INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

Nombres complexes

Aimé Lachal

Cours d'OMNI
1er cycle, 1re année

Sommaire

Sommaire

Bref historique

Au milieu du XVIᵉ siècle, des mathématiciens italiens comme Cardan ou Bombelli essayent de résoudre des équations du second degré n'ayant pas de solution, comme $x^2 = -1$.
Ils notent $\sqrt{-1}$ une solution de cette équation, et essayent d'utiliser cette nouvelle quantité – ni positive, ni négative – pour effectuer des calculs algébriques.

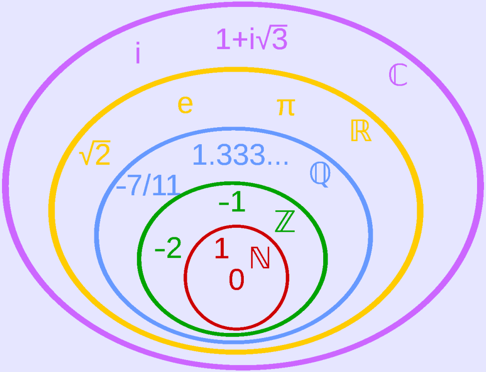
Les nombres complexes sont alors peu à peu très utilisés, comme par Descartes en 1637, qui les nomme **« quantités imaginaires ».**

En 1774, Euler remarque des problèmes dans la notation avec une racine carrée. Par exemple si l'on suit les règles habituelles, on obtient

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

ce qui est incompatible avec le fait qu'on a aussi $(\sqrt{-1})^2 = -1$.
Il décide donc de noter i la quantité $\sqrt{-1}$. Cette notation sera reprise par Gauss en 1831 mais mettra du temps à s'imposer. Cependant à partir de Gauss, et pour nous en particulier, le symbole $\sqrt{\ }$ devra être réservé aux **nombres réels positifs.**

Bref historique



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- $\mathbb{N}$: entiers naturels pour le comptage
- $\mathbb{Z}$: entiers relatifs, extension des entiers naturels permettant de résoudre des équations de la forme $x + n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé
- $\mathbb{Q}$: nombres rationnels, extension des entiers relatifs permettant de résoudre des équations de la forme $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$ fixés
- $\mathbb{R}$: nombres réels, extension des rationnels permettant de résoudre des équations de la forme $x^2 - r = 0$, $r \in \mathbb{Q}_+^*$ fixé, de calculer des limites, etc.
- $\mathbb{C}$: nombres complexes, extension des réels permettant de résoudre des équations de la forme $x^2 + r = 0$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, etc.

Exemple 1.1

En utilisant le symbole i, on peut par exemple écrire des nombres complexes dont le carré vaut -25 :

$$(5\mathrm{i})^2 = 5^2 \times \mathrm{i}^2 = 25 \times (-1) = -25$$

Les nombres complexes dont le carré est -25 sont alors $5\mathrm{i}$ et $-5\mathrm{i}$.

De la même manière, les nombres complexes dont le carré est -2 sont $\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{2}$.

En 1831, Gauss donnera le nom de **« nombres complexes »** à ces quantités considérées jusqu'ici comme imaginaires.

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'addition et la multiplication doivent prolonger les opérations de $\mathbb{R}$ et avoir les mêmes propriétés : **commutativité, associativité, distributivité.**

Il y a seulement la propriété supplémentaire de l'existence de i dont le carré vaut -1 et qui permet de construire tout un ensemble cohérent avec les 4 opérations élémentaires $+, -, \times$ et $/$.

Sommaire

Définition 2.1

*Un **nombre complexe**, souvent noté z, est un nombre de la forme $x + \mathrm{i}y$, où x et y sont deux **nombres réels** et i un **nombre imaginaire** possédant la propriété $\mathrm{i}^2 = -1$.*

L'ensemble des complexes est noté $\mathbb{C}$.

- *$x + \mathrm{i}y$ est la **forme algébrique** de z ;*
- *x est appelé **partie réelle** de z et notée $\mathfrak{Re}(z)$;*
- *y est appelé **partie imaginaire** de z et notée $\mathfrak{Im}(z)$.*
  (Attention : la partie imaginaire est un réel, i n'en fait pas partie.)

*Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur**.*

Exemple 2.2

- Si $z = 2 + 4\mathrm{i}$, $\mathfrak{Re}(z) = 2$ et $\mathfrak{Im}(z) = 4$.
- Si $z = -3\mathrm{i}$, $\mathfrak{Re}(z) = 0$ et $\mathfrak{Im}(z) = -3$. z est **imaginaire pur**.

Remarques 2.3

- En électricité, i se note j pour ne pas confondre avec l'intensité.
- Un nombre réel x peut s'écrire $x + 0\mathrm{i}$ donc c'est aussi un nombre complexe : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Propriété 2.4 (Égalité)

*Deux complexes z et z' sont **égaux** si et seulement si ils ont **même partie réelle et même partie imaginaire**. Donc :*

$$\boxed{z = z' \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z') \text{ et } \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')}$$

En d'autres termes, on peut identifier, pour tous réels x, y, x', y', selon

$$\boxed{x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y' \iff x = x' \text{ et } y = y'}$$

Exercice 2.5

1. Résoudre l'équation d'inconnue **réelle** x : $3x^2 + 9 + 2\mathrm{i}x = 12x + 2\mathrm{i}$.

   Réponse : $x = 1$

2. Pour quelles valeurs réelles de x le complexe $z = (x-1) + \mathrm{i}(2 - x^2)$ est-il :
   a) réel ? b) imaginaire pur ? c) égal à $-3 - 2\mathrm{i}$?

   Réponse : *a)* $x = \sqrt{2}$ *ou* $-\sqrt{2}$ *b)* $x = 1$ *c)* $x = -2$

Définition 2.6 (Conjugué)

Pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ (avec x et y réels), le nombre complexe $x - \mathrm{i}y$ est appelé ***conjugué*** *de z et noté $\overline{z}$:* $\boxed{\overline{z} = x - \mathrm{i}y.}$

Exemple 2.7

Le conjugué de $3 - 4\mathrm{i}$ est $3 + 4\mathrm{i}$.

Propriété 2.8 (Parties réelle et imaginaire et conjugué)

- *Le* ***conjugué du conjugué*** *d'un nombre* ***complexe*** *est lui-même :* $\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{(\overline{z})} = z$.
- *Le* ***conjugué*** *d'un nombre* ***réel*** *est lui-même et le* ***conjugué*** *d'un nombre* ***imaginaire pur*** *est son opposé :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \overline{x} = x \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{i}x} = -\mathrm{i}x$.
- *Les* ***parties réelle et imaginaire*** *d'un nombre complexe z peuvent s'exprimer à l'aide de z et de son* ***conjugué*** *selon :*

$$\boxed{\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}}$$

- *En conséquence, pour tout complexe z :*
  - z *est* ***réel*** *ssi* $\overline{z} = z$;
  - z *est* ***imaginaire pur*** *ssi* $\overline{z} = -z$.

Sommaire

Addition/multiplication

Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ s'étendent de manière naturelle aux nombres complexes, en pensant à utiliser $\mathrm{i}^2 = -1$. Ci-après, a, b, c, d sont quatre réels quelconques.

- **Addition, soustraction** : partant de
$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = a + \mathrm{i}b + c + \mathrm{i}d = a + c + \mathrm{i}b + \mathrm{i}d$,

$$\boxed{\begin{array}{l}(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)\\ (a + \mathrm{i}b) - (c + \mathrm{i}d) = (a - c) + \mathrm{i}(b - d)\end{array}}$$

  En particulier, l'**opposé** d'un complexe est donné par

$$\boxed{-(a + \mathrm{i}b) = -a - \mathrm{i}b}$$

  Exemple : $(2 + 3\mathrm{i}) + (5 + 7\mathrm{i}) = 2 + 5 + 3\mathrm{i} + 7\mathrm{i} = 7 + 10\mathrm{i}$.

