INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Nombres complexes

Aimé Lachal

Cours d'OMNI
1^er cycle, 1^re année

Sommaire

Bref historique

Au milieu du XVI^e siècle, des mathématiciens italiens comme Cardan ou Bombelli essayent de résoudre des équations du second degré n'ayant pas de solution, comme $x^2 = -1$.
Ils notent $\sqrt{-1}$ une solution de cette équation, et essayent d'utiliser cette nouvelle quantité – ni positive, ni négative – pour effectuer des calculs algébriques.

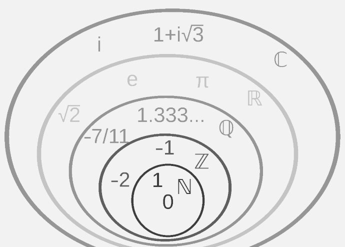
Les nombres complexes sont alors peu à peu très utilisés, comme par Descartes en 1637, qui les nomme **« quantités imaginaires ».**

En 1774, Euler remarque des problèmes dans la notation avec une racine carrée. Par exemple si l'on suit les règles habituelles, on obtient

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

ce qui est incompatible avec le fait qu'on a aussi $(\sqrt{-1})^2 = -1$.
Il décide donc de noter i la quantité $\sqrt{-1}$. Cette notation sera reprise par Gauss en 1831 mais mettra du temps à s'imposer. Cependant à partir de Gauss, et pour nous en particulier, le symbole $\sqrt{\ }$ devra être réservé aux **nombres réels positifs.**

Bref historique



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- $\mathbb{N}$: entiers naturels pour le comptage
- $\mathbb{Z}$: entiers relatifs, extension des entiers naturels permettant de résoudre des équations de la forme $x + n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé
- $\mathbb{Q}$: nombres rationnels, extension des entiers relatifs permettant de résoudre des équations de la forme $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$ fixés
- $\mathbb{R}$: nombres réels, extension des rationnels permettant de résoudre des équations de la forme $x^2 - r = 0$, $r \in \mathbb{Q}_+^*$ fixé, de calculer des limites, etc.
- $\mathbb{C}$: nombres complexes, extension des réels permettant de résoudre des équations de la forme $x^2 + r = 0$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, etc.

Exemple 1.1

En utilisant le symbole i, on peut par exemple écrire des nombres complexes dont le carré vaut -25 :

$$(5\mathrm{i})^2 = 5^2 \times \mathrm{i}^2 = 25 \times (-1) = -25$$

Les nombres complexes dont le carré est -25 sont alors $5\mathrm{i}$ et $-5\mathrm{i}$.
De la même manière, les nombres complexes dont le carré est -2 sont $\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{2}$.

En 1831, Gauss donnera le nom de **« nombres complexes »** à ces quantités considérées jusqu'ici comme imaginaires.

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'addition et la multiplication doivent prolonger les opérations de $\mathbb{R}$ et avoir les mêmes propriétés : **commutativité, associativité, distributivité.**

Il y a seulement la propriété supplémentaire de l'existence de i dont le carré vaut -1 et qui permet de construire tout un ensemble cohérent avec les 4 opérations élémentaires $+, -, \times$ et $/$.

Définition 2.1

*Un **nombre complexe**, souvent noté z, est un nombre de la forme $x + \mathrm{i}y$, où x et y sont deux **nombres réels** et i un **nombre imaginaire** possédant la propriété $\mathrm{i}^2 = -1$.*
L'ensemble des complexes est noté $\mathbb{C}$.

- *$x + \mathrm{i}y$ est la **forme algébrique** de z ;*
- *x est appelé **partie réelle** de z et notée $\Re\mathrm{e}(z)$;*
- *y est appelé **partie imaginaire** de z et notée $\Im\mathrm{m}(z)$.*
  (Attention : la partie imaginaire est un réel, i n'en fait pas partie.)

*Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur**.*

Exemple 2.2

- Si $z = 2 + 4\mathrm{i}$, $\Re\mathrm{e}(z) = 2$ et $\Im\mathrm{m}(z) = 4$.
- Si $z = -3\mathrm{i}$, $\Re\mathrm{e}(z) = 0$ et $\Im\mathrm{m}(z) = -3$. z est **imaginaire pur**.

Remarques 2.3

- En électricité, i se note j pour ne pas confondre avec l'intensité.
- Un nombre réel x peut s'écrire $x + 0\mathrm{i}$ donc c'est aussi un nombre complexe : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Propriété 2.4 (Égalité)

*Deux complexes z et z' sont **égaux** si et seulement si ils ont **même partie réelle et même partie imaginaire**. Donc :*

$$\boxed{z = z' \iff \Re\mathrm{e}(z) = \Re\mathrm{e}(z') \text{ et } \Im\mathrm{m}(z) = \Im\mathrm{m}(z')}$$

En d'autres termes, on peut identifier, pour tous réels x, y, x', y', selon

$$\boxed{x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y' \iff x = x' \text{ et } y = y'}$$

Exercice 2.5

1. Résoudre l'équation d'inconnue **réelle** x : $3x^2 + 9 + 2\mathrm{i}x = 12x + 2\mathrm{i}$.
   Réponse : $x = 1$
2. Pour quelles valeurs réelles de x le complexe $z = (x - 1) + \mathrm{i}(2 - x^2)$ est-il :
   a) réel ? b) imaginaire pur ? c) égal à $-3 - 2\mathrm{i}$?
   Réponse : a) $x = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ b) $x = 1$ c) $x = -2$

Définition 2.6 (Conjugué)

*Pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ (avec x et y réels), le nombre complexe $x - \mathrm{i}y$ est appelé **conjugué** de z et noté $\bar{z}$: $\boxed{\bar{z} = x - \mathrm{i}y}$.*

Exemple 2.7

Le conjugué de $3 - 4\mathrm{i}$ est $3 + 4\mathrm{i}$.

Propriété 2.8 (Parties réelle et imaginaire et conjugué)

- *Le **conjugué du conjugué** d'un nombre **complexe** est lui-même : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{(\bar{z})} = z$.*
- *Le **conjugué** d'un nombre **réel** est lui-même et le **conjugué** d'un nombre **imaginaire pur** est son opposé : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = x$ et $\overline{\mathrm{i}x} = -\mathrm{i}x$.*
- *Les **parties réelle et imaginaire** d'un nombre complexe z peuvent s'exprimer à l'aide de z et de son **conjugué** selon :*

$$\boxed{\Re\mathrm{e}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im\mathrm{m}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}}$$

- *En conséquence, pour tout complexe z :*
  - *z est **réel** ssi $\bar{z} = z$;*
  - *z est **imaginaire pur** ssi $\bar{z} = -z$.*

Addition/multiplication

Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ s'étendent de manière naturelle aux nombres complexes, en pensant à utiliser $\mathrm{i}^2 = -1$. Ci-après, a, b, c, d sont quatre réels quelconques.

- **Addition, soustraction** : partant de
  $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = a + \mathrm{i}b + c + \mathrm{i}d = a + c + \mathrm{i}b + \mathrm{i}d$,

$$\boxed{\begin{aligned}(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) &= (a + c) + \mathrm{i}(b + d)\\ (a + \mathrm{i}b) - (c + \mathrm{i}d) &= (a - c) + \mathrm{i}(b - d)\end{aligned}}$$

  En particulier, l'**opposé** d'un complexe est donné par

$$\boxed{-(a + \mathrm{i}b) = -a - \mathrm{i}b}$$

  Exemple : $(2 + 3\mathrm{i}) + (5 + 7\mathrm{i}) = 2 + 5 + 3\mathrm{i} + 7\mathrm{i} = 7 + 10\mathrm{i}$.

