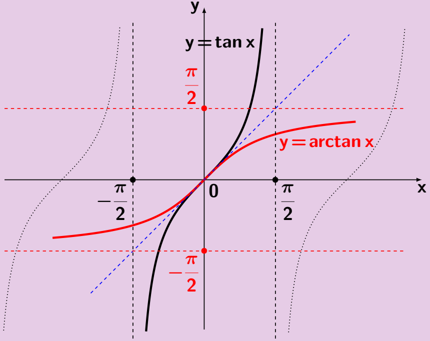
1. arccos *est* ***continue***, ***strictement décroissante*** *sur* $[-1, 1]$.
2. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \cos(\text{arccos}(x)) = x \\ \forall x \in [0,\pi], & \text{arccos}(\cos(x)) = x \end{cases}$
3. $\begin{cases} \forall x \in [-1,1], & \sin(\text{arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in [-1,1]\setminus\{0\}, & \tan(\text{arccos}(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{cases}$
4. $\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin(x) + \text{arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Proposition-définition 3.23 (Fonction arctan)

La fonction tan *réalise une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$ *et l'on note* arctan *sa fonction réciproque. On a donc :*

$$\begin{array}{rccl} \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}$$

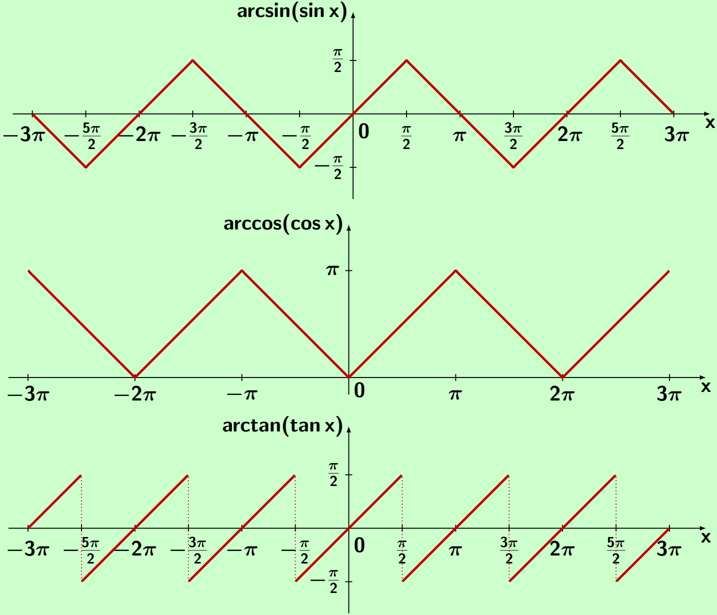
et $\begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$



Proposition 3.24

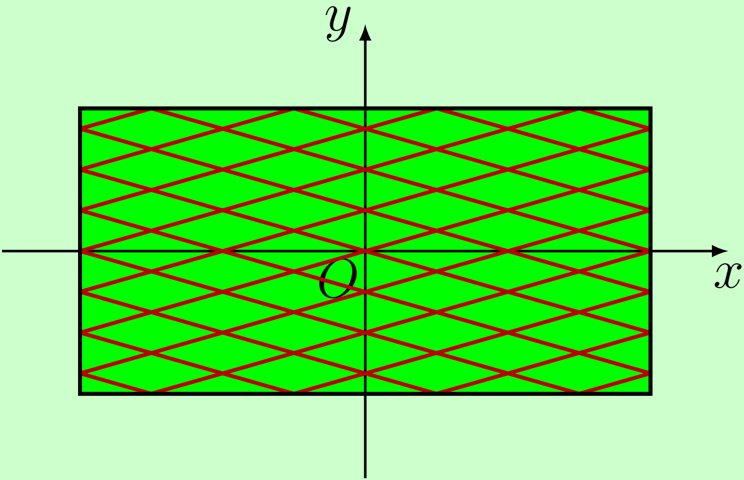
1. arctan *est* ***continue****,* ***strictement croissante*** *et* ***impaire*** *sur* $\mathbb{R}$.
2. $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \tan(\arctan(x)) = x \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, & \arctan(\tan(x)) = x \end{cases}$
3. $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & si\ x < 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

Exemple 3.25 (Courbes en « dents de scie »)



Exemple 3.26 (Billard rectangulaire (facultatif))

Courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 2\arcsin(\sin(7t)) \\ y(t) = \arcsin(\sin(4t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

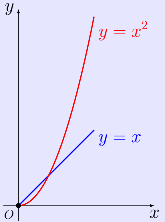


Problématique

Comparaison d'« **ordre de grandeur** » de deux fonctions au voisinage d'un point.