- **Multiplication** : partant de $(a + \mathrm{i}b) \times (c + \mathrm{i}d) = ac + a\mathrm{i}d + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}b \times \mathrm{i}d$,

$$\boxed{(a + \mathrm{i}b) \times (c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)}$$

  Exemple :
$$\begin{aligned}(2 + 3\mathrm{i})(7 + 2\mathrm{i}) &= 2 \times 7 + 2 \times 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} \times 7 + 3\mathrm{i} \times 2\mathrm{i}\\ &= 14 + 4\mathrm{i} + 21\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2\\ &= 14 + 25\mathrm{i} - 6 = 14 - 6 + 25\mathrm{i} = 8 + 25\mathrm{i}\end{aligned}$$

  En particulier, le produit de deux complexes conjugués se simplifie selon

$$\boxed{(a + \mathrm{i}b) \times (a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2}$$

Inverse/division

- **Inverse pour la multiplication** : pour $z \neq 0$, on met le quotient $\dfrac{1}{z}$ sous forme algébrique en multipliant numérateur et dénominateur par $\overline{z}$ le conjugué de z, ce qui donne :
$\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$, soit :

$$\boxed{\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}}$$

- **Quotient** : pour mettre un quotient $\dfrac{z}{z'}$ sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par $\overline{z'}$ le conjugué de z', ce qui donne :
$\dfrac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} = \dfrac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)} = \dfrac{(ac+bd)+\mathrm{i}(bc-ad)}{c^2+d^2}$, soit :

$$\boxed{\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \mathrm{i}\frac{ad-bc}{c^2+d^2}}$$

Exemple : $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \dfrac{4+2\mathrm{i}+6\mathrm{i}+3(\mathrm{i})^2}{2^2-(\mathrm{i})^2} = \dfrac{1+8\mathrm{i}}{5} = \dfrac{1}{5}+\dfrac{8}{5}\mathrm{i}.$

Remarque 3.1 (Ordre)

L'ordre $\leqslant$ ou $<$ **n**'existe **pas** sur $\mathbb{C}$. En particulier dire qu'un nombre complexe est **positif** ou **négatif** **n**'a **pas** de sens.

Exercice 3.2 (Opérations)

1. Calculer la somme $s = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^7$.

   Réponse : *À l'aide de la somme d'une suite géométrique,* $s = \dfrac{\mathrm{i}^8 - 1}{\mathrm{i} - 1} = 0$ *grâce à* $\mathrm{i}^8 = (\mathrm{i}^2)^4 = (-1)^4 = 1$.

2. Soit les complexes $z = -1 + \mathrm{i}$ et $z' = 2 + 3\mathrm{i}$.
   Écrire zz', $\dfrac{z}{z'}$, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ sous forme algébrique.

   Réponse : $zz' = -5 - \mathrm{i}$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{1}{13} + \dfrac{5}{13}\mathrm{i}$, $z^2 = -2\mathrm{i}$, $\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante : $5\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} - 2z = 1$.
   On écrira la solution sous forme algébrique.

   Réponse : $z = \dfrac{1 - 3\mathrm{i}}{-2 + 5\mathrm{i}} = -\dfrac{17}{29} + \dfrac{1}{29}\mathrm{i}$.

Propriété 3.3 (Conjugué et opérations)

1. *Pour tout complexe* $z = x + \mathrm{i}y$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}$, *alors* $z\overline{z} = x^2 + y^2$.
2. *Pour tous complexes* z, z', *on a* $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *et* $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
3. *Pour tout complexe* $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
4. *Pour tous complexes* z, z' *avec* $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
5. *Pour tout complexe* z *et tout entier* n, *on a* $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Exemple 3.4

Soit les complexes $z = -1 + \mathrm{i}$ et $z' = 2 + 3\mathrm{i}$ de l'exercice 3.2.

- On a trouvé $zz' = -5 - \mathrm{i}$, $\frac{z}{z'} = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}\mathrm{i}$, $z^2 = -2\mathrm{i}$, $\frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.
- Avec $\overline{z} = -1 - \mathrm{i}$ et $\overline{z'} = 2 - 3\mathrm{i}$, les calculs directs donnent :
  $\overline{z}\,\overline{z'} = -5 + \mathrm{i}$, $\frac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}\mathrm{i}$, $\overline{z}^2 = 2\mathrm{i}$, $\frac{1}{\overline{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$
  On retrouve bien respectivement $\overline{zz'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$, $\overline{z^2}$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.

Les complexes ont été créés pour résoudre des équations du 2nd degré **sans** racine réelle.

Théorème 3.5 (Résolution des équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$)

*Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients a, b, c **réels** ($a \neq 0$), on calcule le **discriminant** de l'équation :* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ *et l'on tient la discussion suivante :*

- *si $\underline{\Delta > 0}$, alors l'équation a **deux solutions réelles distinctes :***
$$\boxed{z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$
- *si $\underline{\Delta = 0}$, alors l'équation a **une unique solution réelle :*** $\boxed{z_0 = -\frac{b}{2a}}$
- *si $\underline{\Delta < 0}$, alors l'équation n'a pas de solutions réelles mais a **deux solutions complexes conjuguées distinctes :***
$$\boxed{z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

Remarque 3.6 (Théorème de d'Alembert-Gauss (facultatif))

En fait, il se trouve que toute équation de degré **quelconque** $\geqslant 1$ admet **au moins une racine complexe** (voir cours de Maths, chapitre Polynômes).

Exemple 3.7 (Racines carrées complexes d'un réel)

Soit a un **réel non nul.**

- L'équation $z^2 - a^2 = 0$ admet **deux solutions réelles distinctes** données par $z_1 = a$ et $z_2 = -a$.
- L'équation $z^2 + a^2 = 0$ admet **deux solutions complexes conjuguées** données par $z_1 = ia$ et $z_2 = -\mathrm{i}a$.

Exemple 3.8

Pour l'équation $4z^2 + 3z + 1 = 0$, on obtient $\Delta = -7 < 0$ donc les solutions sont complexes conjuguées données par $z_1 = \dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{7}}{8}$ et $z_2 = \dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{7}}{8}$.

Exercice 3.9 (Racines cubiques complexes de 1)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. ***Solutions :*** $\dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ *et* $\dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
2. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout z, $z^3 - 1 = (z-1)(az^2 + bz + c)$.

   Réponse : $a = b = c = 1$.
3. En déduire les solutions de $z^3 - 1 = 0$. ***Solutions :*** 1, $\dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ *et* $\dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Sommaire

La définition des complexes donnée précédemment établit directement une identification entre l'ensemble des **complexes** et l'ensemble des **couples de réels** $\mathbb{R}^2$.

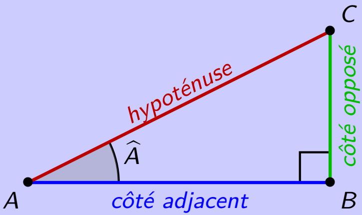
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x + \mathrm{i}y & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

L'ensemble des complexes peut donc se représenter par un plan que l'on appellera le **plan complexe.**

Voici à présent une manière d'écrire un nombre complexe, autre que sa **forme algébrique.** Cette deuxième écriture – la **forme trigonométrique** ou **exponentielle** – possède des propriétés très intéressantes liées aux formules trigonométriques.

Définition 4.1 (Sinus, Cosinus, Tangente)

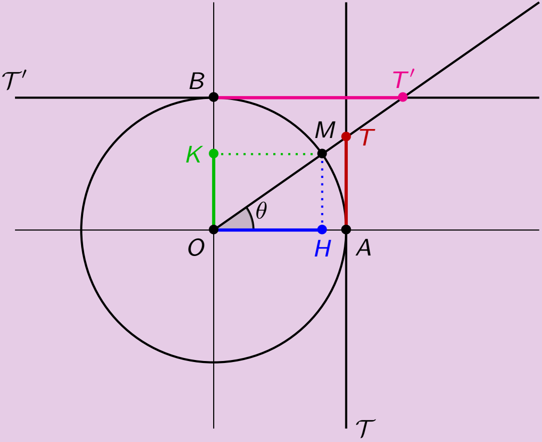
On considère un triangle ABC rectangle en B. On note $\widehat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



- *Le **Sinus** est le rapport du côté **« Opposé »** à l'**« Hypoténuse »**.*
- *Le **Cosinus** est le rapport du côté **« Adjacent »** à l'**« Hypoténuse »**.*
- *La **Tangente** est le rapport du côté **« Opposé »** au côté **« Adjacent »**.*

On note : $\sin \widehat{A} = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad \cos \widehat{A} = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad \tan \widehat{A} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$

Propriété 4.2 (Cercle trigonométrique)



Sur le cercle de centre O et de rayon 1 :