- **Multiplication** : partant de $(a + \mathrm{i}b) \times (c + \mathrm{i}d) = ac + a\mathrm{i}d + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}b \times \mathrm{i}d$,

$$\boxed{(a + \mathrm{i}b) \times (c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)}$$

  Exemple :
$$\begin{aligned}(2 + 3\mathrm{i})(7 + 2\mathrm{i}) &= 2 \times 7 + 2 \times 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} \times 7 + 3\mathrm{i} \times 2\mathrm{i}\\ &= 14 + 4\mathrm{i} + 21\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2\\ &= 14 + 25\mathrm{i} - 6 = 14 - 6 + 25\mathrm{i} = 8 + 25\mathrm{i}\end{aligned}$$

  En particulier, le produit de deux complexes conjugués se simplifie selon

$$\boxed{(a + \mathrm{i}b) \times (a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2}$$

Inverse/division

- **Inverse pour la multiplication** : pour $z \neq 0$, on met le quotient $\dfrac{1}{z}$ sous forme algébrique en multipliant numérateur et dénominateur par $\overline{z}$ le conjugué de z, ce qui donne :
$\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$, soit :
$$\boxed{\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}}$$
- **Quotient** : pour mettre un quotient $\dfrac{z}{z'}$ sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par $\overline{z'}$ le conjugué de z', ce qui donne :
$\dfrac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} = \dfrac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)} = \dfrac{(ac+bd)+\mathrm{i}(bc-ad)}{c^2+d^2}$, soit :
$$\boxed{\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \mathrm{i}\frac{ad-bc}{c^2+d^2}}$$

Exemple : $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \dfrac{4+2\mathrm{i}+6\mathrm{i}+3(\mathrm{i})^2}{2^2-(\mathrm{i})^2} = \dfrac{1+8\mathrm{i}}{5} = \dfrac{1}{5}+\dfrac{8}{5}\mathrm{i}.$

Remarque 3.1 (Ordre)

L'ordre $\leqslant$ ou $<$ **n**'existe **pas** sur $\mathbb{C}$. En particulier dire qu'un nombre complexe est **positif** ou **négatif** **n**'a **pas** de sens.

Exercice 3.2 (Opérations)

1. Calculer la somme $s = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^7$.
Réponse : *À l'aide de la somme d'une suite géométrique,* $s = \dfrac{\mathrm{i}^8-1}{\mathrm{i}-1} = 0$ *grâce à* $\mathrm{i}^8 = (\mathrm{i}^2)^4 = (-1)^4 = 1$.
2. Soit les complexes $z = -1+\mathrm{i}$ et $z' = 2+3\mathrm{i}$.
Écrire zz', $\dfrac{z}{z'}$, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ sous forme algébrique.
Réponse : $zz' = -5-\mathrm{i}$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{1}{13}+\dfrac{5}{13}\mathrm{i}$, $z^2 = -2\mathrm{i}$, $\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante : $5\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} - 2z = 1$.
On écrira la solution sous forme algébrique.
Réponse : $z = \dfrac{1-3\mathrm{i}}{-2+5\mathrm{i}} = -\dfrac{17}{29}+\dfrac{1}{29}\mathrm{i}$.

Propriété 3.3 (Conjugué et opérations)

1. *Pour tout complexe* $z = x+\mathrm{i}y$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}$, *alors* $z\overline{z} = x^2+y^2$.
2. *Pour tous complexes* z, z', *on a* $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$ *et* $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
3. *Pour tout complexe* $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
4. *Pour tous complexes* z, z' *avec* $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
5. *Pour tout complexe* z *et tout entier* n, *on a* $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Exemple 3.4

Soit les complexes $z = -1+\mathrm{i}$ et $z' = 2+3\mathrm{i}$ de l'exercice 3.2.

- On a trouvé $zz' = -5-\mathrm{i}$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{1}{13}+\dfrac{5}{13}\mathrm{i}$, $z^2 = -2\mathrm{i}$, $\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
- Avec $\overline{z} = -1-\mathrm{i}$ et $\overline{z'} = 2-3\mathrm{i}$, les calculs directs donnent :
$\overline{z}\,\overline{z'} = -5+\mathrm{i}$, $\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \dfrac{1}{13}-\dfrac{5}{13}\mathrm{i}$, $\overline{z}^2 = 2\mathrm{i}$, $\dfrac{1}{\overline{z}} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
On retrouve bien respectivement $\overline{zz'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$, $\overline{z^2}$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$.

Les complexes ont été créés pour résoudre des équations du 2nd degré **sans** racine réelle.

Théorème 3.5 (Résolution des équations du 2nd degré dans ℂ)

Pour résoudre l'équation $az^2+bz+c=0$ *à coefficients* a, b, c ***réels*** $(a \neq 0)$, *on calcule le* ***discriminant*** *de l'équation :* $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$ *et l'on tient la discussion suivante :*

- *si* $\underline{\Delta > 0}$, *alors l'équation a* ***deux solutions réelles distinctes :***
$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$
- *si* $\underline{\Delta = 0}$, *alors l'équation a* ***une unique solution réelle :*** $\boxed{z_0 = -\dfrac{b}{2a}}$
- *si* $\underline{\Delta < 0}$, *alors l'équation n'a pas de solutions réelles mais a* ***deux solutions complexes conjuguées distinctes :***
$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

Remarque 3.6 (Théorème de d'Alembert-Gauss (facultatif))

En fait, il se trouve que toute équation de degré **quelconque** $\geqslant 1$ admet **au moins une racine complexe** (voir cours de Maths, chapitre Polynômes).

Exemple 3.7 (Racines carrées complexes d'un réel)

Soit a un **réel non nul.**

- L'équation $z^2-a^2=0$ admet **deux solutions réelles distinctes** données par $z_1 = a$ et $z_2 = -a$.
- L'équation $z^2+a^2=0$ admet **deux solutions complexes conjuguées** données par $z_1 = \mathrm{i}a$ et $z_2 = -\mathrm{i}a$.

Exemple 3.8

Pour l'équation $4z^2+3z+1=0$, on obtient $\Delta = -7 < 0$ donc les solutions sont complexes conjuguées données par $z_1 = \dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{8}$ et $z_2 = \dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{8}$.

Exercice 3.9 (Racines cubiques complexes de 1)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$. ***Solutions :*** $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ *et* $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
2. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout z, $z^3-1 = (z-1)(az^2+bz+c)$.
Réponse : $a = b = c = 1$.
3. En déduire les solutions de $z^3-1=0$. ***Solutions :*** 1, $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ *et* $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

La définition des complexes donnée précédemment établit directement une identification entre l'ensemble des **complexes** et l'ensemble des **couples de réels** $\mathbb{R}^2$.

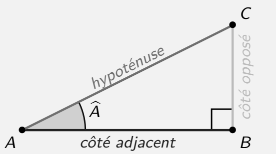
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+\mathrm{i}y & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

L'ensemble des complexes peut donc se représenter par un plan que l'on appellera le **plan complexe.**

Voici à présent une manière d'écrire un nombre complexe, autre que sa **forme algébrique.** Cette deuxième écriture – la **forme trigonométrique** ou **exponentielle** – possède des propriétés très intéressantes liées aux formules trigonométriques.