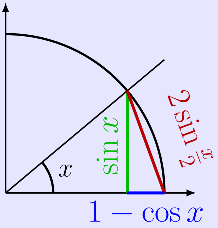
1. ***Exemple 1 :*** comparaison des fonctions **identité** et **carré**

   - x^2 est « **beaucoup plus grand** » que x lorsque x est « **grand** » ;
   - x^2 est « **beaucoup plus petit** » que x lorsque x est « **petit** ».



2. ***Exemple 2 :*** comparaison des fonctions **cosinus** et **sinus**

   Dans le triangle ci-contre, lorsque l'angle x est « **petit** » :
   - les trois côtés sont « **petits** »,
   - le côté vertical ($\sin x$) et l'hypoténuse ($2\sin\frac{x}{2}$) sont du « **même ordre de grandeur** »,
   - alors que le côté horizontal ($1 - \cos x$) est « **beaucoup plus petit** ».



Outil de comparaison

Un outil mathématique pour comparer les « **ordres de grandeur** » de deux fonctions f et g au voisinage d'un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est la limite du rapport de f par g.

Trois cas de figure se présentent :

1. soit la limite de $\dfrac{f}{g}$ en x_0 est **finie non nulle,** c'est donc un réel **non nul** ℓ.
   Dans ce cas, la limite de $\dfrac{f}{\ell g}$ en x_0 vaut 1 ;
2. soit la limite de $\dfrac{f}{g}$ en x_0 est **infinie** ou **nulle**.
   Lorsqu'elle est **infinie,** la limite de $\dfrac{g}{f}$ en x_0 est alors **nulle** ;
3. soit la limite de $\dfrac{f}{g}$ en x_0 **n'existe pas**. (Cette situation ne sera pas considérée ici.)

Les deux premiers cas conduisent à deux situations génériques : on va développer deux notions de comparaisons associées aux cas où la limite de $\dfrac{f}{g}$ en x_0 vaut **0 ou 1.**

Formellement :

- lorsque $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, on introduira la notion de « **négligeabilité locale (ou asymptotique)** » ;
- lorsque $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g} = 1$, on introduira la notion d'« **équivalence locale (ou asymptotique)** ».

Définition 4.1 (Négligeabilité)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
*On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 telle que*

$$\forall\, x \in \mathcal{V}\backslash\{x_0\}, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

*On note alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou encore $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ (notation de **Landau**).*
***Remarque :** il s'agit d'une notation abusive, on devrait noter $f \in o_{x_0}(g)$.*

Proposition 4.2 (Formulation simple)

*Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, g **ne s'annulant pas** au voisinage de x_0. Alors* $\quad f \underset{x_0}{=} o(g) \iff \lim\limits_{x_0} \dfrac{f}{g} = 0.$

En particulier : $f \underset{x_0}{=} o(1) \iff \lim\limits_{x_0} f = 0.$

Exemple 4.3 (Croissances comparées (cf. proposition 2.31))

1. Si $\alpha > \beta$, alors $x^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$.
2. Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:
   - $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$
   - $e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$
   - $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$
   - $|\ln x|^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$

Proposition 4.4 (Opérations)

Soit f, g, h et k quatre fonctions définies au voisinage de x_0.

1. ***Transitivité :*** $$\left.\begin{array}{l} f \underset{x_0}{=} o(g) \\ g \underset{x_0}{=} o(h) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \underset{x_0}{=} o(h).$$
2. ***Opérations :***
   - ***Multiplication par un réel :*** $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f \underset{x_0}{=} o(g) \Longrightarrow \alpha f \underset{x_0}{=} o(g).$
   - ***Addition :*** $$\left.\begin{array}{l} f \underset{x_0}{=} o(h) \\ g \underset{x_0}{=} o(h) \end{array}\right\} \Longrightarrow f + g \underset{x_0}{=} o(h).$$
   - ***Multiplication :*** $$\left.\begin{array}{l} f \underset{x_0}{=} o(h) \\ g \underset{x_0}{=} o(k) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \times g \underset{x_0}{=} o(hk).$$
   - ***Puissances :*** $$f \underset{x_0}{=} o(h) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \forall \alpha > 0, & |f|^\alpha \underset{x_0}{=} o(|h|^\alpha) \\ \forall \alpha < 0, & |h|^\alpha \underset{x_0}{=} o(|f|^\alpha) \end{array}\right. .$$

Définition 4.5 (Équivalence)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
*On dit que f est **équivalente à g au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe une fonction φ définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 telle que*

$$\forall x \in \mathcal{V}\backslash\{x_0\}, \quad f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1.$$

*On note alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ (notation de **Landau**).*

Proposition 4.6 (Formulation simple)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.