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = 1$$

$$\overline{OH} = \cos\theta \qquad \overline{OK} = \sin\theta$$

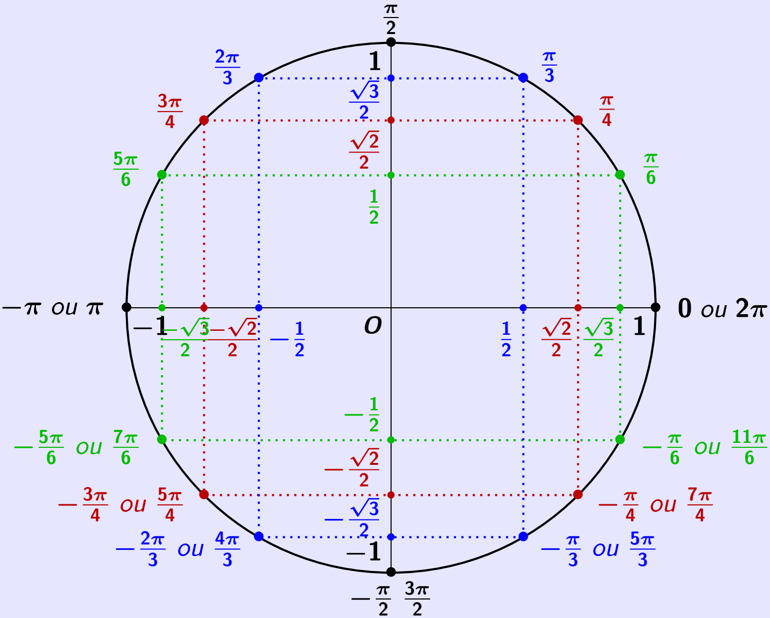
Sur les tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$:

$$\overline{AT} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\overline{BT'} = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

Le point M a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ *et* $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

Valeurs remarquables



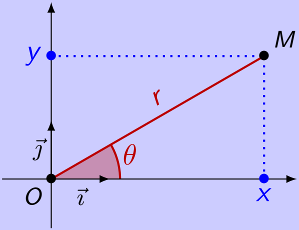
Définition 4.3 (Module/argument)

*Dans le repère **orthonormé direct** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, à tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ on associe le point M du plan de coordonnées (x, y). On dit que :*

- *M est le **point image** de z.*
- *z est l'**affixe** du point M.*

On appelle :

- ***module** de z, la longueur r du segment OM. On le note $|z|$ et l'on a : $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.*
- ***argument** de z pour $z \neq 0$, une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$. On le note $\arg(z)$, il est défini à 2π près et l'on écrit $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.*



*Le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est parfaitement défini par son **module** r et un **argument** θ :*

$$\boxed{x = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r\sin(\theta)}$$

*Ceci est à rapprocher des **coordonnées polaires** (cf. chapitre Courbes et surfaces).*

Exemple 4.4

- $|\,\mathrm{i}\,| = 1$, $|\,1 + \mathrm{i}\,| = \sqrt{2}$, $|\,\pi - \mathrm{i}\sqrt{2}\,| = \sqrt{\pi^2 + 2}$, $|\,1 - 2\mathrm{i}\,| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.
- Un **argument** de i est $\dfrac{\pi}{2}$. Un **argument** de -1 est π. Un **argument** de $\sqrt{2}$ est 0.

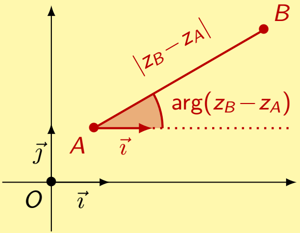
Remarque 4.5

- Si $z \in \mathbb{R}$, alors le **module** coïncide avec la **valeur absolue.**
- * L'**argument** est bien défini pour $z \neq 0$ et il est défini à 2π près.
  * On appelle **argument principal** celui qui est compris dans $]-\pi; \pi]$.
  * L'**argument principal** d'un **réel** x est 0 si $x > 0$, π si $x < 0$.
  * L'**argument principal** d'un **imaginaire pur** iy est $+\dfrac{\pi}{2}$ si $y > 0$, $-\dfrac{\pi}{2}$ si $y < 0$.
- **Géométriquement**, on peut calculer pour deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B :
  * la **distance** entre A et B à l'aide de la formule

    $$\boxed{AB = |z_B - z_A|}$$

  * une mesure de l'**angle** entre les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AB}$ à l'aide de la formule

    $$\boxed{(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)}$$



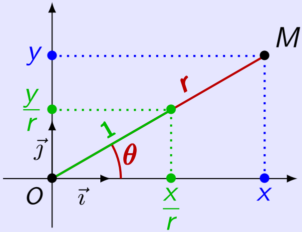
Méthode de calcul d'un argument

Pour déterminer un **argument** d'un complexe $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$:

- on calcule d'abord le **module** $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- le calcul de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ avec les formules suivantes permettront d'en déduire la mesure d'un **argument** :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r}}$$

  * soit en reconnaissant un sinus et cosinus remarquables,
  * soit en approximant à l'aide de la calculatrice si on ne reconnaît pas de valeurs remarquables.



Exemple 4.6

Soit $z = -2 - 2i\sqrt{3}$.

- le **module** est donné par $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$;
- un **argument** θ de z est alors déterminé $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

  On reconnaît le cosinus et le sinus de $-\dfrac{2\pi}{3}$, d'où $arg(z) \equiv -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Méthode plus rapide

On « force » la factorisation par le **module** pour faire apparaître des cos et sin :

$$z = -2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

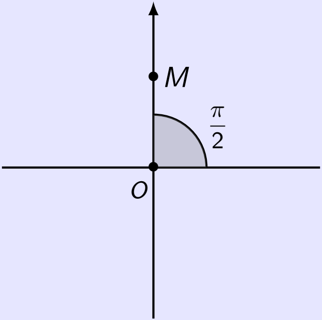
donc un **argument** de z est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Complément (facultatif)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et θ un **argument** de z. Pour $x \neq 0$, $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x}$.

Si l'on impose à θ d'appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (détermination **principale**), alors θ peut s'exprimer en fonction de x et y à l'aide de $\tan^{-1} = \arctan$ selon :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ et } y > 0, \quad \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

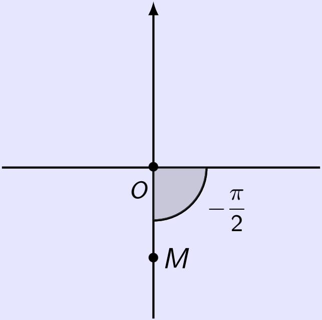


Complément (facultatif)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et θ un **argument** de z. Pour $x \neq 0$, $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x}$.

Si l'on impose à θ d'appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (détermination **principale**), alors θ peut s'exprimer en fonction de x et y à l'aide de $\tan^{-1} = \arctan$ selon :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ et } y > 0, \quad \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x = 0 \text{ et } y < 0, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

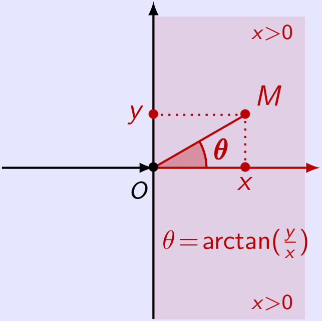


Complément (facultatif)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et θ un **argument** de z. Pour $x \neq 0$, $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x}$.

Si l'on impose à θ d'appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (détermination **principale**), alors θ peut s'exprimer en fonction de x et y à l'aide de $\tan^{-1} = \arctan$ selon :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ et } y > 0, & \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x = 0 \text{ et } y < 0, & \theta = -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x > 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

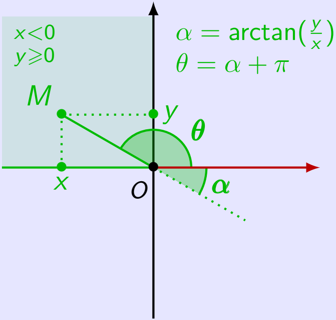


Complément (facultatif)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et θ un **argument** de z. Pour $x \neq 0$, $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x}$.

Si l'on impose à θ d'appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (détermination **principale**), alors θ peut s'exprimer en fonction de x et y à l'aide de $\tan^{-1} = \arctan$ selon :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ et } y > 0, & \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x = 0 \text{ et } y < 0, & \theta = -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x > 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \end{cases}$$

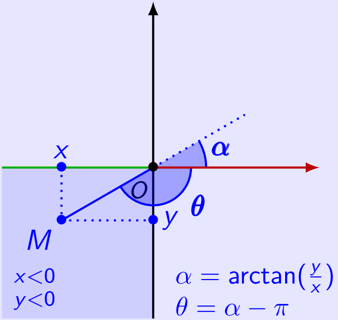


Complément (facultatif)

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ et θ un **argument** de z. Pour $x \neq 0$, $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x}$.