Définition 4.1 (Sinus, Cosinus, Tangente)

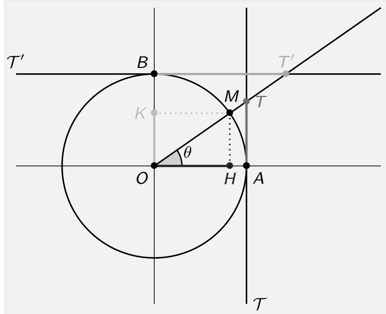
On considère un triangle ABC *rectangle en* B. *On note* $\widehat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



- *Le* ***Sinus*** *est le rapport du côté* ***« Opposé »*** *à l'****« Hypoténuse »****.*
- *Le* ***Cosinus*** *est le rapport du côté* ***« Adjacent »*** *à l'****« Hypoténuse »****.*
- *La* ***Tangente*** *est le rapport du côté* ***« Opposé »*** *au côté* ***« Adjacent »****.*

On note : $\sin\widehat{A} = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad\cos\widehat{A} = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad\tan\widehat{A} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$

Propriété 4.2 (Cercle trigonométrique)



Sur le cercle de centre O *et de rayon 1 :*

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = 1$

$\overline{OH} = \cos\theta \quad \overline{OK} = \sin\theta$

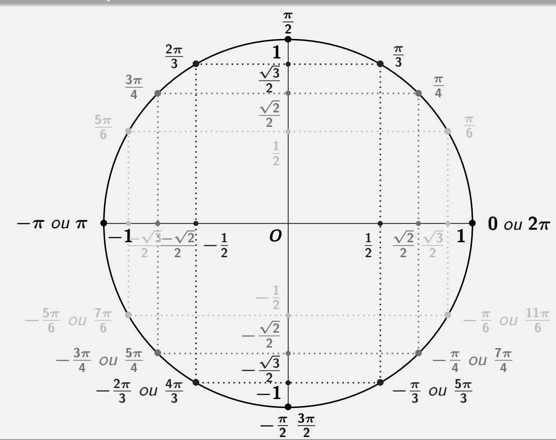
Sur les tangentes $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$ *:*

$\overline{AT} = \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\overline{BT'} = \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Le point M *a pour coordonnées* $(\cos\theta, \sin\theta)$ *et* $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

Valeurs remarquables



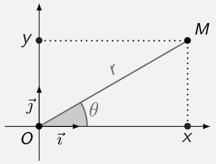
Définition 4.3 (Module/argument)

Dans le repère **orthonormé direct** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *à tout nombre complexe* $z = x + \mathrm{i}y$ *on associe le point* M *du plan de coordonnées* (x, y). *On dit que :*

- *M est le* **point image** *de z.*
- *z est l'***affixe** *du point M.*

On appelle :

- *module de z, la longueur r du segment OM. On le note $|z|$ et l'on a : $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.*
- *argument de z pour $z \neq 0$, une mesure θ de l'angle orienté $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})$. On le note $\arg(z)$, il est défini à 2π près et l'on écrit $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.*



Le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est parfaitement défini par son module r et un argument θ :

$$\boxed{x = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r\sin(\theta)}$$

Ceci est à rapprocher des **coordonnées polaires** *(cf. chapitre Courbes et surfaces).*

Exemple 4.4

- $|\mathrm{i}| = 1$, $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $|\pi - \mathrm{i}\sqrt{2}| = \sqrt{\pi^2+2}$, $|1-2\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$.
- Un **argument** de i est $\frac{\pi}{2}$. Un **argument** de -1 est π. Un **argument** de $\sqrt{2}$ est 0.

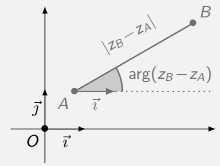
Remarque 4.5

- Si $z \in \mathbb{R}$, alors le **module** coïncide avec la **valeur absolue.**
- ∗ L'**argument** est bien défini pour $z \neq 0$ et il est défini à 2π près.
  ∗ On appelle **argument principal** celui qui est compris dans $]-\pi; \pi]$.
  ∗ L'**argument principal** d'un **réel** x est 0 si $x > 0$, π si $x < 0$.
  ∗ L'**argument principal** d'un **imaginaire pur** $\mathrm{i}y$ est $+\frac{\pi}{2}$ si $y > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ si $y < 0$.
- **Géométriquement**, on peut calculer pour deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B :
  ∗ la **distance** entre A et B à l'aide de la formule

  $$\boxed{AB = |z_B - z_A|}$$

  ∗ une mesure de l'**angle** entre les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AB}$ à l'aide de la formule

  $$\boxed{(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)}$$



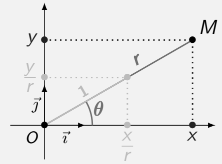
Méthode de calcul d'un argument

Pour déterminer un **argument** d'un complexe $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$:

- on calcule d'abord le **module** $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$;
- le calcul de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ avec les formules suivantes permettront d'en déduire la mesure d'un **argument** :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r}}$$

∗ soit en reconnaissant un sinus et cosinus remarquables,
∗ soit en approximant à l'aide de la calculatrice si on ne reconnaît pas de valeurs remarquables.



Exemple 4.6

Soit $z = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

- le **module** est donné par $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$;
- un **argument** θ de z est alors déterminé $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

  On reconnaît le cosinus et le sinus de $-\frac{2\pi}{3}$, d'où $\arg(z) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Méthode plus rapide

On « force » la factorisation par le **module** pour faire apparaître des cos et sin :

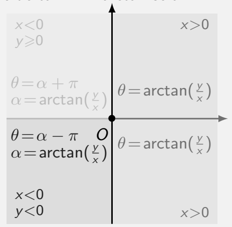
$$z = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

donc un **argument** de z est $-\frac{2\pi}{3}$.

Complément (facultatif)

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ et θ un **argument** de z. Pour $x \neq 0$, $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$.
Si l'on impose à θ d'appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (détermination **principale**), alors θ peut s'exprimer en fonction de x et y à l'aide de $\tan^{-1} = \arctan$ selon :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ et } y > 0, & \theta = \frac{\pi}{2} \\ \text{Si } x = 0 \text{ et } y < 0, & \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \text{Si } x > 0, & \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0, & \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y < 0, & \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi \end{cases}$$



Remarque 4.7

arctan étant à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (voir cours de Maths sur les **fonctions circulaires réciproques**), si $x < 0$, arctan ne donne pas directement un **argument**.
Il vaut mieux **savoir retrouver** ce genre de formules plutôt que de les apprendre par cœur !

Rappels sur l'exponentielle réelle

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^x e^y = e^{x+y}$ et $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^x)^n = e^{nx}$

Définition 4.8 (Exponentielle complexe)

*On définit l'***exponentielle d'un nombre imaginaire pur** *par la formule suivante :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$$

et l'on a alors plus généralement :

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \forall \theta \in \mathbb{R},\ re^{\mathrm{i}\theta} = r\cos(\theta) + \mathrm{i}\, r\sin(\theta)$$

C'est la relation entre **formes exponentielle** *et* **trigonométrique** *(cf. définition 4.14).*

Exemple 4.9

- $e^{0\mathrm{i}} = 1$, $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $e^{2\mathrm{i}\pi} = 1$
- $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$, $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$

Propriété 4.10 (Exponentielle complexe et conjugué/module/argument)

Le **conjugué** *de $e^{\mathrm{i}\theta}$ est $e^{-\mathrm{i}\theta}$, le* **module** *est 1 et un* **argument** *est θ :*

$$\overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta} \qquad |e^{\mathrm{i}\theta}| = 1 \qquad \arg(e^{\mathrm{i}\theta}) \equiv \theta\ [2\pi]$$

Inversement, on peut exprimer les cos et sin à l'aide l'**exponentielle complexe.**
Ce sont les formules d'**Euler**.