1. *Si g **ne s'annule pas** au voisinage de x_0, alors*

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

2. *On a $f \underset{x_0}{\sim} 0 \iff f$ est **nulle** au voisinage de x_0.*

Remarque 4.7

$f \underset{x_0}{\sim} g$ n'implique pas nécessairement l'existence d'une limite en x_0 pour f et g.
Mais si ces limites **existent,** alors elles sont **égales.**

Proposition 4.8 (Relation d'équivalence)

Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0.

1. ***Réflexivité :*** $f \underset{x_0}{\sim} f$.
2. ***Symétrie :*** $f \underset{x_0}{\sim} g \iff g \underset{x_0}{\sim} f$.
3. ***Transitivité :*** $\left[f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{et} \quad g \underset{x_0}{\sim} h\right] \Longrightarrow f \underset{x_0}{\sim} h$.

Proposition 4.9 (Limites et équivalence)

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.

1. $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff f \underset{x_0}{\sim} \ell$.
2. $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell\right] \Longrightarrow f \underset{x_0}{\sim} g$.
3. $\forall \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \left[f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell\right] \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarque 4.10

Lorsque f admet une limite **nulle** ou **infinie** en x_0, la notion d'équivalence est non-triviale... Dans ce cas, un problème intéressant est de rechercher une fonction simple g tel que $f \underset{x_0}{\sim} g$.

Proposition 4.11 (Équivalence et négligeabilité)

1. $f \underset{x_0}{\sim} g \iff (f-g) \underset{x_0}{=} o(g)$ (et aussi $o(f)$). On écrit alors $g \underset{x_0}{=} f + o(f)$.
2. Si $\left[f \underset{x_0}{\sim} g \text{ et } g \underset{x_0}{=} o(h)\right]$ ou si $[f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ et } g \underset{x_0}{\sim} h]$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.
3. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si g est non nulle au voisinage de x_0, alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0.

Remarque 4.12 (Notion relative/absolue)

On fera attention de ne pas confondre $f \underset{x_0}{\sim} g$ avec $\lim\limits_{x_0}(f-g) = 0$. En effet :

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff f \underset{x_0}{=} g + o(g) \quad \text{alors que} \quad \lim_{x_0}(f-g) = 0 \iff f \underset{x_0}{=} g + o(1).$$

Contre-exemple :

- $x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ alors que $(x^2+x) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
- $(x^2 - x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ alors que $x^2 \underset{x\to0}{\not\sim} x$.

Proposition 4.13 (Multiplication/division/puissances)

Soit f, g, h, k des fonctions définies au voisinage de x_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si $f \underset{x_0}{\sim} h$ et $g \underset{x_0}{\sim} k$, alors :

- $f \times g \underset{x_0}{\sim} h \times k$
- $\dfrac{f}{g} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{h}{k}$
- $|f|^\alpha \underset{x_0}{\sim} |h|^\alpha$

Définition 4.14 (Dérivabilité)

Soit f une application d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point situé à l'intérieur de I.

- *On dit que f est **dérivable en x_0** si l'application $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite **finie** en x_0.*
- *On note alors cette limite $\mathbf{f'(x_0)}$ et on l'appelle le **nombre dérivé de f en x_0** :*

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Proposition 4.15 (Dérivabilité et comparaison)

*Supposons la fonction f **dérivable** en x_0. Alors :*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0).$$

*Cette relation fournit un **développement limité d'ordre 1 en x_0**.*

En conséquence :

1. *Si $f'(x_0) \neq \mathbf{0}$ alors :* $\quad f(x)-f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0).$
2. *Si $f'(x_0) = \mathbf{0}$ alors :* $\quad f(x)-f(x_0) \underset{x\to x_0}{=} o(x-x_0).$

Ce résultat permet d'établir la plupart des équivalents usuels **à connaître :**

Exemple 4.16 (Équivalents usuels)