Si l'on impose à θ d'appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (détermination **principale**), alors θ peut s'exprimer en fonction de x et y à l'aide de $\tan^{-1} = \arctan$ selon :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ et } y > 0, & \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x = 0 \text{ et } y < 0, & \theta = -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x > 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y < 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi \end{cases}$$

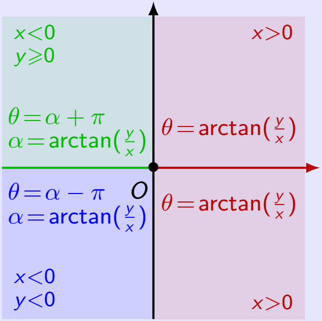


Complément (facultatif)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et θ un **argument** de z. Pour $x \neq 0$, $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x}$.

Si l'on impose à θ d'appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ (détermination **principale**), alors θ peut s'exprimer en fonction de x et y à l'aide de $\tan^{-1} = \arctan$ selon :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ et } y > 0, & \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x = 0 \text{ et } y < 0, & \theta = -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{Si } x > 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \\ \text{Si } x < 0 \text{ et } y < 0, & \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi \end{cases}$$



Remarque 4.7

arctan étant à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (voir cours de Maths sur les **fonctions circulaires réciproques**), si $x < 0$, arctan ne donne pas directement un **argument**.
Il vaut mieux **savoir retrouver** ce genre de formules plutôt que de les apprendre par cœur !

Rappels sur l'exponentielle réelle

- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^x e^y = e^{x+y}$ et $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^x)^n = e^{nx}$

Définition 4.8 (Exponentielle complexe)

*On définit l'**exponentielle d'un nombre imaginaire pur** par la formule suivante :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

et l'on a alors plus généralement :

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \forall \theta \in \mathbb{R},\ re^{i\theta} = r\cos(\theta) + i\, r \sin(\theta)$$

*C'est la relation entre **formes exponentielle** et **trigonométrique** (cf. définition 4.14).*

Exemple 4.9

- $e^{0i} = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}, \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Propriété 4.10 (Exponentielle complexe et conjugué/module/argument)

*Le **conjugué** de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$, le **module** est 1 et un **argument** est θ :*

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \left|e^{i\theta}\right| = 1 \qquad \arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$$

Inversement, on peut exprimer les cos et sin à l'aide l'**exponentielle complexe.** Ce sont les formules d'**Euler**.

Propriété 4.11 (Formules d'Euler)

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

En effet :
$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big) + \big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big)}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)\end{aligned}$$

De même :
$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i} \\ &= \frac{2i\sin(\theta)}{2i} = \sin(\theta)\end{aligned}$$

Ou encore, en introduisant le **conjugué :** $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et en utilisant les relations exprimant **parties réelles** et **imaginaires** à l'aide du **conjugué :**

$$\cos(\theta) = \mathfrak{Re}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$\sin(\theta) = \mathfrak{Im}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

Grâce aux formules d'addition trigonométriques, les formules exponentielles réelles pour le produit et le quotient s'étendent au cas complexe.

Propriété 4.12 (Exponentielle complexe et multiplication/division)

Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$$

En effet :
$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ &= \cos\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) + i\sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= e^{i\theta} \times e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Puis, en choisissant $\varphi = -\theta$: $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{0i} = 1$, donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont inverses.

En choisissant $\varphi = \theta$: $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta}$, que l'on peut généraliser à toute puissance entière.

Corollaire 4.13 (Formule de de Moivre)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad \textit{ou encore} \quad \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Définition 4.14 (Forme trigonométrique)

*Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $r \in \mathbb{R}^+$ le **module** de z, $r = |z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un **argument** de z.*
D'après la définition 4.3, on a $z = r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)$.
*Cette représentation de z est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.*
*Elle est directement reliée à la **forme exponentielle** de la définition 4.8 :*

$$\boxed{z = |z|\,\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

Des formules de la propriété 4.12, on déduit les relations

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = (r \times r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} \quad \text{et} \quad \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$$

En récupérant **modules** et **arguments**, on obtient les formules ci-dessous.

Propriété 4.15 (Module, argument et opérations)

*Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ d'**arguments** respectifs θ, θ'.*

- $|zz'| = |z|.|z'|$
- *$\theta + \theta'$ est un **argument** de zz'* *($\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$)*

Pour $z' \neq 0$:

- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- *$\theta - \theta'$ est un **argument** de $\dfrac{z}{z'}$* *($\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$)*

Exemple 4.16

- Pour trouver rapidement la forme exponentielle de $-3\mathrm{i}$, on peut mener les calculs ainsi :
$$-3\mathrm{i} = 3 \times (-1) \times \mathrm{i} = 3 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$$
Ou alors on place le point d'affixe $-3\mathrm{i}$ dans le plan complexe (de coordonnées $(0, -3)$), et on « lit » le **module** 3 (distance à l'origine) et un **argument** $-\frac{\pi}{2}$ (puisque imaginaire pur négatif).
- D'après l'exemple 4.6, une **forme trigonométrique** de $-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ est $4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ et une **forme exponentielle** en est $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 4.17

1. Écrire sous forme algébrique : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$; $2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi}$; $\frac{6}{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi}}$; $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$.
2. Placer rapidement et sans calculs dans le plan complexe, les points d'affixes suivantes : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{5}}$.
3. Placer rapidement et sans calculs dans le plan complexe, les points d'affixes suivantes, puis en donner une forme exponentielle par lecture graphique : $-6\mathrm{i}$, -5, $1-\mathrm{i}$.

Exercice 4.18

1. Déterminer le **module** de $-3\mathrm{i}$, $(3+5\mathrm{i})(11-7\mathrm{i})$, $\dfrac{5}{(1-\mathrm{i})^2}$.

   Réponse :
   - $|-3\mathrm{i}| = |-3|.|\mathrm{i}| = 3$
   - $\left|(3+5\mathrm{i})(11-7\mathrm{i})\right| = |3+5\mathrm{i}|.|11-7\mathrm{i}| = 34\sqrt{5}$
   - $\left|\dfrac{5}{(1-\mathrm{i})^2}\right| = \dfrac{|5|}{|1-\mathrm{i}|^2} = \dfrac{5}{2}$

2. Donner sans calcul un **argument** de $a + a\mathrm{i}$ où $a \in \mathbb{R}^*$.

   Réponse : $\arg(a+a\mathrm{i}) \equiv \arg(a) + \arg(1+\mathrm{i}) \equiv \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ si } a > 0 \\ -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi] \text{ si } a < 0 \end{cases}$

3. Déterminer un **argument** de $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{(1+\mathrm{i})^2}$.

   Réponse : $\arg\left(\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{(1+\mathrm{i})^2}\right) \equiv \arg(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) - 2\arg(1+\mathrm{i}) \equiv -\dfrac{\pi}{3} - 2\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

Application géométrique : angle entre deux vecteurs

L'**angle** entre deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ définis à l'aide de quatre points A, B, C, D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D peut se mesurer grâce à la formule

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD})} = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Exemple 4.19

Considérons, dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les points $A(1,1)$, $B(1+\sqrt{3},2)$, $C(2,2)$, $D(4,4)$.
Déterminons une mesure de l'**angle** entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives $1+\mathrm{i}, (1+\sqrt{3})+2\mathrm{i}, 2+2\mathrm{i}, 5+5\mathrm{i}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont alors pour affixes respectives
$\left[(1+\sqrt{3})+2\mathrm{i}\right]-(1+\mathrm{i}) = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $(5+5\mathrm{i})-(2+2\mathrm{i}) = 3+3\mathrm{i}$.

On en déduit la mesure de l'**angle** $\widehat{(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD})}$:

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD})} = \arg\left(\frac{3+3\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right) \equiv \arg(3+3\mathrm{i}) - \arg(\sqrt{3}+\mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$$

Propriété 5.1 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$(z+z')^n = \binom{n}{0}(z)^n + \binom{n}{1}(z)^{n-1}(z') + \cdots + \binom{n}{n-1}(z)(z')^{n-1} + \binom{n}{n}(z')^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(z)^k(z')^{n-k}$$

avec $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k}.$

Exemple 5.2 (Premières identités remarquables)

- $(z+z')^2 = (z)^2 + 2(z)(z') + (z')^2$
- $(z+z')^3 = (z)^3 + 3(z)^2(z') + 3(z)(z')^2 + (z')^3$
- $(z+z')^4 = (z)^4 + 4(z)^3(z') + 6(z)^2(z')^2 + 4(z)(z')^3 + (z')^4$
- $(z+z')^5 = (z)^5 + 5(z)^4(z') + 10(z)^3(z')^2 + 10(z)^2(z')^3 + 5(z)(z')^4 + (z')^5$

Triangle de Pascal

Les coefficients $\binom{n}{k}$ (lu « k parmi n ») sont appelés **coefficients binomiaux.**

On peut facilement retrouver leur valeur en construisant le **triangle de Pascal** (cf. ci-dessous).