Propriété 4.11 (Formules d'Euler)

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

En effet :
$$\frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \frac{\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) + \big(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)\big)}{2} = \frac{\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)$$

De même :
$$\frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} = \frac{\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) - \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(\theta)}{2\mathrm{i}} = \sin(\theta)$$

Ou encore, en introduisant le **conjugué :** $\overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta}$ et en utilisant les relations exprimant **parties réelles** et **imaginaires** à l'aide du **conjugué :**

$$\cos(\theta) = \Re\mathrm{e}(e^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta} + \overline{e^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}\right)$$
$$\sin(\theta) = \Im\mathrm{m}(e^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\theta} - \overline{e^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}\right)$$

Grâce aux formules d'addition trigonométriques, les formules exponentielles réelles pour le produit et le quotient s'étendent au cas complexe.

Propriété 4.12 (Exponentielle complexe et multiplication/division)

Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\varphi} = e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)} \qquad \frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{e^{\mathrm{i}\theta}} \qquad \frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\varphi}} = e^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}$$

En effet :
$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta+\varphi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\varphi) \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ &= \cos\theta(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) + \mathrm{i}\sin\theta(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\varphi} \end{aligned}$$

Puis, en choisissant $\varphi = -\theta$: $e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{-\mathrm{i}\theta} = e^{0\mathrm{i}} = 1$, donc $e^{\mathrm{i}\theta}$ et $e^{-\mathrm{i}\theta}$ sont inverses.

En choisissant $\varphi = \theta$: $(e^{\mathrm{i}\theta})^2 = e^{2\mathrm{i}\theta}$, que l'on peut généraliser à toute puissance entière.

Corollaire 4.13 (Formule de de Moivre)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$(e^{\mathrm{i}\theta})^n = e^{\mathrm{i}n\theta} \quad \text{ou encore} \quad \big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

Définition 4.14 (Forme trigonométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $r \in \mathbb{R}^+$ le **module** *de z, $r = |z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un* **argument** *de z.*
D'après la définition 4.3, on a $z = r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)$.
Cette représentation de z est appelée **forme trigonométrique** *du nombre complexe z.*
Elle est directement reliée à la **forme exponentielle** *de la définition 4.8 :*

$$\boxed{z = |z|\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) = |z|e^{\mathrm{i}\theta}}$$

Des formules de la propriété 4.12, on déduit les relations

$$re^{\mathrm{i}\theta} \times r'e^{\mathrm{i}\theta'} = (r \times r')e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} \quad \text{et} \quad \frac{re^{\mathrm{i}\theta}}{r'e^{\mathrm{i}\theta'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$$

En récupérant **modules** et **arguments**, on obtient les formules ci-dessous.

Propriété 4.15 (Module, argument et opérations)

*Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ d'***arguments** *respectifs θ, θ'.*

- $|zz'| = |z|.|z'|$
- *$\theta + \theta'$ est un* **argument** *de zz' $(\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi])$*

Pour $z' \neq 0$:

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- *$\theta - \theta'$ est un* **argument** *de $\frac{z}{z'}$ $(\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi])$*

Exemple 4.16

- Pour trouver rapidement la forme exponentielle de $-3\mathrm{i}$, on peut mener les calculs ainsi :
$$-3\mathrm{i} = 3\times(-1)\times\mathrm{i} = 3\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$$
Ou alors on place le point d'affixe $-3\mathrm{i}$ dans le plan complexe (de coordonnées $(0,-3)$), et on « lit » le **module** 3 (distance à l'origine) et un **argument** $-\frac{\pi}{2}$ (puisque imaginaire pur négatif).
- D'après l'exemple 4.6, une **forme trigonométrique** de $-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ est $4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ et une **forme exponentielle** en est $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 4.17

1. Écrire sous forme algébrique : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$; $2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi}$; $\frac{6}{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi}}$; $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$.
2. Placer rapidement et sans calculs dans le plan complexe, les points d'affixes suivantes : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{5}}$.
3. Placer rapidement et sans calculs dans le plan complexe, les points d'affixes suivantes, puis en donner une forme exponentielle par lecture graphique : $-6\mathrm{i}$, -5, $1-\mathrm{i}$.

Exercice 4.18

1. Déterminer le **module** de $-3\mathrm{i}$, $(3+5\mathrm{i})(11-7\mathrm{i})$, $\dfrac{5}{(1-\mathrm{i})^2}$.

Réponse :
- $|-3\mathrm{i}| = |-3|.|\mathrm{i}| = 3$
- $|(3+5\mathrm{i})(11-7\mathrm{i})| = |3+5\mathrm{i}|.|11-7\mathrm{i}| = 34\sqrt{5}$
- $\left|\dfrac{5}{(1-\mathrm{i})^2}\right| = \dfrac{|5|}{|1-\mathrm{i}|^2} = \dfrac{5}{2}$

2. Donner sans calcul un **argument** de $a+a\mathrm{i}$ où $a\in\mathbb{R}^*$.

Réponse : $\arg(a+a\mathrm{i}) \equiv \arg(a)+\arg(1+\mathrm{i}) \equiv \begin{cases}\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \ \textit{si } a>0\\ -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \ \textit{si } a<0\end{cases}$

3. Déterminer un **argument** de $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{(1+\mathrm{i})^2}$.

Réponse : $\arg\left(\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{(1+\mathrm{i})^2}\right) \equiv \arg(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) - 2\arg(1+\mathrm{i}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}-2\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

Application géométrique : angle entre deux vecteurs

L'**angle** entre deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ définis à l'aide de quatre points A, B, C, D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D peut se mesurer grâce à la formule
$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$$

Exemple 4.19

Considérons, dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les points $A(1,1)$, $B(1+\sqrt{3},2)$, $C(2,2)$, $D(4,4)$.
Déterminons une mesure de l'**angle** entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives $1+\mathrm{i}$, $(1+\sqrt{3})+2\mathrm{i}$, $2+2\mathrm{i}$, $5+5\mathrm{i}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont alors pour affixes respectives $\left[(1+\sqrt{3})+2\mathrm{i}\right]-(1+\mathrm{i}) = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $(5+5\mathrm{i})-(2+2\mathrm{i}) = 3+3\mathrm{i}$.

On en déduit la mesure de l'**angle** $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$:
$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \arg\left(\frac{3+3\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right) \equiv \arg(3+3\mathrm{i})-\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$$

Propriété 5.1 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous $z, z'\in\mathbb{C}$ et tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}(z+z')^n &= \binom{n}{0}(z)^n + \binom{n}{1}(z)^{n-1}(z') + \cdots + \binom{n}{n-1}(z)(z')^{n-1} + \binom{n}{n}(z')^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(z)^k(z')^{n-k}\end{aligned}$$
avec $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k}$.

Exemple 5.2 (Premières identités remarquables)

- $(z+z')^2 = (z)^2+2(z)(z')+(z')^2$
- $(z+z')^3 = (z)^3+3(z)^2(z')+3(z)(z')^2+(z')^3$
- $(z+z')^4 = (z)^4+4(z)^3(z')+6(z)^2(z')^2+4(z)(z')^3+(z')^4$
- $(z+z')^5 = (z)^5+5(z)^4(z')+10(z)^3(z')^2+10(z)^2(z')^3+5(z)(z')^4+(z')^5$

Triangle de Pascal

Les coefficients $\binom{n}{k}$ (lu « k parmi n ») sont appelés **coefficients binomiaux.**

On peut facilement retrouver leur valeur en construisant le **triangle de Pascal** (cf. ci-dessous).