1. Fonctions **exponentielle/logarithme/puissance :**

$$\bullet\ \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \bullet\ \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \bullet\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

2. Fonctions **trigonométriques :**

$$\bullet\ \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \bullet\ \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \bullet\ \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\bullet\ \arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \bullet\ \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

3. Fonctions **hyperboliques :**

$$\bullet\ \mathrm{sh}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \bullet\ \mathrm{th}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \bullet\ \mathrm{ch}\, x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\bullet\ \mathrm{ch}\, x \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \qquad \bullet\ \mathrm{sh}\, x \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}$$

En règle générale, **on n'ajoute pas d'équivalents**, c'est-à-dire :

$$\left(f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2\right) \textbf{ n'implique pas } f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2.$$

On a toutefois les résultats suivants :

Proposition 4.17 (Somme et équivalence)

1. *Si* $f \underset{x_0}{\sim} g$ *et* $h \underset{x_0}{=} o(g)$ *alors* $f + h \underset{x_0}{\sim} g$.
2. *Si* $f \underset{x_0}{=} o(g)$ *alors* $f + g \underset{x_0}{\sim} g$.
3. *Soit* f_1, f_2 *et* g *trois fonctions définies au voisinage de* x_0 *et* α_1, α_2 *deux réels tels que*

$$f_1 \underset{x_0}{\sim} \alpha_1 g \quad \text{et} \quad f_2 \underset{x_0}{\sim} \alpha_2 g.$$

Il y a alors deux cas à distinguer pour la somme $f_1 + f_2$ *:*

- *Si* $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ *alors* $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} (\alpha_1 + \alpha_2) g$.
- *Si* $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ *alors* $f_1 + f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$.

Exemple 4.18 (Fonctions polynômes/fractions rationnelles)

1. Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$, $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ des réels tels que $a_m \neq 0$ et $a_n \neq 0$, et P la fonction polynôme définie pour tout réel x par $P(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k x^k$. Alors :
$$P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m x^m \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$
Exemple : pour $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$, on a $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ et $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 3x^4$.

2. Soit P une fonction polynôme non nulle et α une racine de P d'ordre de multiplicité μ. Alors :
$$P(x) \underset{x\to\alpha}{\sim} \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!}(x-\alpha)^\mu.$$
Exemple : pour $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$, on a $P(x) \underset{x\to 1}{\sim} 2(x-1)^2$.

3. Soit p et q deux entiers naturels, $a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots, a_0$ et $b_q, b_{q-1}, b_{q-2}, \ldots, b_0$ des réels tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, et P et Q les fonctions polynômes définies pour tout réel x par $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k x^k$. Alors :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}.$$

Exemple 4.19 (Une fonction hyperbolique)

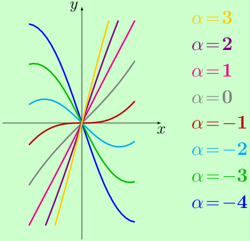
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \operatorname{sh} x + \alpha \operatorname{th} x$.

1. ***Analyse en 0 :*** on a $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
   - Si $\alpha \neq -1$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} (\alpha+1)x$.
   - Si $\alpha = -1$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

     Dans ce cas :
     $f(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{th} x = \operatorname{th} x\big(\operatorname{ch} x - 1\big)$.

     Or $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

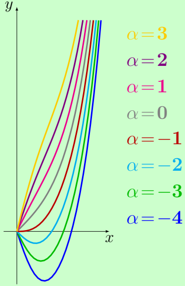
     On obtient alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{2}$.



2. ***Analyse en $+\infty$:*** on a $\operatorname{sh} x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ et $\operatorname{th} x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.

Or $1 \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^x}{2}\right)$.

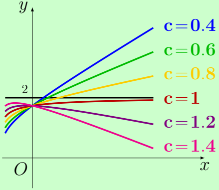
On en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.



Exemple 4.20 (Un calcul de limite/asymptote)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Analyse en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - cx$.

1. On a $x^2 + ax + b \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ puis $\sqrt{x^2+ax+b} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.



$a = 4$ et $b = 3$

- Si $c \neq 1$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (1-c)x$,

  d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

- Si $c = 1$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

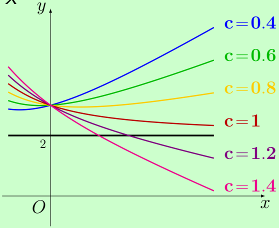
  Dans ce cas, $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - x = \dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+ax+b}+x}$.