Le nombre situé à l'intersection de la ligne n et de la colonne k représente le **coefficient binomial** de rang k dans le développement de $(z+z')^n$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Linéarisation

Dans cette partie, l'objectif est de transformer une **puissance** de cosinus ou de sinus en une **somme sans puissances.**

Plus précisément, pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut transformer $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ comme **combinaison linéaire** de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Méthode :

- **Formules d'Euler :** on écrit $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \end{cases}$

- **Formule du binôme :** on développe
$$\left(e^{i\theta} \pm e^{-i\theta}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k \left(\pm e^{-i\theta}\right)^{n-k}$$

- **Formule de De Moivre :** on écrit
$$\left(e^{i\theta}\right)^k \left(e^{-i\theta}\right)^{n-k} = e^{i(2k-n)\theta}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

- **Formules d'Euler :** on rassemble les $e^{ik\theta}$, $k \in \{-n, -n+2, \ldots, n\}$ deux à deux conjuguées : $\begin{cases} e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} = 2\cos(k\theta) \\ e^{ik\theta} - e^{-ik\theta} = 2i\sin(k\theta) \end{cases}$

Exemple 5.3 (Puissance 3)

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left[\frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right]^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3 + 3\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right) + 3\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)^2 + \left(e^{-i\theta}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[2\cos(3\theta) + 3 \times 2\cos(\theta)\right] \\
&= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]^3 \\
&= \frac{1}{-8i}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3 + 3\left(e^{i\theta}\right)^2\left(-e^{-i\theta}\right) + 3\left(e^{i\theta}\right)\left(-e^{-i\theta}\right)^2 + \left(-e^{-i\theta}\right)^3\right] \\
&= -\frac{1}{8i}\left[e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right] \\
&= -\frac{1}{8i}\left[2i\sin(3\theta) - 3 \times 2i\sin(\theta)\right] \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Exemple 5.4 (Puissance 4)

$$\begin{aligned}
\cos^4(\theta) &= \left[\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right]^4 \\
&= \frac{1}{16}\left[\left(e^{i\theta}\right)^4+4\left(e^{i\theta}\right)^3\left(e^{-i\theta}\right)+6\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^2+4\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)^3+\left(e^{-i\theta}\right)^4\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[2\cos(4\theta)+4\times 2\cos(2\theta)+6\right] \\
&= \frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \cos^4(\theta)d\theta &= \int\left(\frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int\cos(4\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int\cos(2\theta)d\theta+\frac{3}{8}\int d\theta \\
&= \frac{1}{32}\sin(4\theta)+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{3}{8}\theta+\mathit{Constante}
\end{aligned}$$

Exemple 5.4 (Puissance 4)

$$
\begin{aligned}
\sin^4(\theta) &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]^4 \\
&= \frac{1}{16}\left[\left(e^{i\theta}\right)^4 - 4\left(e^{i\theta}\right)^3\left(e^{-i\theta}\right) + 6\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^2 - 4\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)^3 + \left(e^{-i\theta}\right)^4\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[2\cos(4\theta) - 4 \times 2\cos(2\theta) + 6\right] \\
&= \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Application : calcul de primitive

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4(\theta)d\theta &= \int \left(\frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int \cos(4\theta)d\theta - \frac{1}{2}\int \cos(2\theta)d\theta + \frac{3}{8}\int d\theta \\
&= \frac{1}{32}\sin(4\theta) - \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{3}{8}\theta + \textit{Constante}
\end{aligned}
$$

Exemple 5.5 (Puissance 5)

$$\begin{aligned}
\cos^5(\theta) &= \left[\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right]^5 \\
&= \frac{1}{32}\Big[\left(e^{i\theta}\right)^5 + 5\left(e^{i\theta}\right)^4\left(e^{-i\theta}\right) + 10\left(e^{i\theta}\right)^3\left(e^{-i\theta}\right)^2 \\
&\quad + 10\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^3 + 5\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)^4 + \left(e^{-i\theta}\right)^5\Big] \\
&= \frac{1}{32}\left[e^{5i\theta} + 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} + 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} + e^{-5i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{32}\left[2\cos(5\theta) + 5\times 2\cos(3\theta) + 10\times 2\cos(\theta)\right] \\
&= \frac{1}{16}\cos(5\theta) + \frac{5}{16}\cos(3\theta) + \frac{5}{8}\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \cos^5(\theta)\mathrm{d}\theta &= \int \left(\frac{1}{16}\cos(5\theta) + \frac{5}{16}\cos(3\theta) + \frac{5}{8}\cos(\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{16}\int \cos(5\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{5}{16}\int \cos(3\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{5}{8}\int \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{80}\sin(5\theta) + \frac{5}{48}\sin(3\theta) + \frac{5}{8}\sin(\theta) + \mathit{Constante}
\end{aligned}$$

Exemple 5.5 (Puissance 5)

$$\begin{aligned}
\sin^5(\theta) &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right]^5 \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\Big[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^5 - 5\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^4\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) + 10\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2 \\
&\qquad - 10\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3 + 5\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^4 - \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^5\Big] \\
&= -\frac{i}{32}\left[\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta} - 5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + 10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\theta}\right] \\
&= -\frac{i}{32}\left[2\mathrm{i}\sin(5\theta) - 5 \times 2\mathrm{i}\sin(3\theta) + 10 \times 2\mathrm{i}\sin(\theta)\right] \\
&= \frac{1}{16}\sin(5\theta) - \frac{5}{16}\sin(3\theta) + \frac{5}{8}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Application : calcul de primitive

$$\begin{aligned}
\int \sin^5(\theta)\mathrm{d}\theta &= \int \left(\frac{1}{16}\sin(5\theta) - \frac{5}{16}\sin(3\theta) + \frac{5}{8}\sin(\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{16}\int \sin(5\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{5}{16}\int \sin(3\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{5}{8}\int \sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{80}\cos(5\theta) + \frac{5}{48}\cos(3\theta) - \frac{5}{8}\cos(\theta) + \mathit{Constante}
\end{aligned}$$

Anti-linéarisation

Dans cette partie, l'objectif est d'exprimer le cosinus ou le sinus d'un angle **multiple** à l'aide du cosinus et/ou du sinus de l'angle **originel.**

Plus précisément, pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut transformer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en un polynôme de $\cos(\theta)$ et/ou $\sin(\theta)$ de degré n.

Méthode :

- **Exponentielle complexe :** on écrit $\begin{cases} \cos(n\theta) = \mathfrak{Re}(e^{in\theta}) \\ \sin(n\theta) = \mathfrak{Im}(e^{in\theta}) \end{cases}$
- **Formule de De Moivre :** on écrit
$$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = \left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]^n$$
- **Formule du binôme :** on développe
$$\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\cos(\theta)\right]^{n-k} \left[i\sin(\theta)\right]^k$$
- **Parties réelles/imaginaires :** on obtient un polynôme de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Avec $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, les puissances paires (resp. impaires) de $\sin(\theta)$ peuvent s'exprimer comme polynômes de $\cos(\theta)$ (resp. $\sin(\theta)\times$polynômes de $\cos(\theta)$).

Exemple 5.6 (Angle triple)

Partant de

$$\begin{aligned}
e^{i(3\theta)} &= (e^{i\theta})^3 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 \\
&= \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta)\left[i\sin(\theta)\right] + 3\cos(\theta)\left[i\sin(\theta)\right]^2 + \left[i\sin(\theta)\right]^3 \\
&= \left[\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\right] + i\left[3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)\right] \\
&= \left[\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)\right] \\
&\quad + i\left[3\sin(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right) - \sin^3(\theta)\right] \\
&= \left[4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right] + i\left[3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)\right]
\end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathfrak{Re}\left(e^{i(3\theta)}\right) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \\
\sin(3\theta) &= \mathfrak{Im}\left(e^{i(3\theta)}\right) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\cos(3\theta) = P\left(\cos(\theta)\right) \quad \textit{et} \quad \sin(3\theta) = -P\left(\sin(\theta)\right)$$

avec $P(X)=4X^3-3X$.