Le nombre situé à l'intersection de la ligne n et de la colonne k représente le **coefficient binomial** de rang k dans le développement de $(z+z')^n$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Linéarisation

Dans cette partie, l'objectif est de transformer une **puissance** de cosinus ou de sinus en une **somme sans puissances.**

Plus précisément, pour tout entier $n\geqslant 2$, on peut transformer $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ comme **combinaison linéaire** de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Méthode :

- **Formules d'Euler :** on écrit $\begin{cases}\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\end{cases}$
- **Formule du binôme :** on développe
$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k\left(\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{n-k}$$
- **Formule de De Moivre :** on écrit
$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{n-k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\theta}, \quad k\in\{0,1,\ldots,n\}$$
- **Formules d'Euler :** on rassemble les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$, $k\in\{-n,-n+2,\ldots,n\}$ deux à deux conjuguées : $\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = 2\cos(k\theta)\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = 2\mathrm{i}\sin(k\theta)\end{cases}$

Exemple 5.3 (Puissance 3)

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) &= \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right]^3\\ &= \frac{1}{8}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2+\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3\right]\\ &= \frac{1}{8}\left[\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}\right]\\ &= \frac{1}{8}\left[2\cos(3\theta)+3\times 2\cos(\theta)\right]\\ &= \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(\theta) &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right]^3\\ &= \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2+\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3\right]\\ &= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}\right]\\ &= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left[2\mathrm{i}\sin(3\theta)-3\times 2\mathrm{i}\sin(\theta)\right]\\ &= -\frac{1}{4}\sin(3\theta)+\frac{3}{4}\sin(\theta)\end{aligned}$$

Exemple 5.4 (Puissance 4)

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta) &= \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right]^4\\ &= \frac{1}{16}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4+4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+6\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2+4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3+\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^4\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}+4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+6+4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[2\cos(4\theta)+4\times 2\cos(2\theta)+6\right]\\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}\int\cos^4(\theta)\mathrm{d}\theta &= \int\left(\frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{8}\int\cos(4\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{3}{8}\int\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{32}\sin(4\theta)+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{3}{8}\theta+\textit{Constante}\end{aligned}$$

Exemple 5.4 (Puissance 4)

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta) &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right]^4\\ &= \frac{1}{16}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4-4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)+6\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2-4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3+\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^4\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+6-4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[2\cos(4\theta)-4\times 2\cos(2\theta)+6\right]\\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta)-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}\int\sin^4(\theta)\mathrm{d}\theta &= \int\left(\frac{1}{8}\cos(4\theta)-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{8}\int\cos(4\theta)\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}\int\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{3}{8}\int\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{32}\sin(4\theta)-\frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{3}{8}\theta+\textit{Constante}\end{aligned}$$

Exemple 5.5 (Puissance 5)

$$\begin{aligned}
\cos^5(\theta) &= \left[\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right]^5\\
&= \frac{1}{32}\Big[\left(e^{i\theta}\right)^5+5\left(e^{i\theta}\right)^4\left(e^{-i\theta}\right)+10\left(e^{i\theta}\right)^3\left(e^{-i\theta}\right)^2\\
&\quad +10\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^3+5\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)^4+\left(e^{-i\theta}\right)^5\Big]\\
&= \frac{1}{32}\left[e^{5i\theta}+5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}+10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\right]\\
&= \frac{1}{32}\left[2\cos(5\theta)+5\times 2\cos(3\theta)+10\times 2\cos(\theta)\right]\\
&= \frac{1}{16}\cos(5\theta)+\frac{5}{16}\cos(3\theta)+\frac{5}{8}\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(\theta)d\theta &= \int\left(\frac{1}{16}\cos(5\theta)+\frac{5}{16}\cos(3\theta)+\frac{5}{8}\cos(\theta)\right)d\theta\\
&= \frac{1}{16}\int\cos(5\theta)d\theta+\frac{5}{16}\int\cos(3\theta)d\theta+\frac{5}{8}\int\cos(\theta)d\theta\\
&= \frac{1}{80}\sin(5\theta)+\frac{5}{48}\sin(3\theta)+\frac{5}{8}\sin(\theta)+\mathit{Constante}
\end{aligned}$$

Exemple 5.5 (Puissance 5)

$$\begin{aligned}
\sin^5(\theta) &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right]^5\\
&= \frac{1}{32i}\Big[\left(e^{i\theta}\right)^5-5\left(e^{i\theta}\right)^4\left(e^{-i\theta}\right)+10\left(e^{i\theta}\right)^3\left(e^{-i\theta}\right)^2\\
&\quad -10\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^3+5\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)^4-\left(e^{-i\theta}\right)^5\Big]\\
&= -\frac{i}{32}\left[e^{5i\theta}-5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}-10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}-e^{-5i\theta}\right]\\
&= -\frac{i}{32}\left[2i\sin(5\theta)-5\times 2i\sin(3\theta)+10\times 2i\sin(\theta)\right]\\
&= \frac{1}{16}\sin(5\theta)-\frac{5}{16}\sin(3\theta)+\frac{5}{8}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \sin^5(\theta)d\theta &= \int\left(\frac{1}{16}\sin(5\theta)-\frac{5}{16}\sin(3\theta)+\frac{5}{8}\sin(\theta)\right)d\theta\\
&= \frac{1}{16}\int\sin(5\theta)d\theta-\frac{5}{16}\int\sin(3\theta)d\theta+\frac{5}{8}\int\sin(\theta)d\theta\\
&= -\frac{1}{80}\cos(5\theta)+\frac{5}{48}\cos(3\theta)-\frac{5}{8}\cos(\theta)+\mathit{Constante}
\end{aligned}$$

Anti-linéarisation

Dans cette partie, l'objectif est d'exprimer le cosinus ou le sinus d'un angle **multiple** à l'aide du cosinus et/ou du sinus de l'angle **originel.**

Plus précisément, pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut transformer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en un polynôme de $\cos(\theta)$ et/ou $\sin(\theta)$ de degré n.

Méthode :

- **Exponentielle complexe :** on écrit $\begin{cases}\cos(n\theta)=\mathfrak{Re}(e^{in\theta})\\ \sin(n\theta)=\mathfrak{Im}(e^{in\theta})\end{cases}$
- **Formule de De Moivre :** on écrit
$$e^{in\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^n=\left[\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right]^n$$
- **Formule du binôme :** on développe
$$\left[\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\cos(\theta)\right]^{n-k}\left[i\sin(\theta)\right]^k$$
- **Parties réelles/imaginaires :** on obtient un polynôme de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Avec $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, les puissances paires (resp. impaires) de $\sin(\theta)$ peuvent s'exprimer comme polynômes de $\cos(\theta)$ (resp. $\sin(\theta)\times$polynômes de $\cos(\theta)$).

Exemple 5.6 (Angle triple)

Partant de

$$\begin{aligned}
e^{i(3\theta)} &= \left(e^{i\theta}\right)^3=\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^3\\
&= \cos^3(\theta)+3\cos^2(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]+3\cos(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]^2+\left[i\sin(\theta)\right]^3\\
&= \left[\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\right]+i\left[3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)\right]\\
&= \left[\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)\right]\\
&\quad +i\left[3\sin(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)-\sin^3(\theta)\right]\\
&= \left[4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\right]+i\left[3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta)\right]
\end{aligned}$$

on déduit

$$\cos(3\theta)=\mathfrak{Re}\left(e^{i(3\theta)}\right)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$$
$$\sin(3\theta)=\mathfrak{Im}\left(e^{i(3\theta)}\right)=3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta)$$

On a ainsi

$$\cos(3\theta)=P\big(\cos(\theta)\big)\quad \textit{et}\quad \sin(3\theta)=-P\big(\sin(\theta)\big)$$

avec $P(X)=4X^3-3X$.