  Or $\sqrt{x^2+ax+b} + x \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.

  On obtient alors $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{a}{2} & \text{si } a \neq 0 \\ \dfrac{b}{2x} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$

  (on a $f(x) = 0$ lorsque $a = b = 0$ et $c = 1$)

  d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{2}$.



$a = 4$ et $b = 9$

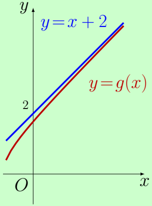
Exemple 4.20 (Un calcul de limite/asymptote)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Analyse en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - cx$.

---

❷ ***Application :*** considérons la fonction g définie par

$$g(x) = \sqrt{x^2+ax+b}.$$

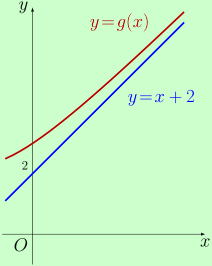


$a = 4$ et $b = 3$

- En choisissant $c = 1$ dans f,
  on voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{a}{2}\right)\right] = 0$
  donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ en $+\infty$
  d'équation $y = x + \dfrac{a}{2}$.

- Puis $$g(x) - \left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{b - \frac{a^2}{4}}{\sqrt{x^2+ax+b} + (x + \frac{a}{2})} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{b - \frac{a^2}{4}}{2x} \text{ si } b \neq \frac{a^2}{4}$$

(on a $g(x) = x + \dfrac{a}{2}$ lorsque $b = \dfrac{a^2}{4}$).
On en déduit que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus (resp. au-dessous) de $\mathcal{D}$
au voisinage de $+\infty$ lorsque $b > \dfrac{a^2}{4}$ (resp. $b < \dfrac{a^2}{4}$).



$a = 4$ et $b = 9$

Proposition 4.21 (Composition « à droite »)

Soit x_0 et t_0 dans $\overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et φ une fonction telle que $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ existent au voisinage de t_0.

$$\textit{Si} \quad f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{et} \quad \lim_{t_0} \varphi = x_0, \quad \textit{alors} \quad f \circ \varphi \underset{t_0}{\sim} g \circ \varphi.$$

Remarque 4.22 (Composition « à gauche »)

Il n'y a pas de règle générale pour la composition « à gauche » :
En général, si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 et ψ une fonction telle que $\psi \circ f$ et $\psi \circ g$ existent au voisinage de x_0,

$$f \underset{x_0}{\sim} g \not\Longrightarrow \psi \circ f \underset{x_0}{\sim} \psi \circ g.$$

Contre-exemple :

- On a $x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$ mais $e^{x^2+x} \underset{x \to +\infty}{\not\sim} e^{x^2}$.
- On a $1 + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x$ mais $\ln(1 + x^2) \underset{x \to 0}{\not\sim} \ln(1 + x)$.

Proposition 4.23 (Cas de l'exponentielle et du logarithme (facultatif))

1. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.*
$$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g \iff \lim_{x_0} (f - g) = 0.$$
2. *Soit f et g sont définies et strictement positives au voisinage de x_0.*
Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in [0, +\infty] \backslash \{1\}$, alors : $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Continuité Discontinuité

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_continuite/continuite0.html

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Dérivabilité

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_Lhopital/Lhopital0.html

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Suites récurrentes

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html

Notions à retenir

- Maîtrise de la valeur absolue
- Borne supérieure/inférieure
  - ⋆ Identification et détermination
- Limites
  - ⋆ Maîtrise des techniques de calculs
  - ⋆ Théorème de la limite monotone
  - ⋆ Recherche d'asymptote
  - ⋆ Limites usuelles à connaître...
- Continuité ponctuelle
  - ⋆ Prolongement par continuité
  - ⋆ Opérations
  - ⋆ Théorèmes fondamentaux (TVI/TVE/théorème de la bijection)
- Fonctions trigonométriques réciproques
  - ⋆ Graphes et quelques propriétés à connaître
  - ⋆ Maîtrise de la réciprocité

Notions à retenir

- Notions de négligeabilité et d'équivalence asymptotiques
  - ⋆ Comparaison locale de fonctions, ordre de grandeur local
  - ⋆ Exemples usuels à connaître
  - ⋆ Détermination d'équivalents par opérations diverses
  - ⋆ Utilisation pour les calculs de limites
  - ⋆ Étude de l'allure locale d'une courbe
  - ⋆ Détermination de branches infinies, d'asymptotes