Exemple 5.7 (Angle quadruple)

Partant de

$$\begin{aligned}
e^{i(4\theta)} &= (e^{i\theta})^4 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 \\
&= \cos^4(\theta) + 4\cos^3(\theta)\big[i\sin(\theta)\big] + 6\cos^2(\theta)\big[i\sin(\theta)\big]^2 \\
&\quad + 4\cos(\theta)\big[i\sin(\theta)\big]^3 + \big[i\sin(\theta)\big]^4 \\
&= \Big[\cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)\Big] \\
&\quad + i\Big[4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)\Big] \\
&= \Big[\cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\big(1-\cos^2(\theta)\big) + \big(1-\cos^2(\theta)\big)^2\Big] \\
&\quad + 4i\sin(\theta)\Big[\cos^3(\theta) - \cos(\theta)\big(1-\cos^2(\theta)\big)\Big] \\
&= \Big[8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1\Big] + i\,4\sin(\theta)\Big[2\cos^3(\theta) - \cos(\theta)\Big]
\end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \mathfrak{Re}\big(e^{i(4\theta)}\big) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1 \\
\sin(4\theta) &= \mathfrak{Im}\big(e^{i(4\theta)}\big) = 4\sin(\theta)\Big[2\cos^3(\theta) - \cos(\theta)\Big]
\end{aligned}$$

Exemple 5.8 (Angle quintuple)

Partant de

$$
\begin{aligned}
e^{i(5\theta)} &= (e^{i\theta})^5 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 \\
&= \cos^5(\theta) + 5\cos^4(\theta)\big[i\sin(\theta)\big] + 10\cos^3(\theta)\big[i\sin(\theta)\big]^2 \\
&\quad + 10\cos^2(\theta)\big[i\sin(\theta)\big]^3 + 5\cos(\theta)\big[i\sin(\theta)\big]^4 + \big[i\sin(\theta)\big]^5 \\
&= \Big[\cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta)\Big] \\
&\quad + i\Big[5\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta)\Big] \\
&= \Big[\cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\big(1 - \cos^2(\theta)\big) + 5\cos(\theta)\big(1 - \cos^2(\theta)\big)^2\Big] \\
&\quad + i\sin(\theta)\Big[5\big(1 - \sin^2(\theta)\big)^2 - 10\sin^2(\theta)\big(1 - \sin^2(\theta)\big) + \sin^4(\theta)\Big] \\
&= \Big[16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)\Big] \\
&\quad + i\Big[16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)\Big]
\end{aligned}
$$

on déduit

$$
\begin{aligned}
\cos(5\theta) &= \Re e\big(e^{i(5\theta)}\big) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta) \\
\sin(5\theta) &= \Im m\big(e^{i(5\theta)}\big) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

Trigonométrie

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_trigonometrie.pdf

Binôme de Newton

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_binome.pdf

Notions à retenir

- Maîtriser le calcul sur les complexes
  - ⋆ Opérations usuelles
  - ⋆ Module/argument
  - ⋆ Forme exponentielle
  - ⋆ Lien avec la géométrie plane
- Maîtriser la linéarisation et l'antilinéarisation

Annexes

- Rotation plane
- Somme de deux exponentielles
- Racines n^{e} de 1
- Transformation de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$
- Équations à coefficients complexes

Application géométrique : rotation plane

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère **orthonormé direct** $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On fixe un angle θ.

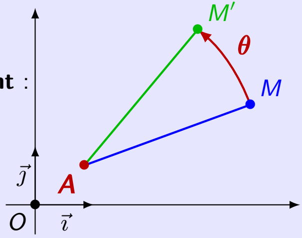
Pour tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe z, soit M' le point de $\mathcal{P}$ d'affixe $z' = e^{i\theta} z$.

D'après les propriétés 4.10 et 4.15, on a **algébriquement** :

- $|z'| = \left|e^{i\theta}\right|.|z| = |z|$
- $\arg(z') \equiv \arg\left(e^{i\theta}\right) + \arg(z) \equiv \arg(z) + \theta\ [2\pi]$

soit, **géométriquement** :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right) = \theta$$



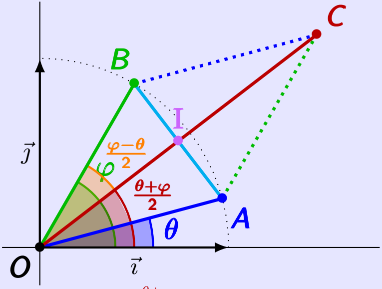
En d'autres termes, le point M' est l'image du point M par la **rotation** du plan $\mathcal{P}$ de **centre** O et d'**angle** θ : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$

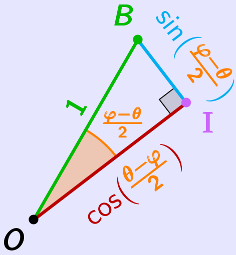
Cette correspondance **géométrique** se traduit par la correspondance **algébrique** (**multiplication** par $e^{i\theta}$) : $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta} z \end{array}}$

Plus généralement, la **rotation** de $\mathcal{P}$ de **centre** un point A d'affixe z_A et d'**angle** θ s'exprime par la correspondance **algébrique** : $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z - z_A) + z_A \end{array}}$

Application géométrique : somme de deux exponentielles et losange

Soit A et B les points d'affixes respectives $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, et C le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.
On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$
On dispose d'un **parallélogramme** $OACB$ tel que $OA=OB=1$, c'est un **losange.**





En factorisant par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\varphi}{2}}$, on trouve

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta-\varphi}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta-\varphi}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\varphi}{2}}$$

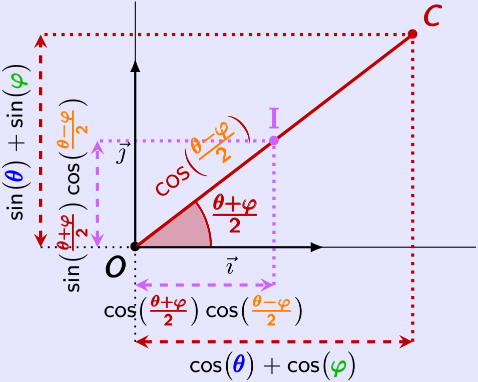
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta-\varphi}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta-\varphi}{2}}\right)=2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\varphi}{2}}$$

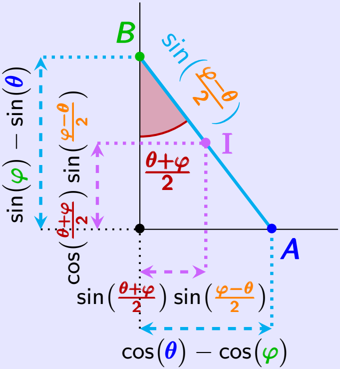
Les somme et différence $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BA}$ correspondant aux **diagonales** OC et AB du losange.
Le facteur i dans la 2$^{\mathrm{e}}$ factorisation indique que les diagonales sont **orthogonales**.

Application trigonométrique : somme/différence de deux cosinus/sinus

Partons à présent de : $e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$ et $e^{i\theta}-e^{i\varphi}=2i\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\varphi}{2}}$.

Des schémas précédents, on extrait les suivants :





En prenant **parties réelles et imaginaires**, on récupère les formules **trigonométriques** :

$\cos(\theta)+\cos(\varphi)=2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$	$\cos(\theta)-\cos(\varphi)=-2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$
$\sin(\theta)+\sin(\varphi)=2\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$	$\sin(\theta)-\sin(\varphi)=2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$

Application algébrique : racines n^e de 1

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Considérons la suite d'**exponentielles complexes** $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N},\ z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.

- Explicitement, les n premiers termes s'écrivent :

$$z_0 = 1,\ z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}},\ z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{n}},\ z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{n}},\ \dots,\ z_{n-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

- On remarque que $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}.2\pi} = 1$. Plus généralement :

$$z_{k+n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2(k+n)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{2n\pi}{n}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}.2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = z_k$$

  Ainsi la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est **périodique**.
  Ses seules valeurs distinctes sont les n nombres $z_0 (= z_n), z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$.

- D'après la formule de de Moivre :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (z_k)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n.\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}.2k\pi} = 1$$

  Ainsi, les n nombres distincts $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ sont des **racines n^e** de 1.

  Par définition, les **racines n^e** d'un complexe Z sont les complexes z vérifiant $z^n = Z$, c'est-à-dire les racines du polynôme $X^n - Z$. Ce polynôme étant de degré n, il possède **au plus** n racines (voir cours de Maths, chapitre Polynômes).