Exemple 5.7 (Angle quadruple)

Partant de

$$\begin{aligned}
e^{i(4\theta)} &= \left(e^{i\theta}\right)^4=\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^4\\
&= \cos^4(\theta)+4\cos^3(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]+6\cos^2(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]^2\\
&\quad +4\cos(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]^3+\left[i\sin(\theta)\right]^4\\
&= \left[\cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta)\right]\\
&\quad +i\left[4\cos^3(\theta)\sin(\theta)-4\cos(\theta)\sin^3(\theta)\right]\\
&= \left[\cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)+\left(1-\cos^2(\theta)\right)^2\right]\\
&\quad +4i\sin(\theta)\left[\cos^3(\theta)-\cos(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)\right]\\
&= \left[8\cos^4(\theta)-8\cos^2(\theta)+1\right]+i\,4\sin(\theta)\left[2\cos^3(\theta)-\cos(\theta)\right]
\end{aligned}$$

on déduit

$$\cos(4\theta)=\mathfrak{Re}\left(e^{i(4\theta)}\right)=8\cos^4(\theta)-8\cos^2(\theta)+1$$
$$\sin(4\theta)=\mathfrak{Im}\left(e^{i(4\theta)}\right)=4\sin(\theta)\left[2\cos^3(\theta)-\cos(\theta)\right]$$

Exemple 5.8 (Angle quintuple)

Partant de

$$\begin{aligned}
e^{i(5\theta)} &= \left(e^{i\theta}\right)^5=\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^5\\
&= \cos^5(\theta)+5\cos^4(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]+10\cos^3(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]^2\\
&\quad +10\cos^2(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]^3+5\cos(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]^4+\left[i\sin(\theta)\right]^5\\
&= \left[\cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)\right]\\
&\quad +i\left[5\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\right]\\
&= \left[\cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)+5\cos(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)^2\right]\\
&\quad +i\sin(\theta)\left[5\left(1-\sin^2(\theta)\right)^2-10\sin^2(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)+\sin^4(\theta)\right]\\
&= \left[16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)\right]\\
&\quad +i\left[16\sin^5(\theta)-20\sin^3(\theta)+5\sin(\theta)\right]
\end{aligned}$$

on déduit

$$\cos(5\theta)=\mathfrak{Re}\left(e^{i(5\theta)}\right)=16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)$$
$$\sin(5\theta)=\mathfrak{Im}\left(e^{i(5\theta)}\right)=16\sin^5(\theta)-20\sin^3(\theta)+5\sin(\theta)$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Trigonométrie

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_trigonometrie.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Binôme de Newton

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_binome.pdf

Notions à retenir

- Maîtriser le calcul sur les complexes
  - Opérations usuelles
  - Module/argument
  - Forme exponentielle
  - Lien avec la géométrie plane
- Maîtriser la linéarisation et l'antilinéarisation

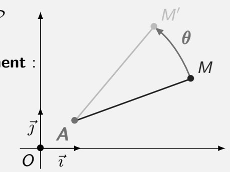
Annexes

- **Rotation plane**
- **Somme de deux exponentielles**
- **Racines n^e de 1**
- **Transformation de $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$**
- **Équations à coefficients complexes**

Application géométrique : rotation plane

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère **orthonormé direct** $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On fixe un angle θ.

Pour tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z, soit M' le point de $\mathcal{P}$ d'affixe $z' = e^{i\theta}z$.



D'après les propriétés 4.10 et 4.15, on a **algébriquement** :

- $|z'| = |e^{i\theta}|.|z| = |z|$
- $\arg(z') \equiv \arg(e^{i\theta}) + \arg(z) \equiv \arg(z) + \theta\ [2\pi]$

soit, **géométriquement** :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = \theta$$

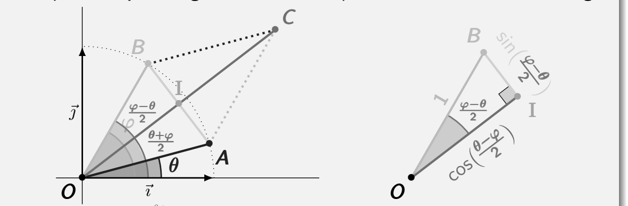
En d'autres termes, le point M' est l'image du point M par la **rotation** du plan $\mathcal{P}$ de **centre** O et d'**angle** θ : $\begin{array}{ccc}\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}\\ M & \longmapsto & M'\end{array}$

Cette correspondance **géométrique** se traduit par la correspondance **algébrique** (**multiplication** par $e^{i\theta}$) : $\boxed{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & e^{i\theta}z\end{array}}$

Plus généralement, la **rotation** de $\mathcal{P}$ de **centre** un point A d'affixe z_A et d'**angle** θ s'exprime par la correspondance **algébrique** : $\boxed{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z-z_A)+z_A\end{array}}$

Application géométrique : somme de deux exponentielles et losange

Soit A et B les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $e^{i\varphi}$, et C le point d'affixe $e^{i\theta}+e^{i\varphi}$.
On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$
On dispose d'un **parallélogramme** $OACB$ tel que $OA = OB = 1$, c'est un **losange.**



En factorisant par $e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$, on trouve

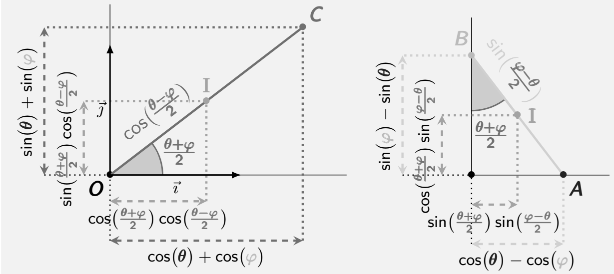
$$e^{i\theta}+e^{i\varphi} = e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$$

$$e^{i\theta}-e^{i\varphi} = e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\theta-\varphi}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$$

Les somme et différence $e^{i\theta}+e^{i\varphi}$ et $e^{i\theta}-e^{i\varphi}$ sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BA}$ correspondant aux **diagonales** OC et AB du losange.
Le facteur i dans la 2^e factorisation indique que les diagonales sont **orthogonales**.

Application trigonométrique : somme/différence de deux cosinus/sinus

Partons à présent de : $e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$ et $e^{i\theta}-e^{i\varphi}=2i\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$.
Des schémas précédents, on extrait les suivants :



En prenant **parties réelles et imaginaires**, on récupère les formules **trigonométriques** :

$\cos(\theta)+\cos(\varphi)=2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$	$\cos(\theta)-\cos(\varphi)=-2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$
$\sin(\theta)+\sin(\varphi)=2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$	$\sin(\theta)-\sin(\varphi)=2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$

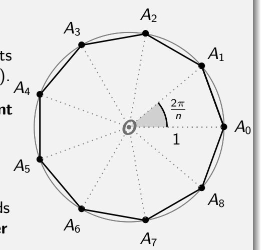
Application algébrique : racines n^e de 1

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Considérons la suite d'**exponentielles complexes** $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N},\ z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

- Explicitement, les n premiers termes s'écrivent :
$$z_0 = 1,\ z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}},\ z_2 = e^{i\frac{4\pi}{n}},\ z_3 = e^{i\frac{6\pi}{n}},\ \ldots,\ z_{n-1} = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$
- On remarque que $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{n}} = e^{i.2\pi} = 1$. Plus généralement :
$$z_{k+n} = e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}} = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{2n\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\times e^{i\frac{2n\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\times e^{i.2\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_k$$
Ainsi la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est **périodique**.
Ses seules valeurs distinctes sont les n nombres $z_0(=z_n), z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$.
- D'après la formule de de Moivre :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ (z_k)^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i\,n.\frac{2k\pi}{n}} = e^{i.2k\pi} = 1$$
Ainsi, les n nombres distincts $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sont des **racines n^e** de 1.
Par définition, les **racines n^e** d'un complexe Z sont les complexes z vérifiant $z^n = Z$, c'est-à-dire les racines du polynôme $X^n - Z$. Ce polynôme étant de degré n, il possède **au plus** n racines (voir cours de Maths, chapitre Polynômes).
Ainsi, les n nombres distincts $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sont **toutes les racines n^e** de 1.