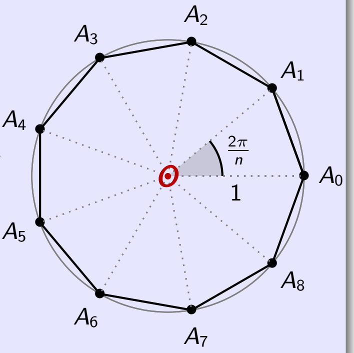
  Ainsi, les n nombres distincts $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ sont **toutes les racines n^e** de 1.

Application mécanique : barycentre d'un polygone régulier

- D'après la formule de de Moivre, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^k$.
  La suite $\left(z_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi une **suite géométrique** de raison $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.
  On sait alors calculer explicitement la somme de ses n premiers termes.
  Pour une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1-r^n}{1-r}$.
  Ici, cela donne (rappelons que $(z_1)^n = 1$ et $z_1 \neq 0$) :
  $$z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = 1 + z_1 + (z_1)^2 + \cdots + (z_1)^{n-1} = \frac{1-(z_1)^n}{1-z_1} = 0$$
  soit : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = 0}$

  Notons $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n (= A_0)$ les n points d'affixes respectives $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n (= z_0)$.
  L'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$ se retranscrit **vectoriellement**
  selon $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}}$

  Les points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ affectés de poids identiques constituent un **polygone régulier** de **centre de gravité** O (**isobarycentre**).



Propriété A.1 (Amplitude/déphasage (facultatif))

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, *il existe* $r \in \mathbb{R}^+$ *et* $\varphi \in [0, 2\pi[$ *tels que*

$$\boxed{\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = r\cos(\theta - \varphi)}$$

De plus $r = \sqrt{a^2+b^2}$ *et, si* a *et* b *ne sont pas simultanément nuls,* φ *vérifie* $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{r}$ *et* $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{r}$. *En particulier :* $\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}$.

En effet, écrivons :

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \mathfrak{Re}\left[(a - \mathrm{i}b)\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)\right]$$

On introduit le **module** r et un **argument** φ de $a + \mathrm{i}b$:

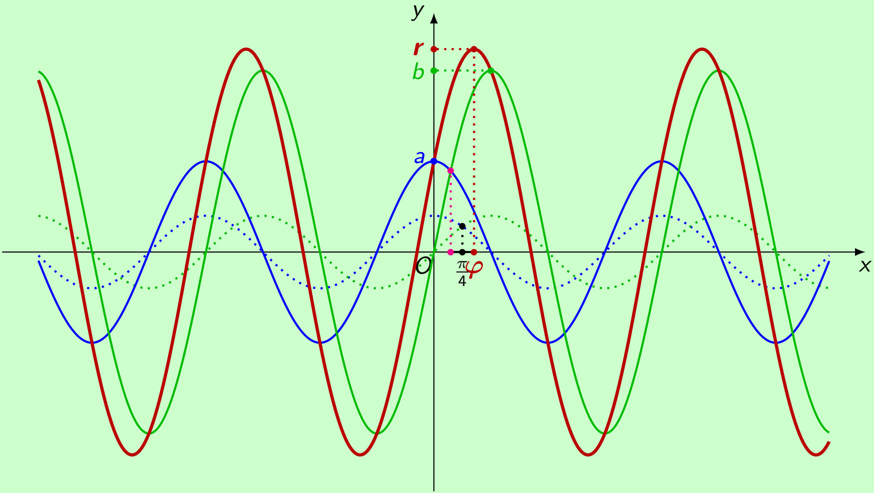
$$a + \mathrm{i}b = r\big(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\big) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

Au passage : $r = \sqrt{a^2+b^2}$ et si $r \neq 0$: $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{r}$, $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{r}$.

On a alors :

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \mathfrak{Re}\big(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) = \mathfrak{Re}\big(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}\big) = r\cos(\theta - \varphi)$$

Exemple A.2 (Superposition de deux ondes sinusoïdales (facultatif))



Définition A.3 (Exponentielle complexe générale)

*Soit x, y deux réels. On définit l'**exponentielle** du nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ selon*

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Propriété A.4 (Propriétés)

Pour tous nombres complexes z et z' et tout nombre entier n, on a :

- $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{z'}$ *et* $\mathrm{e}^{z-z'} = \dfrac{\mathrm{e}^{z}}{\mathrm{e}^{z'}}$
- $(\mathrm{e}^{z})^{n} = \mathrm{e}^{nz}$ *et* $\mathrm{e}^{-z} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{z}}$

Exemple A.5 (Onde sinusoïdale amortie)

Une **onde sinusoïdale amortie** peut être modélisée par une fonction de la forme $t \longmapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)$, $\alpha > 0$ désignant un coefficient d'amortissement et $\omega > 0$ la pulsation de l'onde.

Il peut être judicieux de l'interpréter comme la partie réelle ou imaginaire de la fonction complexe $t \longmapsto \mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{i}\omega)t}$.

Sommaire

Cette partie sera revue en cours de Mathématiques dans le chapitre Polynômes.

Théorème B.1 (Théorème de d'Alembert-Gauss)

*Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet **au moins une racine complexe.***

Corollaire B.2

- *Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \in \mathbb{N}$ admet **exactement** n racines comptées avec leur **multiplicité.***
- *Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \in \mathbb{N}$ se factorise en un produit d'**exactement** n polynômes de degré 1 et d'une constante.*

Exemple B.3

- $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})$

  Le polynôme $z^4 - 1$ de degré 4 admet donc 4 **racines simples** dans $\mathbb{C}$: $1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$.
- $(z^2 + 1)^2 = \big((z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})\big)^2 = (z - \mathrm{i})^2(z + \mathrm{i})^2$

  Le polynôme $(z^2 + 1)^2$ de degré 4 admet donc 2 **racines doubles** dans $\mathbb{C}$: i et $-\mathrm{i}$.
  La multiplicité 2 signifie que l'on compte i et $-\mathrm{i}$ deux fois pour trouver 4 **racines comptées avec leur multiplicité.**

Définition B.4

Soit $Z \in \mathbb{C}$. On appelle ***racine carrée*** *de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.*

Remarque B.5

- ***Attention :*** la notation $\sqrt{z}$ est **strictement réservée** aux nombres z **réels positifs !** Par exemple, les notations $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{i}$ **n'**ont **pas** de sens.
- Supposons $Z \neq 0$. Si z_1 est une **racine carrée** de Z, alors $z_2 = -z_1$ en est une autre. En factorisant alors $z^2 - Z = z^2 - z_1^2$ selon $(z - z_1)(z + z_1) = (z - z_1)(z - z_2)$, on voit qu'il n'y en a pas d'autre.

Exemple B.6

- Les **racines carrées** de -1 sont i et $-\mathrm{i}$. Celles de -2 sont $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$. Plus généralement, les **racines carrées** d'un **réel négatif** a sont $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$.
- En rappelant que $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$, on voit que, pour tous $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les **racines carrées** de $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sont $\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$. Ainsi :

  Tout nombre complexe non nul admet
  deux racines carrées complexes opposées.

  Par exemple, les **racines carrées** de $-3\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ sont $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ et $-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

Recherche des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe (non nul) avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On cherche les complexes $\delta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\delta^2 = z$.

1. En écrivant $\delta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\mathrm{i}\alpha\beta$, dont on identifie les parties réelles et imaginaires avec celles de $z = a + \mathrm{i}b$,
2. en rajoutant l'équation surnuméraire du **module** $|\delta|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, que l'on identifie avec $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (grâce à $\left|\delta\right|^2 = |\delta|^2$),

on obtient un système de trois équations :

$$\begin{cases} \text{égalité des parties réelles} \\ \text{égalité des parties imaginaires} \\ \text{égalité des modules} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

- À l'aide des première et troisième équations, on extrait facilement α^2 et β^2, ce qui donne deux possibilités (opposées) pour α et deux possibilités (opposées) pour β, soit 4 possibilités pour δ.
- La deuxième équation permet de déterminer si α et β sont de même signe ou de signes opposés. Il reste alors deux possibilités (opposées) pour δ.

En conclusion :

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées.

Exemple B.7

Cherchons les **racines carrées** de $3 - 4\mathrm{i}$.

Soit $\delta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ une telle **racine carrée.** Alors :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta \quad\quad = -4 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases}$$

- Des première et troisième équations, on en déduit que $\alpha^2 = 4, \beta^2 = 1$. Donc $\alpha = \pm 2$ et $\beta = \pm 1$, ce qui donne 4 possibilités pour (α, β) : $(2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)$.
- La deuxième équation nous indique que α et β sont de signes opposés, ce qui limite à deux possibilités pour (α, β) : $(2, -1)$ et $(-2, 1)$.