Application mécanique : barycentre d'un polygone régulier

- D'après la formule de de Moivre, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$.
La suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi une **suite géométrique** de raison $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
On sait alors calculer explicitement la somme de ses n premiers termes.
Pour une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0\dfrac{1-r^n}{1-r}$.
Ici, cela donne (rappelons que $(z_1)^n = 1$ et $z_1 \neq 0$) :
$$z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = 1 + z_1 + (z_1)^2 + \cdots + (z_1)^{n-1} = \frac{1-(z_1)^n}{1-z_1} = 0$$
soit : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0}$
Notons $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n(=A_0)$ les n points d'affixes respectives $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n(=z_0)$.
L'égalité $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$ se retranscrit **vectoriellement**
selon $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}}$
Les points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ affectés de poids identiques constituent un **polygone régulier** de **centre de gravité** O (**isobarycentre**).



Propriété A.1 (Amplitude/déphasage (facultatif))

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R},\quad a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = r\cos(\theta-\varphi)}$$

De plus $r = \sqrt{a^2+b^2}$ et, si a et b ne sont pas simultanément nuls, φ vérifie $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{r}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{r}$. En particulier : $\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}$.

En effet, écrivons :

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \Re\mathfrak{e}\left[(a-ib)\big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)\right]$$

On introduit le **module** r et un **argument** φ de $a+ib$:

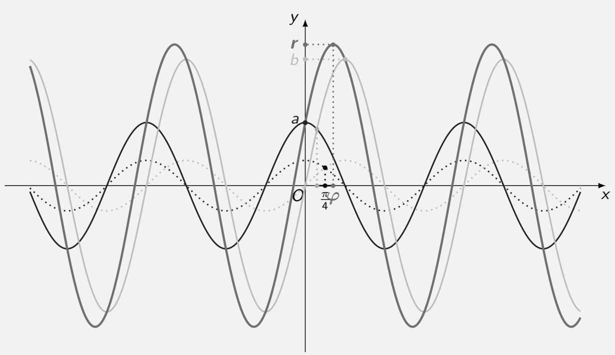
$$a + ib = r\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big) = re^{i\varphi}$$

Au passage : $r = \sqrt{a^2+b^2}$ et si $r \neq 0$: $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{r}$, $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{r}$.

On a alors :

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \Re\mathfrak{e}\big(re^{-i\varphi}e^{i\theta}\big) = \Re\mathfrak{e}\big(re^{i(\theta-\varphi)}\big) = r\cos(\theta-\varphi)$$

Exemple A.2 (Superposition de deux ondes sinusoïdales (facultatif))



Définition A.3 (Exponentielle complexe générale)

*Soit x, y deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $x+iy$ selon*

$$e^{x+iy} = e^x\,e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Propriété A.4 (Propriétés)

Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier n, on a :

- $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ *et* $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$ *et* $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

Exemple A.5 (Onde sinusoïdale amortie)

Une **onde sinusoïdale amortie** peut être modélisée par une fonction de la forme $t \longmapsto e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$, $\alpha > 0$ désignant un coefficient d'amortissement et $\omega > 0$ la pulsation de l'onde.

Il peut être judicieux de l'interpréter comme la partie réelle ou imaginaire de la fonction complexe $t \longmapsto e^{(-\alpha+i\omega)t}$.

Cette partie sera revue en cours de Mathématiques dans le chapitre Polynômes.

Théorème B.1 (Théorème de d'Alembert-Gauss)

*Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet **au moins une racine complexe.***

Corollaire B.2

- *Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **exactement** n racines comptées avec leur **multiplicité.***
- *Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \in \mathbb{N}$ se factorise en un produit d'**exactement** n polynômes de degré 1 et d'une constante.*

Exemple B.3

- $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$
Le polynôme z^4-1 de degré 4 admet donc 4 **racines simples** dans $\mathbb{C}$: $1, -1, i, -i$.
- $(z^2+1)^2 = \big((z-i)(z+i)\big)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$
Le polynôme $(z^2+1)^2$ de degré 4 admet donc 2 **racines doubles** dans $\mathbb{C}$: i et $-$i.
La multiplicité 2 signifie que l'on compte i et $-$i deux fois pour trouver 4 **racines comptées avec leur multiplicité.**

Définition B.4

*Soit $Z \in \mathbb{C}$. On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.*

Remarque B.5

- ***Attention :*** la notation $\sqrt{z}$ est **strictement réservée** aux nombres z **réels positifs !** Par exemple, les notations $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{i}$ **n'ont pas** de sens.
- Supposons $Z \neq 0$. Si z_1 est une **racine carrée** de Z, alors $z_2 = -z_1$ en est une autre. En factorisant alors $z^2 - Z = z^2 - z_1^2$ selon $(z - z_1)(z + z_1) = (z - z_1)(z - z_2)$, on voit qu'il n'y en a pas d'autre.

Exemple B.6

- Les **racines carrées** de -1 sont i et $-\mathrm{i}$. Celles de -2 sont $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$. Plus généralement, les **racines carrées** d'un **réel négatif** a sont $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$.
- En rappelant que $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$, on voit que, pour tous $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les **racines carrées** de $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sont $\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$. Ainsi :

  Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées.

  Par exemple, les **racines carrées** de $-3\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ sont $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ et $-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

Recherche des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe (non nul) avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On cherche les complexes $\delta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\delta^2 = z$.

1. En écrivant $\delta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\mathrm{i}\alpha\beta$, dont on identifie les parties réelles et imaginaires avec celles de $z = a + \mathrm{i}b$,
2. en rajoutant l'équation surnuméraire du **module** $|\delta|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, que l'on identifie avec $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (grâce à $\left|\delta\right|^2 = |\delta|^2$),

on obtient un système de trois équations :

$$\begin{cases} \text{égalité des parties réelles} \\ \text{égalité des parties imaginaires} \\ \text{égalité des modules} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta \quad = b \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

- À l'aide des première et troisième équations, on extrait facilement α^2 et β^2, ce qui donne deux possibilités (opposées) pour α et deux possibilités (opposées) pour β, soit 4 possibilités pour δ.
- La deuxième équation permet de déterminer si α et β sont de même signe ou de signes opposés. Il reste alors deux possibilités (opposées) pour δ.

En conclusion :

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées.

Exemple B.7

Cherchons les **racines carrées** de $3 - 4\mathrm{i}$.

Soit $\delta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ une telle **racine carrée.** Alors :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta \quad = -4 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases}$$

- Des première et troisième équations, on en déduit que $\alpha^2 = 4, \beta^2 = 1$. Donc $\alpha = \pm 2$ et $\beta = \pm 1$, ce qui donne 4 possibilités pour (α, β) : $(2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)$.
- La deuxième équation nous indique que α et β sont de signes opposés, ce qui limite à deux possibilités pour (α, β) : $(2, -1)$ et $(-2, 1)$.

Par conséquent, les **racines carrées** de $3 - 4\mathrm{i}$ sont $2 - \mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i}$.

Grâce aux **racines carrées** des complexes, on peut résoudre les équations du second degré à **coefficients complexes**.

Théorème B.8 (Équations du 2nd degré à coefficients complexes)

*Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients a, b, c **complexes** ($a \neq 0$), on calcule le **discriminant** de l'équation : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ puis on détermine une **racine carrée** δ de Δ. On tient alors la discussion suivante :*

- *si $\underline{\Delta \neq 0}$, alors l'équation a **deux solutions complexes distinctes***

$$\boxed{z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}}$$

- *si $\underline{\Delta = 0}$, alors l'équation a **une unique solution complexe*** $\boxed{z_0 = -\dfrac{b}{2a}}$

Exemple B.9

Soit l'équation $z^2 + (2 - 3\mathrm{i})z - 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

Le **discriminant** vaut $\Delta = (2 - 3i)^2 - 4(-2 - 2\mathrm{i}) = 4 - 9 - 12\mathrm{i} + 8 + 8\mathrm{i} = 3 - 4\mathrm{i}$.

Une **racine carrée** de Δ est $2 - \mathrm{i}$, donc les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-(2 - 3\mathrm{i}) - (2 - \mathrm{i})}{2} = -2 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(2 - 3\mathrm{i}) + (2 - \mathrm{i})}{2} = i$$

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

1. On définit le nombre complexe $\jmath = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$.
   - a. Calculer $\jmath^3$, puis plus généralement $\jmath^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - b. Comparer $\jmath^2$ et $\bar{\jmath}$. En déduire $1 + \jmath + \jmath^2$ et $1 + \jmath^2 + \jmath^4$.
   - c. Représenter les trois points d'affixes 1, $\jmath$ et $\bar{\jmath}$ dans le plan complexe et interpréter algébriquement et géométriquement les résultats précédemment obtenus.
2. - a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'**inconnues** u, v, w et de **paramètres** complexes a, b, c suivant :

     $$(S) : \quad \begin{cases} u + \quad v + \quad w = a \\ u + \ \jmath\, v + \jmath^2\, w = b \\ u + \jmath^2\, v + \ \jmath\, w = c \end{cases}$$

     On pourra effectuer des combinaisons ad hoc des équations du système.
   - b. Comment faut-il choisir les paramètres a, b, c pour que u, v, w soient des nombres **réels ?**

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

1. - a. On a $\jmath^3 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}\right)^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi} = 1$, puis pour tout $p \in \mathbb{N}$:

     $$\jmath^{3p} = (\jmath^3)^p = 1$$
     $$\jmath^{3p+1} = \jmath^{3p} \times \jmath = \jmath$$
     $$\jmath^{3p+2} = \jmath^{3p} \times \jmath^2 = \jmath^2$$

     En résumé :

     $$\jmath^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3} \\ \jmath & \text{si } n \text{ est un multiple de 3 plus 1} \\ \jmath^2 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3 plus 2} \end{cases}$$

   - b. On a $\jmath^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4\pi/3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi/3} = \bar{\jmath}$. On en tire, avec $\mathfrak{Re}(\jmath) = -\frac{1}{2}$:

     $$1 + \jmath + \jmath^2 = 1 + \jmath + \bar{\jmath} = 1 + 2\,\mathfrak{Re}(\jmath) = 0$$

     ou encore, avec $\jmath^3 = 1$:

     $$1 + \jmath + \jmath^2 = \frac{\jmath^3 - 1}{\jmath - 1} = 0$$

     puis

     $$1 + \jmath^2 + \jmath^4 = 1 + \jmath + \jmath^2 = 0.$$

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

1. - c. ***Interprétation algébrique :***

     En particulier pour $p = 2$: $(\jmath^3)^2 = (\jmath^2)^3 = 1$
     donc $\jmath^2$ est une autre **racine cubique** de 1.

     De plus 1 est naturellement une **racine cubique** de 1.

     On a donc trouvé **trois racines distinctes** du polynôme du 3e degré $z^3 - 1$.
     On a ainsi obtenu **toutes** les racines de ce polynôme **dans $\mathbb{C}$.**

     En conclusion, 1 admet :
     - ⋆ **une unique racine cubique dans $\mathbb{R}$** qui est 1 ;
     - ⋆ **trois racines cubiques dans $\mathbb{C}$** qui sont 1, $\jmath$ et $\jmath^2 = \bar{\jmath}$.

     On a alors la factorisation sur $\mathbb{C}$ suivante :

     $$z^3 - 1 = (z - 1)(z - \jmath)(z - \jmath^2)$$

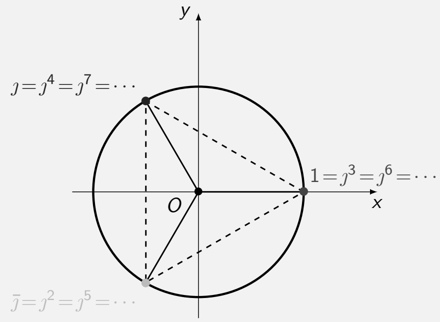
     Remarque : en développant ce produit, on obtient :

     $$(z - 1)(z - \jmath)(z - \jmath^2) = z^3 - (1 + \jmath + \jmath^2)z^2 + (\jmath + \jmath^2 + \jmath^3)z + \jmath^3$$

     puis, par identification, on retrouve la relation $1 + \jmath + \jmath^2 = 0$.

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

1. - c. ***Interprétation géométrique :***



Les points d'affixes $1, \jmath, \jmath^2$ forment un **triangle équilatéral de centre de gravité *O*.**

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

2.

$$(S) : \quad \left\{\begin{array}{l|l} u + \quad v + \quad w = a & E_1 \\ u + \ \jmath\, v + \jmath^2\, w = b & E_2 \\ u + \jmath^2\, v + \ \jmath\, w = c & E_3 \end{array}\right.$$

- a. Effectuons les combinaisons linéaires des équations E_1, E_2, E_3 suivantes :
  - la combinaison $E_1 + E_2 + E_3$ donne $u = \frac{1}{3}(a + b + c)$;
  - la combinaison $E_1 + \jmath^2\, E_2 + \jmath\, E_3$ donne $v = \frac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c)$;
  - la combinaison $E_1 + \jmath\, E_2 + \jmath^2\, E_3$ donne $w = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c)$.

  Le système (S) admet donc une unique solution donnée par

  $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\tfrac{1}{3}(a + b + c), \tfrac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c), \tfrac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c)\right)\right\}}$$

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

❷

$$(S):\quad \begin{cases} u + \quad v + \quad w = a \\ u + \jmath\, v + \jmath^2\, w = b \\ u + \jmath^2\, v + \jmath\, w = c \end{cases} \begin{array}{|l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

ⓑ Cherchons une condition **nécessaire** et **suffisante** pour que les nombres u, v, w soient **réels**.

Condition nécessaire. Supposons u, v, w **réels**. Alors :

- l'équation E_1 indique que le nombre a doit être **réel** ;
- puisque $\jmath$ et $\jmath^2$ sont conjugués, les nombres complexes $u + \jmath\, v + \jmath^2\, w$ et $u + \jmath^2\, v + \jmath\, w$ sont conjugués. Les équations E_2 et E_3 indiquent donc que les nombres b et c doivent être des complexes **conjugués**.

Condition suffisante. Supposons a **réel** et b, c **conjugués**. Alors :

- $u = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\mathfrak{Re}(b)\big) \in \mathbb{R}$
- $v = \frac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c) = \frac{1}{3}(a + \bar{\jmath}\, b + \jmath\, c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\mathfrak{Re}(\bar{\jmath}\, b)\big) \in \mathbb{R}$
- $w = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c) = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \bar{\jmath}\, c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\mathfrak{Re}(\jmath\, b)\big) \in \mathbb{R}$

D'où l'équivalence : u, v, w **réels** $\Longleftrightarrow$ (a **réel** et b, c **conjugués**).