Par conséquent, les **racines carrées** de $3 - 4\mathrm{i}$ sont $2 - \mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i}$.

Grâce aux **racines carrées** des complexes, on peut résoudre les équations du second degré à **coefficients complexes**.

Théorème B.8 (Équations du 2nd degré à coefficients complexes)

*Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients a, b, c **complexes** ($a \neq 0$), on calcule le **discriminant** de l'équation :* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ *puis on détermine une **racine carrée** δ de Δ. On tient alors la discussion suivante :*

- *si $\underline{\Delta \neq 0}$, alors l'équation a **deux solutions complexes distinctes***

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}}$$

- *si $\underline{\Delta = 0}$, alors l'équation a **une unique solution complexe*** $\boxed{z_0 = -\frac{b}{2a}}$

Exemple B.9

Soit l'équation $z^2 + (2-3\mathrm{i})z - 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

Le **discriminant** vaut $\Delta = (2-3i)^2 - 4(-2-2\mathrm{i}) = 4 - 9 - 12\mathrm{i} + 8 + 8\mathrm{i} = 3 - 4\mathrm{i}$.

Une **racine carrée** de Δ est $2 - \mathrm{i}$, donc les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-(2-3\mathrm{i})-(2-\mathrm{i})}{2} = -2+2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(2-3\mathrm{i})+(2-\mathrm{i})}{2} = i$$

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

1. On définit le nombre complexe $j = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = e^{i\,2\pi/3}$.

   a. Calculer j^3, puis plus généralement j^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b. Comparer j^2 et $\bar{j}$. En déduire $1 + j + j^2$ et $1 + j^2 + j^4$.

   c. Représenter les trois points d'affixes 1, j et $\bar{j}$ dans le plan complexe et interpréter algébriquement et géométriquement les résultats précédemment obtenus.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'**inconnues** u, v, w et de **paramètres** complexes a, b, c suivant :

$$(S) : \quad \begin{cases} u + v + w = a \\ u + j\,v + j^2\,w = b \\ u + j^2\,v + j\,w = c \end{cases}$$

   On pourra effectuer des combinaisons ad hoc des équations du système.

   b. Comment faut-il choisir les paramètres a, b, c pour que u, v, w soient des nombres **réels** ?

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

1. a) On a $\jmath^3 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}\right)^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi} = 1$, puis pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \jmath^{3p} &= (\jmath^3)^p = 1 \\ \jmath^{3p+1} &= \jmath^{3p} \times \jmath = \jmath \\ \jmath^{3p+2} &= \jmath^{3p} \times \jmath^2 = \jmath^2 \end{aligned}$$

En résumé :

$$\jmath^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3} \\ \jmath & \text{si } n \text{ est un multiple de 3 plus 1} \\ \jmath^2 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3 plus 2} \end{cases}$$

b) On a $\jmath^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,4\pi/3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi/3} = \bar{\jmath}$. On en tire, avec $\mathfrak{Re}(\jmath) = -\frac{1}{2}$:

$$1 + \jmath + \jmath^2 = 1 + \jmath + \bar{\jmath} = 1 + 2\,\mathfrak{Re}(\jmath) = 0$$

ou encore, avec $\jmath^3 = 1$:

$$1 + \jmath + \jmath^2 = \frac{\jmath^3 - 1}{\jmath - 1} = 0$$

puis

$$1 + \jmath^2 + \jmath^4 = 1 + \jmath + \jmath^2 = 0.$$

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

1 c ***Interprétation algébrique :***

En particulier pour $p = 2$: $(\jmath^3)^2 = (\jmath^2)^3 = 1$
donc $\jmath^2$ est une autre **racine cubique** de 1.

De plus 1 est naturellement une **racine cubique** de 1.

On a donc trouvé **trois racines distinctes** du polynôme du 3ᵉ degré $z^3 - 1$.
On a ainsi obtenu **toutes** les racines de ce polynôme **dans $\mathbb{C}$.**

En conclusion, 1 admet :

- **une unique racine cubique dans $\mathbb{R}$** qui est 1 ;
- **trois racines cubiques dans $\mathbb{C}$** qui sont 1, $\jmath$ et $\jmath^2 = \bar{\jmath}$.

On a alors la factorisation sur $\mathbb{C}$ suivante :

$$z^3 - 1 = (z-1)(z-\jmath)\big(z-\jmath^2\big)$$

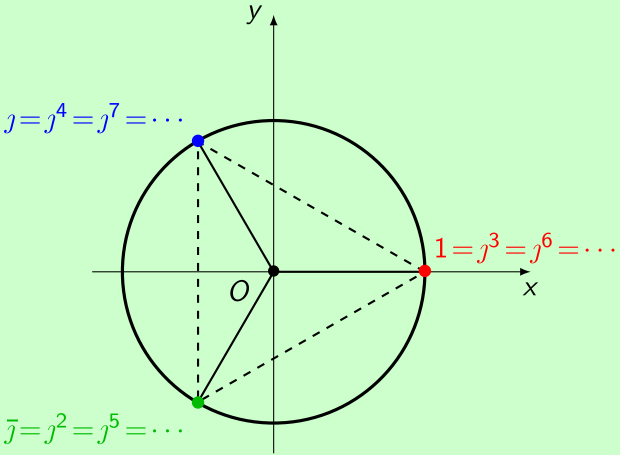
Remarque : en développant ce produit, on obtient :

$$(z-1)(z-\jmath)\big(z-\jmath^2\big) = z^3 - (1+\jmath+\jmath^2)z^2 + (\jmath+\jmath^2+\jmath^3)z + \jmath^3$$

puis, par identification, on retrouve la relation $1 + \jmath + \jmath^2 = 0$.

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

1. c. ***Interprétation géométrique :***



Les points d'affixes $1, \jmath, \jmath^2$ forment un **triangle équilatéral de centre de gravité *O*.**

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

❷

$$(S) : \quad \begin{cases} u + v + w = a \\ u + \jmath\, v + \jmath^2\, w = b \\ u + \jmath^2\, v + \jmath\, w = c \end{cases} \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right.$$

ⓐ Effectuons les combinaisons linéaires des équations E_1, E_2, E_3 suivantes :

- la combinaison $E_1 + E_2 + E_3$ donne $u = \frac{1}{3}(a + b + c)$;
- la combinaison $E_1 + \jmath^2\, E_2 + \jmath\, E_3$ donne $v = \frac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c)$;
- la combinaison $E_1 + \jmath\, E_2 + \jmath^2\, E_3$ donne $w = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c)$.

Le système (S) admet donc une unique solution donnée par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\tfrac{1}{3}(a + b + c), \tfrac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c), \tfrac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c)\right)\right\}}$$

Exercice B.10 (Racines cubiques de l'unité)

❷

$$(S) : \quad \left\{\begin{array}{l} u + v + w = a \\ u + \jmath\, v + \jmath^2\, w = b \\ u + \jmath^2\, v + \jmath\, w = c \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right.$$

ⓑ Cherchons une condition **nécessaire** et **suffisante** pour que les nombres u, v, w soient **réels**.

Condition nécessaire. Supposons u, v, w **réels**. Alors :

- l'équation E_1 indique que le nombre a doit être **réel** ;
- puisque $\jmath$ et $\jmath^2$ sont conjugués, les nombres complexes $u + \jmath\, v + \jmath^2\, w$ et $u + \jmath^2\, v + \jmath\, w$ sont conjugués. Les équations E_2 et E_3 indiquent donc que les nombres b et c doivent être des complexes **conjugués**.

Condition suffisante. Supposons a **réel** et b, c **conjugués**. Alors :

- $u = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\mathfrak{Re}(b)\big) \in \mathbb{R}$
- $v = \frac{1}{3}(a + \jmath^2\, b + \jmath\, c) = \frac{1}{3}(a + \bar{\jmath}\, b + \jmath\, c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\mathfrak{Re}(\bar{\jmath}\, b)\big) \in \mathbb{R}$
- $w = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \jmath^2\, c) = \frac{1}{3}(a + \jmath\, b + \bar{\jmath}\, c) = \frac{1}{3}\big(a + 2\,\mathfrak{Re}(\jmath\, b)\big) \in \mathbb{R}$

D'où l'équivalence : u, v, w **réels** $\Longleftrightarrow$ (a **réel** et b, c **conjugués**).